MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Giessen, Prof. F. KLEIN zu Erlangen,
Prof. A. MAYER zu Leipzig, Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Carl Neumann,
Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

VII. Band.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1874.

Inhalt des siebenten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch.

Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen

von einigen seiner Freunde.

Als vorigen Spätherbst ein zu früher Tod den verewigten Clebsch der Wissenschaft entriss, vereinigten sich im Gefühle des gemeinsamen Verlustes eine Reihe seiner Freunde und ehemaligen Schüler (Brill, Gordan, Klein, Lüroth, A. Mayer, Nöther, Von der Mühll), um der Verehrung, die sie dem Dahingeschiedenen widmeten, einen Ausdruck in einer grösseren wissenschaftlichen Biographie zu geben. Wohl erschien es schwierig, bei einem Manne, dessen Thätigkeit wesentlich dem letzten Jahrzehnte angehört und der mit ungewöhnlicher Vielseitigkeit in den verschiedensten Theilen der Wissenschaft gearbeitet hat, schon jetzt ein solches Unternehmen zu versuchen. Aber eben hierin erblickten wir ein erhöhtes Interesse, eine doppelte Wichtigkeit desselben: es galt nicht nur, die Arbeiten des einzelnen Forschers in ihrer Aufeinanderfolge zu schildern, es galt vielmehr auch, wissenschaftliche Bestrebungen Anderer in vergleichendem Ueberblicke zu charakterisiren und einen grossen Theil der Fragen zu bezeichnen, mit denen sich die Mathematiker der Gegenwart beschäftigen. Und wenn der Einzelne, bei der Beschränkung, die jeder subjectiven Anschauung anhaftet, es kaum wagen wird, eine solche Aufgabe in Angriff zu nehmen, so glaubten wir der hieraus fliessenden Schwierigkeit durch unsere Vereinigung einigermassen begegnen zu können.

Eine kürzere, auch in diese Annalen (Bd. VI. 2) aufgenommene Notiz über Clebsch erschien bereits in den Göttinger Nachrichten (Dec. 1872). Als ursprünglich für einen weiteren Leserkreis entworfen, bringt dieselbe wesentlich biographisches Material; ihre fachwissenschaftlichen Partieen sind mehr allgemein gehalten. Dem gegenüber wenden sich die nachstehenden Auseinandersetzungen an den engeren Kreis eigentlicher Mathematiker; sie beschränken sich durchaus auf speciell wissenschaftliche Erörterungen und mögen also in jener Notiz nach verschiedenen Seiten eine Ergänzung finden.

Man kann die mannigfachen Arbeiten, mit denen sich Clebsch beschäftigt hat, nach Inhalt und Aufeinanderfolge in 6 Gruppen bringen. Die ersten Untersuchungen Clebsch's beziehen sich auf Gegenstände der mathematischen Physik; er wendet sich sodann zu Problemen der Variationsrechnung und der Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Es folgen weiter seine ersten geometrischen Arbeiten, welche allgemeine Curven- und Flächentheorie betreffen. An sie schliesst sich eine Periode, die durch das Studium der Abel'schen Functionen und ihre Verwerthung in der Geometrie charakterisirt ist. Die letzten Jahre endlich sind durch gleichzeitige Arbeiten über Flächenabbildung und Invariantentheorie bezeichnet.

Wir haben die hiemit geschilderte Trennung des uns vorliegenden Stoffes zur Grundlage für unser Zusammenarbeiten gemacht, indem jede der genannten Gruppen von einem von uns (und zwar bez. von Von der Mühll, Mayer, Lüroth, Brill, Nöther, Gordan) übernommen und hernach die Reihe der so entstandenen Einzelreferate (durch Klein) zu einem Ganzen verbunden wurde. Freilich hat so unsere Arbeit nicht denjenigen Grad von Gleichmässigkeit erhalten können, den man vielleicht wünschen mag. Auch glaubten wir auf absolute Vollständigkeit unseres Berichtes verzichten zu sollen, da die Besprechung mancher Arbeit, die ein einzelnes Problem betrifft, den Zusammenhang des Ganzen zu sehr unterbrochen haben würde. — Möge es uns gelungen sein, von dem Wirken und Forschen des theuren Dahingeschiedenen ein anschauliches Bild entworfen und dazu beigetragen zu haben, dass ein Verständniss für die von ihm verfolgten wissenschaftlichen Ziele in immer weiteren Kreisen erwachse!

Im Juli 1873.

Ueberblickt man die Entwickelung der Mathematik, insbesondere der deutschen Mathematik, in den letzten Jahrzehnten, so wird man, ganz im Allgemeinen, zwei Gruppen zusammengehöriger Arbeiten unterscheiden: auf die eine Seite wird man die Untersuchungen aus dem Gebiete der Functionentheorie, der Zahlentheorie, der mathematischen Physik stellen, auf die andere Seite die neuere Geometrie und Algebra. Diese Trennung ist nicht nur eine äusserliche, durch die Verschiedenheit des Gegenstandes begründete. Es hat sich vielmehr in den verschiedenen Disciplinen die mathematische Denkweise selbst nach verschiedenen Richtungen ausgebildet: auf der einen Seite concentrirt sich die Forschung auf möglichst exacte Umgrenzung der einzuführenden Begriffe, auf der andern Seite geht man von einem kleineren Kreise bereits erkannter Grundbegriffe aus und richtet sein Augenmerk auf die Beziehungen und Folgerungen, welche aus ihnen hervorsprossen.

Die erstgenannte Richtung ist in Deutschland wesentlich auf Dirichlet und in weiterer Instanz auf Gauss zurückzuführen, die andere erwuchs einerseits aus den analytischen Arbeiten Jacobi's, andererseits aus den Ergebnissen der neueren geometrischen Speculation.

Clebsch gehörte seiner ganzen Beanlagung nach durchaus der zweiten Richtung an und muss um so mehr als deren Hauptvertreter im letzten Jahrzehnte unter den deutschen Mathematikern betrachtet werden, als er durch seine vielfältigen persönlichen Beziehungen wie durch seine eminente Lehrthätigkeit in den weitesten Kreisen fördernd und anregend für dieselbe gewirkt hat. Und doch hat er in gewissem Sinne dazu beigetragen, dass eine Vereinigung der beiderlei Richtungen in Zukunft möglich scheint: denn indem er seine Untersuchungen auf immer weitere Gebiete der Wissenschaft erstreckte, hat er die Gegenstände, mit denen sich die Mathematiker der einen oder der andern Richtung beschäftigen, in hohem Masse genähert.

Clebsch war in erster Linie Algebraiker, und allen seinen Arbeiten gemeinsam ist die vollendete Beherrschung des algebraischen Apparates. Ihr zur Seite stellt sich in den späteren Untersuchungen die klare geometrische Auffassung, vermöge deren jeder Schritt, den die Rechnung vollführt, zu einem anschaulichen Verständnisse gebracht wird. Aber es ist nicht die concrete Art, die räumlichen Verhältnisse zu

sehen, wie wir sie bei manchen anderen Geometern finden; die geometrische Anschauung ist ihm mehr Symbol und Orientirungsmittel für die algebraischen Probleme, mit denen er sich beschäftigt. Immerhin wird Clebsch, gegenüber den verschiedenartigen Bestrebungen, deren sich andre Geometer der neueren Zeit beflissen haben, durch das Zusammengehen der algebraischen und der geometrischen Auffassung zu charakterisiren sein, und man wird unter seinen Leistungen diejenigen obenan stellen, in denen er vermöge dieser doppelten Begabung bis dahin gesonderte Disciplinen in ihrem gemeinsamen Grunde erfasste.

Freilich war zu solchen Arbeiten nur eine Natur befähigt, die gleich ihm unter der Menge der Einzelheiten die grossen treibenden Gedanken hervorzuziehen wusste. Wir berühren hiermit eine andere wesentliche Seite seiner mathematischen Denkweise, die sich bei manchen Vertretern der algebraisch-gometrischen Richtung, z. B. bei Jacobi, ebenfalls zeigt, die aber durchaus nicht an die Beschäftigung mit Algebra und Geometrie nothwendig geknüpft ist. Vom Einzelnen ausgehend, erfasst Clebsch allgemeine Methoden, und diese sind es, die ihn weiter führen, die seinen Arbeiten ein einheitliches, systematisches Gepräge ertheilen. Die apriorische Fragestellung nicht nur in der mehr philosophischen Form, sondern überhaupt die Concentration auf ein von vornherein gegebenes Problem tritt verhältnissmässig zurück; der mathematische Gedanke entspringt in freier organischer Entwickelung aus der Methode.

In voller Deutlichkeit spiegelt sich diese Art in der mehr analysirenden als deducirenden Darstellungsweise wieder, deren sich Clebsch in seinen Arbeiten bedient, deren durchsichtige Form nicht nur die Ueberzeugung von der Richtigkeit einer Behauptung, sondern das Bewusstsein einer klar erkannten Wahrheit vermittelt. Clebsch wurde dabei, wenn ein solcher Ausdruck gestattet ist, geradezu von einem künstlerischen Tacte geleitet: das Streben nach harmonischer Abrundung des Stoffes ist für die Richtung seiner Untersuchungen wie die Gestalt seiner Abhandlungen von der grössten Bedeutung gewesen.

Aber nicht minder erblicken wir darin einen hauptsächlichen Grund für den ausserordentlichen Erfolg seiner Lehrthätigkeit. Indem der Zuhörer geradezu ein ästhetisches Interesse empfand, den Vorträgen von Clebsch zu folgen, wurde ihm das Eindringen in die Grundanschauungen des Lehrers möglichst erleichtert. Doch ungerecht wäre es, an dieser Stelle nicht auch der liebenswürdigen Art und Weise zu gedenken, mit der Clebsch im persönlichen Verkehr von seinen Gedanken reich und unbegrenzt mittheilte. Der wissenschaftliche Austausch war für ihn selbst in hohem Grade Bedürfniss; indem er, in voller Würdigung fremder Gedanken, ebensogern empfing als gab, wusste er sich durch ihn die ungewöhnliche geistige Regsam-

keit zu erhalten, vermöge deren das Gebiet seiner mathematischen Thätigkeit kein abgeschlossenes war, sondern immer umfassenderen Erweiterungen zustrebte.

Die ersten Arbeiten von Clebsch datiren aus der Mitte der fünfziger Jahre. Sie betreffen, im Gegensatze zu den späteren Arbeiten, meist einzelne Probleme, die er mit grosser Geschicklichkeit zu behandeln und zum Abschluss zu führen weiss. Man wird sie, insofern sich in ihnen die Eigenart von Clebsch noch weniger ausspricht, wesentlich als Vorstudien zu betrachten haben. Die glänzende Reihe seiner algebraisch-geometrischen Untersuchungen, die alle auseinander in innerem Zusammenhange erwachsen, und in denen Clebsch je länger um so bewusster dazu übergeht, der Wissenschaft neue Bahnen vorzuzeichnen, beginnen erst mit dem Jahre 1860. Wenn man bedenkt, wie kurz der Zeitraum ist, in welchem alle diese Arbeiten entstanden sind, wenn man in ihnen eine fortschreitende Entwickelung wahrnimmt, die wohl noch lange nicht ihren Höhepunkt erreicht hatte, so wird man doppelt schwer den Verlust empfinden, den die Wissenschaft durch den zu frühen Tod von Clebsch erlitten hat.

Clebsch hat den Grund zu seiner mathematischen Ausbildung auf der Universität seiner Vaterstadt Königsberg gelegt, die er von 1850—54 besuchte. Ein passenderer Ort für die Entwickelung eines mathematischen Talentes konnte damals wohl kaum gefunden werden. Denn gerade in Königsberg waren zu jener Zeit durch die Vereinigung von Hesse, Neumann und Richelot die mathematischen Fächer eben so vielseitig als glänzend vertreten. Wenn Clebsch durch Neumann's Vorlesungen in die damals noch weniger verbreiteten Vorstellungen der mathematischen Physik eingeführt wurde, wenn er andererseits durch Richelot's unermüdliche und mannigfaltige Lehrthätigkeit eine genaue Kenntniss der Analysis in ihrem damaligen Zustande gewann, so ist doch eigentlich Hesse für ihn von der nachhaltigsten Bedeutung geworden, indem ihn derselbe mit den neueren algebraisch - geometrischen Untersuchungen bekannt machte.

Die ersten Arbeiten, welche Clebsch unternahm, betreffen Probleme der mathematischen Physik, insbesondere der Elasticität und der Hydrodynamik. Veranlassung zur Wahl dieser Gegenstände waren ihm zunächst Neumann's Vorlesungen gewesen, aber er blieb auch später durch seine Stellung am Carlsruher Polytechnicum, an welchem er 1858—63 die Professur für theoretische Mechanik bekleidete, längere Zeit auf ähnliche Fragen hingewiesen. Clebsch ist in diesen Arbeiten übrigens nicht eigentlich Physiker. Die physikalische, überhaupt die naturwissenschaftliche Auffassung lag ihm, bei allen Kenntnissen, die

er im Einzelnen besass, verhältnissmässig fern und interessirte ihn nicht besonders. Nur in seiner ersten Arbeit, seiner Inauguraldissertation: „Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit" (Königsberg 1854, vergl. Crelle's Journal Bd. 52), sowie später noch einmal in einer Untersuchung über Circularpolarisation (Crelles Journal Bd. 57) findet sich bei ihm eine Vergleichung der abgeleiteten Resultate mit dem Experimente. Ihn interessirte vielmehr die mathematische Fragestellung, insofern sie geschickte analytische Behandlung verlangte: er gehörte, auch hierin Jacobi ähnlich, der rein mathematischen Richtung an, welche den abstracten Gedanken um seiner selbst willen verfolgt. Es war daher natürlich, dass er sich allmählich von den physikalischen Problemen zu rein mathematischen Fragen hinwandte.

Eine grössere Reihe von Abhandlungen, die sich auf hydrodynamische und auf optische Probleme beziehen, enthält das Borchardt'sche Journal (vergl. die am Schlusse zugefügte Liste der Publicationen). Das Verdienst dieser Untersuchungen liegt wohl weniger in den durch sie erzielten Resultaten, so schätzbar manche derselben sind, als in der eleganten Handhabung des analytischen Apparates; aber eben deswegen lässt sich, ohne Eingehen auf Einzelheiten, nicht genauer von ihnen berichten. Gewissermassen als Abschluss dieser Periode der mathematisch-physikalischen Forschung veröffentlichte Clebsch 1862 (Leipzig, B. G. Teubner) sein Lehrbuch der Elasticität. Hatte Lamé's bekanntes Werk ein hohes Verdienst um die Ableitung und Umformung der allgemeinen elastischen Gleichungen und um die Anwendung derselben auf das Problem der doppelten Strahlenbrechung gehabt, so gab Clebsch im Wesentlichen eine musterhafte Darstellung des sogenannten de St. Venant'schen Problems. Neu ist dabei die Umkehrung desselben. De St. Venant hatte sich mit dem Falle eines Stabes beschäftigt, auf dessen Seitenflächen keine Kräfte wirken, und gezeigt, dass man die Probleme der Biegung und der Torsion lösen kann, wenn die auf die Endflächen wirkenden Kräfte nach einem bestimmten Gesetze über dieselben vertheilt sind. Clebsch zeigt nun, dass unter entsprechenden Voraussetzungen auch der umgekehrte Fall lösbar ist, wo auf die Seitenflächen Kräfte wirken, dagegen keine auf die Endflächen. Liefern jene Betrachtungen eine angenäherte Lösung für den Fall eines Stabes, an dessen Enden Kräfte wirken, so führen diese zu einer annähernden Lösung für den Fall einer Platte, deren Rand von Kräften angegriffen wird. Clebsch entwickelte dann weiter, dass die gemachten Voraussetzungen in dem Falle eines sehr dünnen Stabes und ebenso in dem Falle einer sehr dünnen Platte für die Elemente zutreffen, in welche man diese Körper nach Kirchhoff zerlegen muss, um richtige Gleichungen zu erhalten, und leitet so die

zuerst von Kirchhoff gegebenen Endgleichungen für die beiden Fälle ab.

Mit seiner ersten rein mathematischen Arbeit knüpft Clebsch an Untersuchungen von Hesse und von Jacobi an. Clebsch hat Jacobi nicht persönlich gekannt, aber er hat dessen Werke mit Vorliebe studirt und sich später geradezu gelegentlich als Schüler desselben bezeichnet. Es sind von Jacobi hinterlassene Probleme, die Clebsch in den nun zu besprechenden Arbeiten aufgreift; und wenn der Ideenkreis, in welchem sich diese Untersuchungen bewegen, durchaus der Jacobi'sche ist, so gehen dieselben, was einzelne Leistungen betrifft, über das von jenem Erreichte doch weit hinaus.

Die Aufgabe, eine oder mehrere unbekannte Functionen so zu bestimmen, dass ein Integral, welches diese Functionen nebst ihren Differentialquotienten auf eine gegebene Weise enthält, einen grössten oder kleinsten Werth erreiche, verlangt zunächst, dass die erste Variation des Integrals zum Verschwinden gebracht wird, und aus dieser Bedingung erhält man die Differentialgleichungen, durch deren Integration sich die unbekannten Functionen bestimmen. Damit aber ein wirkliches Maximum oder Minimum eintritt, muss überdiess für die hierdurch erhaltenen Functionen die zweite Variation ein unabänderliches Vorzeichen besitzen. Hieraus entspringt die andere Aufgabe, die zweite Variation auf eine zur Untersuchung ihres Zeichens geeignete Form zu bringen. Diese Aufgabe führt ihrerseits auf neue Differentialgleichungen, die auf den ersten Blick von so complicirtem Charakter scheinen, dass ihre Integration selbst den Bemühungen von Lagrange widerstand. Es war daher eine ausserordentliche Entdeckung Jacobi's, dass die Integration der Differentialgleichungen der zweiten Variation unmittelbar aus der Integration der Differentialgleichungen der ersten Variation abgeleitet werden kann (Crelle's J. Bd. 17, 1837). Aber Jacobi hatte nur den einfachsten Fall eines einfachen Integrals mit einer unbekannten Function untersucht, und wenn man bedenkt, wie viel Anstrengungen es kostete, bis nur Jacobi's Angaben vollständig bewiesen waren, was erst durch Hesse's Arbeit (Borch. J. Bd. 54, 1857) geschah, so durfte man wohl kaum erwarten, dass es gelingen werde, auch in der Complication der allgemeineren Fälle den Jacobi'schen Satz wiederzufinden. Trotzdem unternahm Clebsch, bald nach dem Erscheinen der Hesse'schen Arbeit, die allgemeine Untersuchung der zweiten Variation (Borch. J. Bd. 55, Nov. 1857, Febr. 1858, Bd. 56, Juni 1858),*) und indem er

*) Das den Citaten hier und im Folgenden beigesetzte Datum bezeichnet, wenn nicht ausdrücklich ein Anderes bemerkt wird, die von dem Autor angegebene Zeit des Abschlusses der Arbeit.

durch einen sinnreichen Gedanken die Aufgaben der Variationsrechnung zunächst auf solche Probleme des relativen Maximums oder Minimums zurückführte, in denen nur erste Differentialquotienten auftreten, gelang es ihm, nicht blos für einfache, sondern auch für vielfache Integrale zu zeigen, dass für die Reduction der zweiten Variation neue Integrationen nicht erforderlich sind *).

Bei dieser Reduction tritt im Falle eines einfachen Integrals der merkwürdige Umstand ein, dass man ein Endresultat mit scheinbar mehr willkürlichen Constanten erhält, als nach der Theorie darin vorkommen können. Diese Constanten sind überdies durch gewisse Bedingungsgleichungen verbunden und müssen so bestimmt werden, dass der Nenner der Reduction innerhalb der Grenzen des Integrals nicht verschwindet. Wenn es daher eine oft versuchte Aufgabe war (die in den einfachsten Fällen von Eisenlohr, Spitzer und Hesse gelöst wurde), nachzuweisen, dass diese Constanten sich auf eine vorgeschriebene kleinere Anzahl reduciren lassen, so ist es doch auf der anderen Seite noch ungleich wichtiger, die ursprünglichen Constanten durch solche Functionen von neuen unabhängigen Constanten auszudrücken, welche jene Bedingungsgleichungen identisch erfüllen.

Von beiden Aufgaben enthalten die Arbeiten von Clebsch die erste vollständige Lösung (vergl. Borch. J. Bd. 55, Febr. 1858) **). Und bedeutsamer noch als das Resultat ist der Weg, auf dem diese Lösung erhalten wird. Er bringt den Beweis und die Erweiterung einer anderen fundamentalen Bemerkung, die Jacobi a. a. O. macht, den Nachweis nämlich, dass sich die Differentialgleichungen eines jeden isoperimetrischen Problems, in welchem nur eine unabhängige Variable auftritt, zurückführen lassen auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ***), wodurch der Variationsrechnung dieselben Methoden zugänglich werden, die Hamilton und Jacobi der Dynamik eröffnet haben.

Bald nach diesen Arbeiten begann Clebsch sich geometrischen Problemen zuzuwenden. Er ist aber später noch wiederholt (1860—62,

---

*) In etwas kürzerer Weise wurde dieselbe Reduction unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen später durch Lipschitz erreicht (Borch. J. Bd. 65). Die wirkliche Herstellung der Kriterien für ein Maximum oder Minimum gab auf Grund der Clebsch'schen Arbeit Mayer in seiner Habilitationsschrift (Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig 1866), vergl. auch Mayer's Abhandlung in Borch. J. Bd. 69.

**) Eine directere Lösung der ersten Aufgabe wurde später im Anschlusse an Clebsch von Mayer gegeben (in der bereits genannten Schrift); ebenso, unabhängig von Clebsch, durch Stern (Göttinger Abhandl. Bd. 13, 1867).

***) In den erst später (1866) veröffentlichten Vorlesungen Jacobi's über Dynamik findet man allerdings diesen Satz ebenso allgemein ausgesprochen, doch wird er dort immerhin nur für specielle Fälle bewiesen.

1865) dazu gekommen, eine Reihe von Problemen, die Jacobi hinterlassen hatte, aufzunehmen. Er wurde dazu zunächst durch den Umstand veranlasst, dass er die Herausgabe einiger Theile des Jacobi'schen Nachlasses, sowie der Jacobi'schen Vorlesungen über Dynamik (erschienen 1866) übernommen hatte. Bei der nahen Beziehung, in der diese Arbeiten Clebsch's zu den oben besprochenen stehen, mag derselben gleich hier gedacht werden. Wie bei den Untersuchungen über Variationsrechnung ist auch bei diesen hauptsächlich die Geschicklichkeit in der Ueberwindung technischer Schwierigkeiten hervorzuheben; es ist ferner die für so complicirte Verhältnisse ganz ungewöhnliche Klarheit der Exposition zu betonen.

Man wusste aus einer Andeutung Jacobi's (Crelle's J. Bd. 29, p. 253), dass das Verfahren, durch welches man früher das Pfaff'sche Problem zu behandeln pflegte, hinsichtlich der Zahl der erforderlichen Integrationen vervollkommnet werden konnte; auch lag es nicht fern, zu vermuthen, dass hier eine Methode existiren müsse, die derjenigen analog ist, durch welche Jacobi die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung so wesentlich gefördert hatte.*) Die Schwierigkeit der Aufgabe lag in der sehr viel grösseren Complication der Vorgänge und Operationen, welche nothwendig werden. Aber Clebsch überwand alle diese Hindernisse (Borch. J. Bd. 60. dat. Sept. 1860, publ. 1862, Bd. 61. dat. Jan. 1861, publ. 1862), und indem er das Problem auf Systeme gleichzeitiger linearer partieller Differentialgleichungen zurückführte, die unabhängig von einander und ohne jede Integration aufgestellt werden können, gewann er demselben einen neuen Gesichtspunkt ab, der sich bald als fundamental erwies und voraussichtlich auch für alle künftigen Untersuchungen über das Pfaff'sche Problem die Grundlage bilden wird.

Hierbei trat eine Schwierigkeit auf. Die einzelnen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen, von deren Integration die Lösung des Pfaff'schen Problems abhängt, haben nämlich nicht unmittelbar diejenige Form, die Jacobi in seiner Nova Methodus zu integriren gelehrt hat, und in Folge dessen ist auch die Jacobi'sche Methode nicht ohne Weiteres auf dieselben anzuwenden. Es entstand also die Aufgabe, überhaupt die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen einer Untersuchung zu unterwerfen**). Clebsch

*) In der That hat Natani schon vor Clebsch die von Jacobi vorhergesehene Reduction der Anzahl von Integrationen im Pfaff'schen Probleme wirklich erzielt (Borch. J. Bd. 58. dat. Januar 1860. publ. 1861). Seine Methode und die von Clebsch sind indess trotz ihrer Uebereinstimmung betr. die Zahl der nothwendigen Integrationen noch nicht in Verbindung gebracht worden.

**) Mit Untersuchungen über die simultane Integration mehrerer partieller Differentialgleichungen hat sich, ohne jedoch speciell auf lineare einzugehen, schon

wurde erst einige Jahre später (1865) veranlasst, das Problem in diesem Sinne weiter zu führen. Ihn beschäftigten damals die linearen partiellen Differentialgleichungen, denen die Invarianten algebraischer Formen genügen, wovon wir weiter unten noch zu berichten haben. Andererseits hatte er eine Arbeit von Weiler kennen gelernt, in welcher derselbe (vergl. Schlömilch's Zeitschrift. 1863.) die Zahl der Integrationen, welche nach der Jacobi'schen Methode bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu leisten sind, beträchtlich erniedrigt hatte. Der Untersuchung von Clebsch (Borch. J. Bd. 65) verdankt man wiederum zwei wichtige Resultate. Einmal den Satz, dass jedes System linearer partieller Differentialgleichungen, das überhaupt gemeinsame Lösungen zulässt, auf die Jacobi'sche Form gebracht werden kann, wodurch zur Lösung aller Probleme, die auf solche partielle Differentialgleichungen führen, eine gemeinsame Methode gewonnen ist. Sodann im Anschlusse an die Weiler'sche Untersuchung den Nachweis, dass die Zahl der erforderlichen Integrationen sowohl bei der eigentlichen Jacobi'schen Integrationsmethode als bei deren Ausdehnung auf das Pfaff'sche Problem um ein Bedeutendes reducirt werden kann. Neueren Arbeiten war es vorbehalten, zu zeigen, dass sich auch die Zahl der Integrationen, welche bei der Clebsch-Weiler'schen Methode erfordert werden, noch beträchlich verringern lässt (vergl. Aufsätze von Lie und Mayer in den Gött. Nachrichten 1872, sowie in Math. Ann. Bd. 5 und 6), wie denn überhaupt die hier einschlägigen Theorien in der allerletzten Zeit einer wesentlichen Entwickelung entgegen zu gehen scheinen. —

Die geometrisch-algebraischen Arbeiten von Clebsch beginnen mit dem Jahre 1860. Die nächste Veranlassung dazu, sich mit geometrischen Problemen zu beschäftigen, hatte ihm, wie er selbst angiebt, das Studium der Salmon'schen Werke geboten, die in ihrer bekannten Reichhaltigkeit für jeden Leser des Anregenden die Fülle enthalten. Auch mag der wissenschaftliche Austausch, wie ihn Clebsch bei mehreren seiner Carlsruher Collegen fand, von bestimmendem Einflusse gewesen sein: wie denn Clebsch später mit Vorliebe erzählte, dass er damals durch Schell die neuere synthetische Geometrie habe kennen lernen. Die analytisch-geometrische Grundlage für seine nun

---

vor Clebsch ganz allgemein Bour beschäftigt, dessen Resultate jedoch einer exacteren Formulirung bedürfen (vergl. einen Aufsatz von Mayer, Math. Ann. Bd. 4). Andererseits sind die im Texte noch zu nennenden linearen partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie bereits 1856 von Cayley hinsichtlich ihrer simultanen Integration untersucht worden (A second Memoir upon Quantics. Phil. Transactions 146). Cayley's Betrachtungen sind mit denen, die Clebsch anstellt, nahe verwandt; er hebt aber nicht die allgemeine Bedeutung hervor, welche dieselben für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen besitzen.

beginnende Thätigkeit hatte Clebsch, wie schon angedeutet, während seiner Universitätszeit in den Vorlesungen von Hesse gewonnen, auf dessen Untersuchungen er ja auch bei früheren Gelegenheiten (Reduction der zweiten Variation) geradezu weiter gearbeitet hatte.

Wollen wir für die Stellung, welche Clebsch in der Wissenschaft fortan einnahm, ein Verständniss gewinnen, so wird es nöthig, auf die Entwickelung der Geometrie in den letzten Jahrzehnten überhaupt zurückzugehen.

Es sind hauptsächlich zwei Richtungen geometrischer Forschung, die in dieser Zeit ihre Ausbildung gefunden haben, und diese gehen in mancher Beziehung mit der allgemeinen Zweitheilung mathematischer Bestrebungen parallel, deren wir im Eingange gedachten. Die Betrachtungen der einen Art sind wesentlich durch die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf metrische Probleme charakterisirt: es gehören dahin die Untersuchungen über Flächenkrümmung, über geodätische Linien etc., wie sie in Frankreich durch Monge, in Deutschland durch Gauss im heutigen Sinne angeregt worden sind. Wenn diese Forschungen rückwirkend ihre Wichtigkeit für die Ausbildung des Infinitesimalcalculs, wie andererseits eine hohe Bedeutung in Fragen der mathematischen Physik gewonnen haben, so hatten sie von Hause aus zu wenig algebraischen Charakter, um mit den Untersuchungen der anderen Art, die man unter dem Namen der neueren Geometrie zusammenfasst, in Zusammenhang zu bleiben. Erst in der allerneuesten Zeit bahnt sich in Folge der beiderseitigen Fortschritte eine Vereinigung der beiderlei Richtungen an, die in hohem Masse interessant und fruchtbar zu werden verspricht.

Die neuere Geometrie geht nach ihrem Ursprunge ebenfalls auf Monge resp. auf seine zahlreichen Schüler zurück, unter denen vor Allen Poncelet hervorragt, dessen grundlegendes Werk, der „Traité des propriétés projectives“ 1822 erschien. Es ist sehr merkwürdig, dass die junge und lebenskräftige Disciplin in Frankreich zunächst nur éinen Vertreter fand, der es vermochte, sie über den von Poncelet gewonnenen Standpunkt hinauszuführen. Wenn man Chasles hierfür allen Dank schulden wird, so muss man um so mehr bedauern, dass in jener Zeit der wissenschaftliche Austausch nur erst wenig entwickelt war und Chasles eine ganze Reihe von Gesichtspunkten erst selbständig zu finden hatte, die von den deutschen Geometern längst entwickelt waren.

Denn im Anschlusse an die von der französischen Schule gegebene Anregung entfaltete sich in Deutschland gegen Mitte der zwanziger Jahre plötzlich ein reiches geometrisches Leben, dessen Beginn durch das beinahe gleichzeitige Auftreten der drei grossen Forscher: Möbius, Plücker und Steiner bezeichnet ist.

Das erste und auch das wichtigste Werk von Möbius, der barycentrische Calcul, erschien bereits 1827. Aber es blieb lange Zeit fast unbeachtet. Die neuen und fundamentalen Gedanken, welche Möbius in demselben niedergelegt hat, haben erst Interesse und Verständniss finden können, als sich der allgemeine geometrische Sinn allmählich zu der Höhe gehoben hatte, von der aus Möbius seine Untersuchungen anstellt. Der barycentrische Calcul hat daher auch nicht in dem Masse in die Entwickelung der geometrischen Anschauungen eingreifen können, als er nach dem Reichthume neuer und fruchtbringender Ideen, die er einschloss, gesollt hätte. Ein ganz ähnliches Schicksal haben leider die nicht nur für Geometrie äusserst wichtigen Arbeiten eines anderen Forschers, H. Grassmann's, erfahren. Man beginnt erst in der letzten Zeit, auf die Grassmann'schen Arbeiten zurückzugehen und bemerkt, dass Grassmann bereits in den vierziger Jahren eine Reihe sehr umfassender Ideen concipirte, welche der Process allgemeiner geometrischer Entwickelung erst in der Zwischenzeit ausgebildet, zum Theil aber noch gar nicht berührt hat. Wir müssen hier vorgreifend dieses ausserordentlichen Verdienstes gedenken, da wir bei der isolirten Stellung, die Grassmann einnimmt, im Folgenden nur selten Gelegenheit haben werden, auf die Besprechung seiner Leistungen zurückzukommen, und dürfen dies um so mehr, als wir damit einer Ueberzeugung Ausdruck geben, der Clebsch im vollsten Masse beipflichtete.

Mit den Namen Plücker und Steiner ist für die deutsche Geometrie die Trennung in sogenannte analytische und synthetische Geometrie gegeben, welche bis in die allerneueste Zeit die Geometer in zwei getheilte Lager gespalten hat. Steiner hatte in der unmittelbaren geometrischen Anschauung das hinreichende Hülfsmittel und den einzigen Gegenstand seiner Erkenntniss erblickt, während Plücker in der Identität der analytischen Operation und der geometrischen Construction die Quelle seiner Beweise suchte und geometrische Wahrheit nur als eins der vielen denkbaren Gegenbilder analytischer Beziehung betrachtete. Und doch sind die Ziele, welche die beiden Forscher verfolgten, in vieler Hinsicht nahe verwandt: der Fortschritt der Wissenschaft hat es inzwischen ermöglicht, fast an allen Stellen zwischen den formal geschiedenen Betrachtungsweisen den Uebergang zu bewerkstelligen. Das gemeinsam Charakteristische: die projectivische Anschauung und die Anlehnung an die Begriffsbildung der Algebra tritt je länger je mehr in den Vordergrund, und die Bevorzugung der einen oder anderen Ausdrucksweise erscheint als etwas verhältnissmässig Nebensächliches.

Eben diese Auffassung von dem Verhältnisse der synthetischen und analytischen Geometrie bildet eine der Grundanschauungen von

Clebsch. Man vergleiche hierüber die Gedächtnissrede auf Plücker, die Clebsch im 16ten Bande der Göttinger Abhandlungen gegeben hat (1871). Clebsch schildert dort ausführlich und in vergleichendem Ueberblicke die damalige Entwickelung der Geometrie und nimmt dabei Gelegenheit, seine eigenen allgemeinen wissenschaftlichen Gesichtspunkte auseinanderzusetzen.

Während die rein geometrische Richtung Steiner's, mit welcher die gleichzeitig von Chasles verfolgten Untersuchungen nahe verwandt sind, durch Staudt eine principiellere Durchbildung erfuhr, erhielt die analytische Geometrie in Hesse's wichtigen Arbeiten eine neue und wesentliche Bereicherung. Hatte Plücker einen hauptsächlichen Vortheil seiner Betrachtungsweisen darin erblickt, dass er die algebraische Elimination durch eine geometrische Ueberlegung umging, so zeigte Hesse, wie man unter Benutzung der inzwischen ausgebildeten Hülfsmittel, besonders der Determinantentheorie, der algebraischen Operation diejenige Geschmeidigkeit ertheilen kann, deren Mangel für Plücker eben der Grund gewesen war, um dessen willen er die Elimination überhaupt verbannt wissen wollte.

Erst so war die Möglichkeit einer Verschmelzung der Geometrie mit der neu entstehenden Disciplin gegeben, welche man heute als Formen- oder Invarianten-Theorie bezeichnet und die bestimmt ist, die Grundgedanken der neueren Geometrie in analytischer Allgemeinheit zu repräsentiren.

Das Verdienst, diese Disciplin geschaffen und durch Verbindung derselben mit der geometrischen Speculation die letztere über den von Hesse gewonnenen Standpunkt hinaus gefördert zu haben, gebührt den englischen Geometern*) Sylvester, Cayley, Salmon, denen sich in Deutschland Aronhold anschliesst. Die späteren Untersuchungen von Steiner über höhere Curven und Flächen, die in den von ihm ohne Beweis veröffentlichten Resultaten für manchen Geometer, so namentlich auch für Clebsch, von der höchsten Anregung gewesen sind, haben leider auf die englischen Arbeiten zu wenig Rücksicht genommen, so dass manche der merkwürdigen Ergebnisse, die Steiner publicirte, von den englischen Forschern schon lange anticipirt waren. Andererseits hatten die Untersuchungen über Invariantentheorie, wie sie in jener Zeit durch Hermite und Brioschi angestellt wurden, eine zu wenig geometrische Form, um unmittelbar für die Geometrie von Wichtigkeit zu sein.

So ungefähr waren die verschiedenen Entwickelungsphasen geometrisch-algebraischer Kenntniss auf einander gefolgt, als sich Clebsch

*) Uebrigens besitzen die ersten englischen Arbeiten nicht diejenige analytische Eleganz, welche bereits in Hesse's Untersuchungen entwickelt war.

der Geometrie zuwandte. Schon früher einmal (Borch. J. Bd. 53. 1855) hatte er in einer seiner ersten Arbeiten ein geometrisches Thema berührt. Dasselbe bezieht sich auf das von Steiner auf Flächen zweiten Grades übertragene Malfatti'sche Problem, insbesondere auf eine von Cayley gegebene algebraische Auflösung desselben, von der Clebsch zeigt, dass sie sich mit Hülfe der elliptischen Functionen sehr einfach darstellen lasse. Es ist sehr merkwürdig, dass Clebsch mit dieser Arbeit einen Gedanken berührte, dessen spätere, allerdings in ganz anderer Richtung liegende Ausführung zu seinen grössten Verdiensten gehört: den Gedanken, die Theorie der höheren Transcendenten für neuere Geometrie zu verwerthen.

Wie soeben die Entwickelung der Geometrie geschildert wurde, war es natürlich, dass Clebsch an die Arbeiten der englischen Geometer anknüpfte. Wie sie stellt er, hierin über Hesse hinausgehend, die Probleme sofort in homogenen Coordinaten, die nur als Verhältnisszahlen definirt sind *). Dabei wird nicht nur als irrelevant betrachtet, wie in diesen Coordinaten die Gleichung der unendlich fernen Ebene gestaltet ist, sondern es wird auch die Frage unberührt gelassen (oder doch als von secundärer Wichtigkeit angesehen), ob man es mit reellen oder mit complexen Gebilden zu thun hat. Das algebraische Instrument, dessen sich Clebsch in seinen ersten Untersuchungen mit Vorliebe bedient (und hierin lehnt er sich an Hesse an), ist der Determinantenmultiplicationssatz in seiner Anwendung auf geränderte Determinanten. Erwähnen wir zunächst der eben auch mit Rücksicht hierauf sehr wichtigen Arbeiten über allgemeine Theorie der algebraischen Curven und Flächen. Es sind damit solche Arbeiten gemeint, welche in Anlehnung an die projectivische Anschauungsweise die allgemeinen Curven oder Flächen einer gegebenen Ordnung zum Gegenstande ihrer Untersuchung haben. Dieselben stehen in der engsten Beziehung zu den Problemen der Invariantentheorie linearer Substitutionen; dagegen sind sie wohl zu unterscheiden von anderen Betrachtungen, deren wir weiter unten zu gedenken haben, welche eine Curve oder Fläche als Ausdruck einer algebraischen Irrationalität auffassen und nach den Eigenthümlichkeiten fragen, die bei beliebiger eindeutiger Transformation erhalten bleiben.

Das erste Problem der allgemeinen Flächentheorie, mit dem sich Clebsch beschäftigt hat, betrifft diejenigen Punkte einer algebraischen Fläche der n^{ten} Ordnung, in denen dieselbe von einer Geraden vier-

*) Dem widerspricht nicht, wenn Clebsch in seinen Arbeiten, wo Differentiale der Coordinaten in Betracht kommen, gelegentlich eine nicht homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten voraussetzt. Dieselbe bezweckt dann nur eine symmetrische Durchführung von Eliminationsprocessen; die Werthe der in ihr vorkommenden Constanten sind gleichgültig.

punktig berührt wird (Zur Theorie der algebr. Flächen. Borch. J. Bd. 58. März 1860). Bereits Salmon hatte (Cambridge a. Dublin Math. J. t. IV. 1849) den Grad der von solchen Punkten gebildeten Curve zu $11n - 24$ durch Abzählung gefunden, er hatte auch (Quarterly J. t. I. 1857) die Gleichung einer Fläche construirt, welche diese Curve aus der gegebenen Fläche ausschneidet. Aber diese Gleichung erscheint bei ihm in einer ziemlich unübersichtlichen Form, und es ist das Verdienst der Clebsch'schen Arbeit*), das einfache Bildungsgesetz derselben aufgedeckt zu haben. Clebsch gelangt dahin durch Entwickelung einer allgemeinen Methode, die gestattet, das Resultat der Elimination von n homogen vorkommenden Unbekannten, die an $(n-2)$ lineare Gleichungen, eine quadratische Gleichung und eine Gleichung beliebigen Grades geknüpft wird, in fertiger Form hinzuschreiben. Die Methode besteht ganz allgemein gesagt darin, die quadratische Gleichung mit Hülfe der $(n-2)$ linearen in zwei Factoren aufzulösen, welche im Schlussresultate symmetrisch vereinigt auftreten und also keine Irrationalität mit sich führen (vergl. auch Clebsch's Theorie der binären Formen § 27.). Die Resultante erscheint dabei — und darauf legte Clebsch besondern Werth — nicht als unübersichtliches Coëfficientenaggregat, sondern in durchsichtiger Weise aus gesetzmässig erzeugten Bildungen aufgebaut.

Clebsch hat von dieser Eliminationsmethode eine Anzahl weiterer geometrischer Anwendungen gegeben. Es gehört dahin die Arbeit über die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung**) (Borch. J. Bd. 58. April 1860), dann namentlich der Aufsatz über ein Classe von Eliminationsproblemen etc. (ebenda Bd. 58. Juni 1860), wie endlich die inhaltreiche Abhandlung über Curven vierter Ordnung (Bd. 59. Sept. 1860). Letztere mag in der Absicht entstanden sein, für eine dereinstige durchgreifende Behandlung dieser Curven vorläufiges Material zu sammeln, an dem es noch sehr fehlt. Hatten sich die Untersuchungen Hesse's und Steiner's mit den merkwürdigen Gruppirungen beschäftigt, welche die 28 von Plücker zuerst gefundenen Doppeltangenten besitzen, so geht Clebsch mit seiner Arbeit nach einer anderen Richtung, indem er die Eigenschaften der cubischen Polarcurven zu erforschen strebt, welche die Curve vierter Ordnung

---

*) Clebsch's Arbeit ist vom 11. März 1860 datirt. Den 14. Juni desselben Jahres hat Salmon der Royal Society in einer Abhandlung über ternäre cubische Formen dasselbe Resultat ohne Beweis mitgetheilt (vergl. Phil. Transactions 1870). Später hat Gordan dasselbe unter consequenter Anwendung der symbolischen Bezeichnung auf kürzerem Wege abgeleitet (Schlömilch's Zeitschrift. Bd. 12 1867).

**) Das dort abgeleitete Produkt der 9 Wendetangenten war vorher von Salmon ohne Beweis angegeben worden (Higher Algebra 1. ed. p. 116).

den Punkten der Ebene zuordnet. Eine besondere Rolle spielt hierbei die Hesse'sche Curve der jedesmaligen ersten Polare, die Polardeterminante, wie Clebsch sie nennt, welche für unendlich viele Punkte der Ebene in ein Dreieck ausartet. Die Pole dieser Dreiecke bilden eine neue Curve der vierten Ordnung, deren Gleichung in ähnlicher Weise aus den dritten Differentialquotienten der gegebenen Form zusammengesetzt ist, wie die erste Invariante einer cubischen Form aus deren Coëfficienten. Eine Reihe von schönen Sätzen erläutert die Beziehungen zwischen den Polardeterminanten und ihren Polen, sowie die merkwürdige Reciprocität zwischen diesen und den Ecken der Polardeterminantendreiecke, welche selbst jene neue Curve vierter Ordnung beschreiben.

Unter den Formen, auf welche die Untersuchung der hierbei auftretenden Curven führt, ist eine Invariante sechsten Grades, obwohl nicht die einfachste überhaupt, dadurch merkwürdig, dass sie verschwindet, wie Clebsch zeigt, wenn sich die Gleichung der Curve vierter Ordnung als Summe von fünf vierten Potenzen schreiben lässt*). Dieser Umstand gibt ein merkwürdiges Beispiel für die Unmöglichkeit einer Umformung, deren Möglichkeit nach einem ersten Constantenzählen zu erwarten schien (vergl. hierzu Clebsch's Gedächtnissrede auf Plücker p. 23). In ihm lag wohl für Clebsch die erste Veranlassung sich mit dem Pentaeder der Flächen dritter Ordnung und der auf dasselbe gegründeten Umformung ihrer Gleichung in die Summe von fünf Cuben zu beschäftigen, insofern ihm die Begründung der betreffenden kanonischen Form aus dem blossen Uebereinstimmen der Zahl der Constanten nicht genügen konnte. Das Pentaedertheorem musste ihn umsomehr interessiren, als sich die Sätze über die 27 Geraden der Flächen dritter Ordnung als Corollare der allgemeinen Theoreme auffassen liessen, die Clebsch für die vierpunktige Berührung einer Geraden mit einer Fläche entwickelt hatte: es galt nun, bei den Flächen n^{ter} Ordnung auch solche Beziehungen nachzuweisen, wie sie bei den Flächen dritter Ordnung durch die Existenz des Pentaeders gegeben sind.

Die Flächen dritter Ordnung sind erst in verhältnissmässig neuer Zeit Untersuchungsgegenstand geworden. Im Jahre 1849 erschien eine Arbeit von Cayley über dieselben, in der er die Existenz der 27 Geraden, welche auf der Fläche liegen, nachwies, worauf er denn, in Verbindung mit Salmon, rasch eine Deduction der Haupteigenschaften der Fläche gab, welche sich an diese Geraden anschliessen (Cambridge and Dublin Math. J. t. IV). Bald darauf entdeckte Syl-

*) Diese merkwürdigen Curven sind später von Lüroth näher untersucht worden (Math. Ann. Bd. I).

vester, ausgehend von algebraischen Betrachtungen, das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung und dessen Beziehungen zur Hesse'schen Fläche (ebenda. t. VI. 1851). Mit diesen beiden Entdeckungen sind die Hauptmomente gegeben, um welche sich noch jetzt die Untersuchung der Flächen dritter Ordnung dreht, und es mag betont werden, was Clebsch gern hervorhob, dass es seither noch nicht gelungen ist, die beiden Richtungen der Untersuchung in eine einfache Verbindung zu setzen *). Die Theorie der 27 Geraden machte durch die Grassmann'schen und Steiner'schen Betrachtungen über die Erzeugung der Flächen dritter Ordnung einen wesentlichen Fortschritt, vermöge dessen weiterhin die Abbildung der Flächen dritter Ordnung auf die Ebene und damit ein einfaches Mittel zum Studium dieser Verhältnisse gefunden wurde; sie wurde ferner in den Händen von Schläfli das Instrument für eine Eintheilung der Flächen dritter Ordnung in Arten. Die Theorie des Pentaeders dagegen ist in ihrer Bedeutung für die Geometrie der Flächen dritter Ordnung bis jetzt relativ unentwickelt geblieben.

Sylvester hatte seine Sätze über das Pentaeder ohne Beweis publicirt. Fünf Jahre später gab Steiner in seiner viel genannten Abhandlung über Flächen dritten Grades (Crelle's J. Bd. 53. 1856) neben manchen anderen eben auch diese Sätze, aber, wie er damals pflegte, ohne Beweis oder auch nur Andeutung eines solchen. Clebsch unternahm es daher, einen Beweis für die Pentaedersätze zu entwerfen. Nach einer ersten vorläufigen Mittheilung (Borch. J. Bd. 58. März 1860), in der er, von der Existenz des Pentaeders ausgehend, dessen Beziehungen zur Hesse'schen Fläche darlegte und die Schritte auseinandersetzte, die im Sinne der Invariantentheorie nothwendig sind, um die Gleichung fünften Grades zu bilden, von der die Bestimmung der fünf Pentaederebenen abhängen muss **), zeigt er in einer grösseren Abhandlung (Borch. J. Bd. 59. Febr. 1861), dass die Existenz des Pentaeders mit den in seine Ecken fallenden Knotenpunkten der Hesse'schen Fläche aus einem allgemeinen Satze über die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche einer Fläche n^{ter} Ordnung hervorgeht. Der Beweis dieses Satzes, den man übrigens in manchen Punkten ver-

*) Für eine besondere Fläche dritter Ordnung, die von ihm sogenannte Diagonalfläche, hat Clebsch einen Zusammenhang zwischen den beiden Problemen nachgewiesen (Math. Ann. Bd. IV. Zur Theorie des Fünfseits etc.) und im Anschlusse hieran hat Klein eine Methode gefunden, bei den Flächen mit 27 reellen Geraden die Ebenen des Pentaeders näherungsweise zu construiren (Berichte der Erlanger phys. med. Societät. Juni 1873).

**) In der bereits genannten Arbeit über quaternäre cubische Formen (Juni 1860) publicirte Salmon ähnliche Resultate. Ein Irrthum, der sich in der bez. Arbeit von Clebsch findet und aus dem Uebersehen der Invarianten ungeraden Charakters entstanden war, ist in Salmon's Arbeit vermieden.

vollständigt wünschen mag, kommt darauf hinaus, die Zahl der gemeinsamen Schnittpunkte aller derjenigen Flächen zu bestimmen, welche durch die gleich Null gesetzten Unterdeterminanten der Hesse'schen Fläche repräsentirt werden, und ist seitdem für ähnliche Abzählungsaufgaben von Wichtigkeit geworden. Diese Punkte sind bei den Flächen dritter Ordnung, wie bekannt, in der Zahl 10 vorhanden und bilden eben die Ecken des Pentaeders. Clebsch erörtert ausführlich die hierin liegende Eigenthümlichkeit der betr. Gleichung 10^{ten} Grades, bei der jedesmal gewisse Paare von Wurzeln eine dritte Wurzel rational bestimmen, und die desshalb durch eine Gleichung fünften Grades lösbar ist. Ueberdies ist die Arbeit von Clebsch durch die wiederholte Anwendung der symbolischen Bezeichnung interessant, die später von Clebsch mit Consequenz gebraucht wurde *).

Es sei ferner der Abhandlung von Clebsch über das Normalenproblem bei Curven und Flächen zweiten Grades gedacht (Borch. J. Bd. 62. Jan. 1862). Sie ist ein musterhaftes Beispiel für die Behandlung metrischer Probleme im Sinne der neueren projectivischen Anschauung. Die metrische Beziehung des Senkrechtstehens wird nach dem Vorgange von Cayley durch eine Polarbeziehung zu einem beliebig gegebenen Kegelschnitte resp. einer beliebigen Fläche zweiten Grades ersetzt (was übrigens bei Gebilden zweiten Grades keine Verallgemeinerung des Resultats in projectivischem Sinne begründet), und die ganze Aufgabe tritt dadurch in den Kreis derjenigen, welche sich auf das simultane System zweier quadratischer Formen (mit beliebig vielen Veränderlichen) beziehen. Der Unterschied des Reellen und Imaginären, auf den Joachimsthal in seiner bekannten Abhandlung über dasselbe Problem (Crelles J. Bd. 59.) besonders eingeht, wird nicht berührt; dagegen concentrirt sich die Untersuchung darauf, die Orte der Punkte zu erforschen, für welche zwei oder drei oder zweimalzwei etc. Lösungen des Problems zusammenfallen. So bringt denn die Abhandlung eine Fülle neuer Sätze über die interessante Krümmungscentrafläche der Flächen zweiten Grades **).

*) Entsprechend der inzwischen erreichten Vervollkommnung der algebraischen Methoden, hat Gordan im fünften Bande der math. Annalen die Clebsch'sche Untersuchung unter fortwährender Anwendung des symbolischen Apparates strenger durchgeführt und eine Anzahl interessanter Formenbildungen (z. B. das schon von Salmon ohne Beweis angegebene Product der fünf Pentaederebenen) hinzugefügt. Andererseits brachten die Preisarbeiten von Cremona und Sturm rein geometrische Beweise für die Existenz des Pentaeders.

**) Beinahe gleichzeitig erschien in den Berl. Monatsberichten eine Arbeit über diese Fläche von Kummer, der ein Modell derselben construirt hatte (Juni 1862). Bei Clebsch wie bei Kummer wird der alte Irrthum, der sich noch in Liouville's Ausgabe von Monge findet, als könne eine Centrafläche im Allgemeinen keine Doppelcurve haben, corrigirt.

Von der grossen Zahl von Arbeiten, die Clebsch im Zusammenhange mit den nun besprochenen vollendete, erwähnen wir noch einzelne. Es gelang Clebsch nach wiederholten Versuchen, die Zahl der Doppelpunkte der Curve vierpunktiger Berührung auf den Flächen n^{ter} Ordnung zu bestimmen und sie als Durchschnitte eines Flächensystems von der Ordnung $(8n - 14)$ darzustellen (Zur Theorie der alg. Flächen. Borch. J. Bd. 63. Mai 1863). Eine besondere Anwendung davon ist die Darstellung der 135 Schnittpunkte der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung durch ein System von Flächen der 10^{ten} Ordnung. — In einem Aufsatze über die Wendungsberührebenen der Raumcurven (ebenda Sept. 1862) leitet Clebsch die Gleichung einer Fläche von der $(6m + 6n - 20)^{ten}$ Ordnung ab, welche die Durchschnittscurve zweier Flächen von der m^{ten} und bez. der n^{ten} Ordnung in ihren Wendepunkten trifft. — Wir erwähnen endlich der Arbeit „über einige von Steiner behandelte Curven“ (Borch. J. Bd. 64. Juli 1864), in der Clebsch zum ersten Male von dem kurz zuvor von ihm eingeführten Begriffe des Geschlechts einer Curve Gebrauch macht, um für die Singularitäten eindeutig auf einander bezogener Curven eine neue Bestimmungsgleichung zu besitzen.

Wir sind hiermit bis zu der Zeit gekommen, in der Clebsch durch Einführung der Abel'schen Functionen und der in ihnen entwickelten Betrachtungsweisen in die Geometrie der letzteren einen neuen, mächtigen Aufschwung ertheilte, der als eines der wichtigsten Verdienste erscheint, die mit dem Namen Clebsch verbunden bleiben werden. Die Veranlassung dazu war insofern eine äussere, als die ganze Richtung, welche Clebsch nunmehr mit seinen Arbeiten einschlägt, wesentlich durch den Umstand bestimmt wurde, dass sich um diese Zeit (Sommer 1863) Gordan in Giessen habilitirte, wohin Clebsch Ostern 1863 von Carlsruhe berufen worden war. Durch ihn wurde Clebsch mit den Abel'schen Functionen und insbesondere mit den damals noch verhältnissmässig neuen und wenig verbreiteten Riemann'schen Untersuchungen bekannt. Aber nicht nur in dieser einen Richtung, sondern nach vielen Seiten hin sollte der rege persönliche Verkehr, in den von nun ab die beiden Forscher traten, für ihre Thätigkeit wie für ihre Erfolge von der grössten Bedeutung sein. Es ist im Folgenden um so schwieriger, zu sondern, was dem Einen, was dem Anderen der Beiden gehört, als sie viele ihrer Arbeiten gemeinsam veröffentlicht haben. Auf Clebsch allein ist wohl zurückzuführen, was sich auf geometrische Deutung der gewonnenen algebraischen Resultate bezieht, während die Herleitung der letzteren vielfach Gordan zugefallen sein mag.

Die Veranlassung, die transcendenten Functionen mit der neueren Geometrie in Verbindung zu bringen, hatte für Clebsch zunächst ein

von Steiner ohne Beweis mitgetheilter Satz gebildet (vergl. Crelle's J. Bd. 33), der sich auf Polygone bezieht, welche sich einer Curve dritter Ordnung einbeschreiben lassen. Es gelang ihm (Borch. J. Bd. 63. Sept. 1863), einen einfachen und durchsichtigen Beweis zu finden, indem er von einer Darstellung der Coordinaten der Punkte einer solchen Curve durch elliptische Functionen eines Parameters ausging, die Aronhold in den Berliner Monatsberichten 1861 gegeben hatte (vergl. Aronhold's ausfürlichere Darstellung*) in Borch. J. Bd. 61). Der Beweis kommt einfach auf eine Anwendung des Additionstheorems der elliptischen Functionen hinaus, indem zwischen den oberen Grenzen von drei elliptischen Integralen erster Gattung, deren Summe gleich einer Constanten ist, die nämliche Beziehung besteht, wie zwischen den Abscissen der drei Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve dritter Ordnung, in deren Gleichung bloss das Quadrat der Ordinate auftritt. Vermöge dieser Bemerkung ist nicht nur der Steiner'sche Satz fast ohne Weiteres bewiesen, sondern es sind alle die merkwürdigen Theoreme, welche von Maclaurin, von Poncelet, von Plücker, Hesse und Steiner über die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, über die Tangenten derselben, die Berührungskegelschnitte u. s. w. aufgestellt worden sind, wie mit einem Schlage erledigt: sie sind auf die einfache Gleichung zurückgeführt, die aussagt, dass die Summe der zu den Schnittpunkten gehörigen Argumente bis auf Multipla zweier Perioden einer Constanten gleich sind.

Bald hernach erschien die grosse Abhandlung über die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie (Borch. J. Bd. 63. Oct. 1863), deren Principien in zwei weiteren Arbeiten: über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als rationale, bez. als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen (Borch. J. Bd. 64. Mai und October 1864), für die einfachsten Fälle ausführlicher verwerthet wurden.

Es liegt derselben der einfache Gedanke zu Grunde, dass man die Gleichung, welche Abel zur Definition der Irrationalität in den nach ihm benannten Integralen ansetzt, als Gleichung einer algebraischen Curve auffassen kann. Die Grenzen der Integrale, deren Summe nach Abel's Theorem gleich einer logarithmischen und einer algebraischen Function werden soll, sind dann durch die Coordinaten der Schnittpunkte der gegebenen Curve mit einer beweglichen bestimmt, und die Sätze über Schnittpunktsysteme, wie sie von geometrischer Seite her durch Plücker aufgestellt, durch Jacobi und Cayley entwickelt worden waren (vergl. Plücker's Theorie der algebraischen Curven,

*) Vergl. auch Brioschi in den Annali di Matematica, Serie I. t. 3. 1860, sowie Bemerkungen desselben in den Comptes Rendus 1863, 64.

Einleitung), sind nichts, als eine unmittelbare Folge des Abel'schen Theorems. Aber Abel's Theorem gibt mehr, als diese Sätze aussprechen; es gibt nicht nur die Zahl der Bedingungen zwischen den Schnittpunkten, sondern es gibt diese Bedingungen selbst in der möglichst durchsichtigen Form. Indem Clebsch die Schnittpunkte beliebig zusammenrücken, die schneidende Curve also in eine Berührungscurve übergehen liess, ergaben sich ihm eine Fülle von Sätzen über die Zahl solcher Berührungscurven, die zu einer gegebenen Curve gehören. Zugleich gestattete der Charakter der Relationen, von welchen die Bestimmung dieser Curven abhängt, ein Urtheil über die eigenthümliche Gruppirung der Lösungen, sowie über den Charakter der in dem entsprechenden algebraischen Probleme auftretenden Gleichungen. Es schliessen diese Sätze die mannigfachen Theoreme von Hesse und Steiner über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung als Corollare in sich*). Indess muss hier hervorgehoben werden, dass die von Clebsch betrachteten Berührungscurven wesentlich nur Contacte derselben Ordnung an den Stellen, in denen sie die gegebene Curve treffen, besitzen, hinsichtlich ihrer Allgemeinheit also hinter den von Jonquières (Borch. J. Bd. 66) und Cayley (Phil. Trans. Bd. 158) behandelten zurückstehen, welche die Anzahl der beliebigen Contactbedingungen unterworfenen Curven eines linearen Systems in eine Formel zusammenfassen.

Aber wir verdanken dem Clebsch'schen Aufsatze weiter ein fundamentales Eintheilungsprincip für algebraische Curven: das Geschlecht (deficiency bei Cayley). Dieser Begriff war nach seiner Bedeutung für Gleichungen zwischen zwei Variabeln zuerst von Riemann erkannt worden, seinen analytischen Eigenschaften nach aber auch Abel nicht fremd, der in seiner Preisschrift (Mémoires des savants étrangers. t. VII; die Arbeit wurde 1826 eingereicht, aber erst 1841 publicirt) die Frage nach der geringsten Zahl von Integralen gestellt hatte, auf die man eine Summe von Integralen mit gegebenen Grenzen zurückführen kann. Nach Clebsch gehören zu demselben Geschlechte alle diejenigen algebraischen (ebenen oder doppelt gekrümmten) Curven, welche einander derart zugeordnet werden können, dass jedem Punkte der einen nur ein Punkt der anderen entspricht und umgekehrt (wie z. B. Curve und Evolute), oder, was dasselbe ist, dass die eine Curve aus der anderen durch eindeutige Transformation abgeleitet werden kann (vergl. den Aufsatz von Clebsch: Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. Borch. J. Bd. 64. April 1864). Für eine gegebene Curve ist das Geschlecht eine Function ihrer Ordnung

*) In einer schönen Abhandlung im 66. Bande des Borchardt'schen Journals stellt Roch die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung durch die Abel'schen Functionen für $p = 3$ explicite dar und beweist hierdurch die bez. Theoreme von den Θ-Functionen ausgehend.

und der Zahl ihrer Doppel- und Rückkehrpunkte, andererseits ist es gleich der Classe der Abel'schen Functionen, durch welche die Coordinaten ihrer Punkte als Functionen eines Parameters darstellbar sind.

Mochte die Idee der geometrischen Interpretation des Geschlechtsbegriffs zu der Zeit, als Clebsch seine Abhandlung schrieb, auch sonst im Gefühle der mathematischen Welt gelegen haben und in besonderen Fällen auch wohl zum Ausdrucke gekommen sein (vergl. z. B. Schwarz: de superficiebus explicabilibus etc. Borch. J. Bd. 64), die Thatsache wird dadurch nicht geändert, dass Clebsch dieselbe zuerst allgemein aussprach und, was mehr ist, in ihrer Tragweite erkannte und nutzbar zu machen verstand. Seit jener Zeit ist der Geschlechtsbegriff in der Geometrie eingebürgert und wird von Synthetikern und Analytikern ununterschiedlich gebraucht. Es ist kein Zufall, wenn die allgemeinen auf algebraische Curven bezüglichen Abzählungsformeln sich durch Einführung desselben wesentlich vereinfachen; die oben erwähnte elegante Formel von Jonquières und Cayley für die Anzahl der Curven, die gegebenen Contactbedingungen genügen, sowie die Correspondenzformel für Punktsysteme auf einer Curve von höherem Geschlechte*) sind Beispiele dafür.

Der Satz von der Erhaltung des Geschlechts bei eindeutiger Transformation ist an und für sich ein algebraischer und verlangt als solcher einen directen (nicht auf die Betrachtung der Integrale gegründeten) algebraischen, oder, was bei der heutigen Ausbildung der Geometrie dasselbe sagen will, geometrischen Beweis**). Er gehört einem Gebiete an, das, seiner Entstehung nach eng mit der Theorie der Abel'schen Functionen verbunden, doch von demselben als etwas Selbständiges abgelöst werden muss: dem bis jetzt nur erst nach wenig Richtungen durchforschten Gebiete, welches überhaupt von den bleibenden Eigenschaften algebraischer Beziehungen bei beliebigen eindeutigen Transformationen handelt. Wir werden weiter unten noch von Untersuchungen zu berichten haben, die diesem Gebiete, soweit es sich um Functionen zweier Variabeln handelt, zuzuweisen sind (Theorie der Flächenabbildung); wir werden ferner Gelegenheit haben, von dem Verhältniss desselben zur eigentlich sogenannten Invariantentheorie zu reden. Hier sei nur der Untersuchungen gedacht, welche Clebsch und Gordan in ihrem sogleich ausführlicher zu besprechenden Werke über Abel'sche Functionen eben mit Rücksicht auf diesen Gesichtspunkt anstellen. Indem sie in dem dritten Abschnitte desselben das Problem der eindeutigen Transformationen

*) Diese Correspondenzformel ist eine Verallgemeinerung des Chasles'schen Correspondenzprincips, das sich bekanntlich nur auf rationale Gebilde einer Dimension bezieht. Sie ist 1866 von Cayley durch Induction gefunden und neuerdings von Brill (Math. Ann. Bd. VI, 1) bewiesen worden.

**) Der von Riemann gegebene Beweis gehört der Analysis situs an.

einer Curve algebraisch formuliren, gelingt ihnen der directe Beweis *) für die Erhaltung des Geschlechts vermöge eines subtilen Eliminationsprocesses, indem sie an Stelle einer identisch verschwindenden Resultante mit Hülfe der Variation der Constanten einen Ausdruck bilden, welcher dieselbe vertritt: ein Verfahren, das sich in anderen Aufgaben der Geometrie seitdem mehrfach als nützlich erwiesen hat. Sie untersuchen ferner die Frage nach den rationalen Functionen der Coordinaten, die man gleich den neuen Coordinaten zu setzen hat, damit die Ordnung der transformirten Curve eine möglichst niedrige wird. Hatte so Cayley die Ordnung auf die $(p+2)^{\text{te}}$ erniedrigt, (unter p das Geschlecht verstanden), so wird in dem Werke von Clebsch und Gordan für Curven mit nicht aussergewöhnlichen Singularitäten bereits die $(p+1)^{\text{te}}$ Ordnung angegeben und dem Geschlechte p eine Curve der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung als Normal-Curve zu Grunde gelegt **). Eine andere wichtige Frage aus der Lehre von den eindeutigen Transformationen wird von Clebsch und Gordan nur berührt: die Frage nach den Moduln, d. h. denjenigen Parametern einer Curve, welche bei beliebiger eindeutiger Transformation ungeändert bleiben, und die somit für diese eine ähnliche Bedeutung haben, wie absolute Invarianten für die linearen Transformationen. (Bei binären Formen existiren Invarianten für höhere Transformationen im Sinne der Moduln nicht, vergl. eine Arbeit von Clebsch in den Göttinger Abhandlungen Bd. 15. 1870.) Die von Riemann gegebene Bestimmung dieser Moduln beruht auf nicht rein algebraischen Betrachtungen. Eine Bestimmung auf algebraischem Wege ist auch bis zur Zeit noch nicht in befriedigender Weise erfolgt, wenn auch ein von Cayley gemachter Einwand sich inzwischen durch Betrachtung einer Anzahl von einzelnen Fällen ***) sowie durch neuere Untersuchungen von Cayley selbst (Math. Ann. Bd. 3) erledigt hat.

---

*) Cremona hat in seiner „Theorie der Oberflächen" einen einfachen geometrischen Beweis der Unveränderlichkeit des Geschlechts gegeben, indem er die drei Dimensionen des Raumes zu Hülfe nahm. Später haben, ohne aus der Ebene hinauszutreten, Bertini (Giornale di Mat. t. VII) und Zeuthen die Frage wieder aufgenommen, der Letztere, indem er von dem allgemeineren Falle einander mehrdeutig entsprechender Curven ausging. Vergl. auch eine Note von Brill und Nöther in den Göttinger Nachrichten 1873.

**) Diese Sätze gelten nur für Werthe von $p > 2$. — Riemann hat eine Normalform angegeben, welche die Variabeln einzeln im niedrigsten Grade enthält und somit, als Curve interpretirt, im Unendlichen zwei vielfache Punkte von halb so hoher Ordnung besitzt, als der Grad der Curve beträgt. — Neuere Betrachtungen haben gezeigt, dass, wenn p zwischen $3(i+2)$ und $3(i+1)$ liegt, die Normalcurve $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung immer in eine solche der $(p+1-i)^{\text{ten}}$ Ordnung transformirt werden kann, vergl. die bereits erwähnte Note von Brill und Nöther in den Gött. Nachrichten Febr. 1873.

***) Vergl. Cremona und Casorati „osservazioni etc." in den Rendiconti del

Hatte es Clebsch in den bis jetzt berührten Untersuchungen unternommen, die Theorie der Abel'schen Functionen für Geometrie fruchtbar zu machen, so stellte er sich nun, mit Gordan zusammen, die umgekehrte Aufgabe, die Geometrie für die Theorie der Abel'schen Functionen zu verwerthen. Ehe wir es unternehmen, von dem aus diesem Gedanken entsprungenen gemeinsamen Werke (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig. B. G. Teubner. 1866. dat. August 1866) Bericht zu erstatten, mögen einige Worte über den allgemeinen Entwickelungsgang der genannten Theorie vorausgeschickt werden. Es wird dies um so kürzer geschehen können, als nur wenige Disciplinen der Mathematik sich durch eine verhältnissmässig so geringe Zahl von Arbeiten einiger hervorragender Forscher in folgerichtigster und raschester Entwickelung bis zu der Höhe aufgeschwungen haben, auf der wir sie heute erblicken.

Die Theorie der Abel'schen Functionen leitet ihren Ursprung aus dem Umkehrprobleme der hyperelliptischen Integrale mit vier Periodicitätsmoduln her, welches Jacobi (vergl. Crelle's J. Bd. IX und XIII) in der Weise formulirt hatte, dass er zwei Summen von je zwei Integralen mit verschiedenen Grenzen bildete und die Frage nach der quadratischen Gleichung aufwarf, deren Wurzeln die oberen Grenzen sind. Diese Frage wurde unabhängig von Rosenhain (Mém. des savants étrangers. t. XI) und Göpel (Crelle's J. Bd. 35) beantwortet, indem sie beide die Bildungsweisen der Coëfficienten jener Gleichungen in gewissen doppelt unendlichen Reihen vermutheten, die der von den elliptischen Functionen her bekannten Function Θ ähnlich sind, und diese Vermuthung durch Rechnung bestätigten. Indessen war der Keim zu einer directen Lösung des Umkehrproblems auch für den Fall, dass n Summen von je n Integralen mit $2n$ Periodicitätsmoduln gegeben sind, deren obere Grenzen als Functionen dieser Summen dargestellt werden sollen, bereits in Jacobi's „Fundamenta nova" niedergelegt. Jacobi definirt bekanntlich die Θ-Function durch ein Integral zweiter Gattung, indem er den Differentialquotienten des Logarithmus der Θ-Function gleich der von ihm eingeführten Function Z setzt. Entsprechend hat nun Weierstrass (Crelle's J. Bd. 47, 52) n Integrale zweiter Gattung in der Weise definirt, dass sie partielle Differentialquotienten einer Function sind, welche alsdann die Stelle von Θ vertritt, und hat mit Hülfe dieser Function das Umkehrproblem für die allgemeinsten hyperelliptischen Integrale gelöst.

Der hiermit geschilderte Kreis von Betrachtungen sollte indess

---

Istituto Lombardo 1869, Brill, zwei Noten über die Moduln, Math. Ann. I und II, sowie id. ibd. Bd. VI, wo nachgewiesen wird, dass Transformationen existiren, durch die man die Curve in eine gewisse Normalcurve überführt, deren Constantenzahl mit der Zahl der Moduln übereinstimmt.

noch bedeutend erweitert werden. Bereits Abel hatte sein Theorem auf Integrale ausgedehnt, in denen an Stelle des Quadratwurzelausdrucks die allgemeinste algebraische Irrationalität getreten ist. Auch für solche Integralsummen liess sich das Umkehrproblem aufstellen. Lagen die Schwierigkeiten für den Fall der hyperelliptischen Functionen wesentlich in der analytischen Operation, die zum Theil nicht ohne langwierige Rechnung durchzuführen war, so musste für die Lösung des allgemeinen Umkehrproblems vor Allem ein neues Anschauungsgebiet geschaffen werden, in welchem die Integralsummen durch unzweifelhafte Darstellung des Integrationsweges eindeutig definirt werden konnten. Ein solches erfand Riemann in der nach ihm benannten Fläche, welche er über der complexen Ebene, dieselbe mehrfach überdeckend, construirte. Mit Hülfe dieser Fläche und des von ihm nach Dirichlet genannten Princips, vermöge dessen, ähnlich wie in der mathematischen Physik, eine Function durch gewisse Gränz- und Unstetigkeits-Bedingungen definirt wird, stellt Riemann in überraschender Weise Relationen zwischen transcendenten einerseits und algebraischen Functionen andererseits auf und gelangt so durch wenige Schlüsse zur Lösung des Umkehrproblems.

Gegen einige Punkte des kühnen und grossartigen Entwurfes von Riemann lassen sich indess Einwände erheben, welche zurückzuweisen mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verbunden war und auch heute noch nicht in jeder Hinsicht geglückt ist. Zunächst finden sich in dem Beweise des Dirichlet'schen Princips angreifbare Stellen; auf Functionen von so allgemeinem Charakter, wie sie Riemann annahm, ist der Beweis nicht ohne Weiteres anzuwenden.*) Ferner konnte man sich von der Gestalt der Riemann'schen Fläche, welche für die Abel'schen Transcendenten vermöge der ihr auferlegten Bedingungen noch nicht vollständig bestimmt ist, keine klare Vorstellung bilden.**) Endlich bemerkte man (vergl. Neumann's Vorlesungen über Riemann's Theorie etc. Vorrede), dass der Zusammenhang, in welchem die Θ-Function in der Riemann'schen Theorie auftritt, nicht so enge geknüpft ist, wie man dies wohl bei einem der wichtigsten Gliede der ganzen Theorie wünschen mochte.

*) Man vergl. u. A. Bemerkungen zum Dirichlet'schen Principe von Kronecker und Weierstrass, deren in einem Aufsatze von Heine in Borch. J. Bd. 71 Erwähnung geschieht.

**) Erst in neuester Zeit hat Lüroth eine gewisse Normalgestalt angegeben, auf welche die Fläche gebracht werden kann (Math. Ann. IV), und hierdurch die erwähnte Schwierigkeit beseitigt. In einer seiner letzten Arbeiten leitet Clebsch aus der Lüroth'schen Arbeit einige weitere Resultate ab, welche die Untersuchung des Abschnitts über Periodicität in dem weiter unten zu besprechenden Werk in einigen Punkten erweitern und vervollständigen (Math. Ann. Bd. VI).

Diess waren wohl die Hauptgesichtspunkte, welche Clebsch und Gordan eine neue Bearbeitung der Theorie der Abel'schen Functionen auf einer ganz anderen Basis als wünschenswerth erscheinen liessen. Die missliche Umgrenzung des Functionsbegriffs sollte, unter Rückgang auf die Jacobi'schen Methoden, durch engeren Anschluss an die algebraische Seite des Gegenstandes (vermittelst des Abel'schen Theorems) vermieden und ein directer Uebergang zur Θ-Function, in ähnlicher Weise, wie dies Weierstrass bei den hyperelliptischen Functionen gethan hatte*), ermöglicht werden.

Da dieser Weg unmittelbar zu den speciellen Theta's hinführte, welche den Abel'schen Functionen zugehören, so vermied er die Klippen, an welchen auch wohl noch heutzutage jeder Versuch scheitern muss, die Thetafunction zur alleinigen Grundlage einer Theorie der Abel'schen Functionen zu machen, so lange nämlich die Frage nach den Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln, von welcher Riemann im Eingange seiner Arbeit spricht, sowie die Frage nach den Thetarelationen ungelöst ist.

Es stellt sich dem Studium des Werkes von Clebsch und Gordan eine gewisse Schwierigkeit wegen der doppelten geometrischen Repräsentation der zu behandelnden Probleme entgegen, die auf den zwiefachen algebraischen und analytischen Charakter derselben zurückgeht und vielleicht auch mit der verschiedenen Denkweise der beiden Verfasser zusammenhängt. Für die Integrale einerseits konnte man die Repräsentation der Integrationswege auf der complexen Ebene, die Umgänge, Schleifen und Cyclen nach dem Vorgange von Puiseux, wie sie sich in dem Werke von Briot und Bouquet (1859) für die Untersuchung der doppelt periodischen Functionen so werthvoll erwiesen hatten, in keiner Weise entbehren. Für die algebraische Function andererseits gewährte die Bezeichnung: „Curvengleichung" statt „Gleichung zwischen zwei Variabeln", „Schnittpunktsystem", „Doppel- und Rückkehrpunkt" statt der entsprechenden schwerfälligen algebraischen Ausdrücke eine ungleich grössere Beweglichkeit, als sie Riemann in dieser Hinsicht zu Gebote stand. Wenn man bedenkt, welche Vortheile eine nur geringfügig scheinende Abkürzung der Gedankenentwickelung gewähren kann, so schreibt man vielleicht manche der algebraischen Resultate der Abschnitte über Theilung, die sich bei Riemann nicht finden, wie überhaupt die glückliche Lösung des Umkehrproblems auf dem geschilderten Wege auf Rechnung dieser geometrischen Ausdrucksweise.

---

*) Leider ist von den ausgedehnten Untersuchungen, welche Weierstrass über die Abel'schen Functionen angestellt hat, ausser einer kurzen Notiz in den Berliner Monatsberichten (1869), die von den allgemeinsten eindeutigen $2n$-fach periodischen Functionen handelt, nichts Näheres im Zusammenhange bekannt geworden.

Nachdem aber einmal die Curve in die Sprache des Werkes aufgenommen war, entsprach es einer symmetrischen Darstellungsweise, weiter auch die in der analytischen Geometrie längst als vortheilhaft erkannte Homogenität der Curvengleichung einzuführen. Es wird dadurch der Anschauungsweise, welche bei einer algebraischen Function nur auf solche Eigenschaften achten will, die bei eindeutigen Umformungen ungeändert bleiben, wenigstens insoweit Ausdruck gegeben, als die Gleichberechtigung aller Gestalten, welche die Function bei linearer Transformation annehmen kann, von vorne herein ersichtlich ist. Dementsprechend bewirkt der scheinbare Ballast, der durch die dritte Variable hineingebracht wird, eine Glätte und Uebersichtlichkeit der Darstellung, deren Vorzüge selbst durch den Umstand nicht in Schatten gestellt werden, dass die vollkommene Symmetrie den Gedankengang gelegentlich einhüllt.

Diese Einführung der homogenen Coordinaten bedingte die Umgestaltung der Form der Integrale in einer Weise, wie sie von Aronhold in der bereits oben erwähnten nach Darstellung und Inhalt gleich eleganten Arbeit im Borchardt'schen Journale Bd. 61 gegeben worden war. Unter Zugrundelegung dieser Form gestaltet sich die logarithmische und algebraische Function des Abel'schen Theorems überraschend einfach, besonders im Vergleiche mit dem von Abel selbst in seiner Preisschrift gegebenen Ausdrucke.

Das Abel'sche Theorem bildet die natürliche Brücke zwischen dem transcendenten und dem algebraischen Charakter der Theorie.*) Indem die Verfasser es unternehmen, im Anschlusse an den von Weierstrass eingeschlagenen Weg, von den Integralen aus einen Uebergang zu der Gleichung für die oberen Grenzen durch Vermittelung von Integralen zweiter Gattung zu finden, benutzen sie das Abel'sche Theorem für Integrale dritter Gattung. Die Coefficienten der entstehenden Gleichung enthalten indess noch gewisse Summen T von Integralen dritter Gattung, die erst zerfällt werden müssen in eben solche Summen U mit getrennten Unstetigkeitspunkten. Diese Untersuchung, geführt an der Hand der beiden erwähnten geometrischen Repräsentationen, bildet den Schwerpunkt des Werkes und gipfelt ihrerseits in der Darstellung des Differentials jener Function U, deren partielle Differentialquotienten aus Integralen zweiter Gat-

*) Der vorzugsweise algebraische Charakter des Abel'schen Theorems geht insbesondere aus neueren Untersuchungen über algebraische Functionen hervor, vermöge deren gewisse fundamentale Sätze, welche Riemann und Roch aus der Betrachtung von Integralen zweiter Gattung und dem Verschwinden der Θ-Function abgeleitet hatten, auf algebraischem Wege bewiesen und der Theorie der algebraischen Functionen organisch eingefügt wurden. Vergl. die Note von Brill und Nöther, Gött. Nachr. Februar 1873.

tung bestehen, welche durch Differentiation gewisser specieller Functionen T gebildet werden. Die Verfasser finden schliesslich, dass jene Function U alle Eigenschaften des Logarithmus einer Θ-Function, wie diese von Riemann definirt worden war, besitzt, deren Monodromie nicht ausgeschlossen. Bei diesem Anlass wird jener Begriff, den man bisher nur für Functionen von zwei Variabeln kannte, für solche von p Variabeln dahin festgestellt, dass eine Function, bei Eindeutigkeit im Allgemeinen, nicht aufhört, monodrom zu sein, wenn sie in einem Gebiete von $(p-2)$ Dimensionen unbestimmt wird.

Bemerkenswerth ist dabei die eigenthümliche Wahl der Argumente der Θ-Function. Sind bei Riemann die unteren Grenzen der Integrale, aus denen sich die Argumente zusammensetzen, für die Integrale gleichgebildeter Differentialausdrücke dieselben, dagegen für verschieden gestaltete verschieden, so verhalten sich die Festsetzungen von Clebsch und Gordan gerade umgekehrt. Die Verfasser entnehmen nämlich ihr System von unteren Grenzen den Berührungspunkten von gewissen zerfallenden Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von der Lage nur eines (übrigens schliesslich indifferenten) Punktes abhängen. Die Vorzüge dieser Bestimmungsweise sind neuerdings von Weber bei Gelegenheit des Umkehrproblems (Borch. J. Bd. 70) und von Fuchs in Anwendungen hervorgehoben worden (Borch. J. Bd. 73).

Wir gedenken hier ferner des Capitels, das von der Transformation der Θ-Function handelt. Substituirt man für ein System von Periodicitätsmoduln von Normalintegralen erster Gattung, wie sie in dem Clebsch-Gordan'schen Werke in dem Abschnitte über „Periodicität" durch die Puiseux'schen Methoden hergestellt worden sind, ein ebensolches anderes, so tritt eine Transformationsdeterminante mit besonderen Eigenschaften auf, deren Werth für diesen Fall, dessen Behandlung Jacobi die Theorie der unendlich vielen Formen der Function Θ nannte, sich auf Eins reducirt (Transformation erster Ordnung). Das allgemeinere Jacobi'sche Problem der Transformation der elliptischen Functionen hatte Hermite in seiner berühmten Abhandlung: sur la transformation des fonctions abéliennes (Comptes Rendus Bd. 55) für die ultraelliptischen durchgeführt, während ein von Abel gestelltes Transformationsproblem (oeuvres I. Nr. XIV. p. 275) von Königsberger Borch. J. Bd. 65 auf ultraelliptische Functionen übertragen worden war. In dem Abschnitte über die unendlich vielen Formen der Function Θ beschäftigen sich nun Clebsch und Gordan mit der Transformation erster Ordnung der Abel'schen Functionen überhaupt, indem sie die mit der Transformation der Periodicitätsmoduln verbundene Aenderung der Integrale und der Θ-Function untersuchen, und eine für die Transformation der letzteren wesentliche Constantenbestimmung in derselben Weise, wie dies Kronecker gethan (Monatsber. der Berl. Akad.

Oct. 1866), durch Zurückführung der Transformation auf gewisse Elementartransformationen ausführen. Dieselbe Aufgabe behandelten Thomae (Dissertation, Halle 1864) und neuerdings, mittelst Summation mehrfacher Gaussischer Reihen, Weber (Borch. J. Bd. 74).

Die Verfasser betrachten endlich noch die Theilung der Abel-schen Functionen. Man hatte dieselbe bis dahin nur für elliptische Functionen und, nach den Untersuchungen von Hermite, für hyperelliptische Functionen gekannt. Clebsch und Gordan zeigen, dass die für die elliptischen Functionen aufgestellten Sätze nicht nur auf die hyperelliptischen, sondern, mit geringen Aenderungen, auf die Abel'schen Functionen überhaupt übertragen werden können. Wie bei den elliptischen Functionen ist das allgemeine Problem durch Wurzelziehen zu lösen, wenn man das sogenannte specielle Theilungsproblem als gelöst voraussetzt. Die cyclischen Functionen der allgemeinen Theilungsgleichung werden nämlich unter Adjunction der Wurzeln des speciellen rational durch die Coefficienten ausdrückbar; man hat somit eine „Abel'sche" Gleichung. Das specielle Theilungsproblem seinerseits führt zu einer Gleichung, die in Folge besonderer Eigenthümlichkeiten auf eine Gleichung niederen Grades und mehrere reine Gleichungen reducirt werden kann, aber diese niedere Gleichung ist nicht mehr algebraisch lösbar.

Noch sei des sogenannten „erweiterten Umkehrproblems" gedacht, das Clebsch und Gordan in ihrem Buche aufstellen. Dasselbe war bereits in Clebsch's oben genanntem Aufsatze: über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen (Borch. J. Bd. 64), für elliptische Functionen formulirt worden und hat dort den folgenden Inhalt. Es sind $m-1$ Summen von je m Integralen dritter Gattung und eine Summe von m Integralen erster Gattung gegeben; man soll eine Gleichung m^{ten} Grades aufstellen, deren Wurzeln die in jenen Integralen auftretenden oberen Grenzen sind. Die oberen Grenzen sind dadurch als $(m+1)$-fach periodische Functionen definirt; die Erledigung des Problems lässt sich indessen, wie Clebsch zeigt, auf das gewöhnliche Umkehrproblem zurückführen. Aehnlich gestalten sich die bez. Verhältnisse bei den Abel'schen Functionen.

Die vorstehenden Erörterungen werden zur Genüge gezeigt haben, dass die Theorie der Abel'schen Functionen, wie sie aus Riemann's Händen hervorging, zwei heterogene Bestandtheile umschloss: einen analytischen und einen algebraischen. Die Bestrebungen der späteren Bearbeiter der Theorie waren übereinstimmend darauf gerichtet, bei weitergehender Erforschung der einzelnen Probleme eine grössere Gleichmässigkeit des Ganzen durch Bevorzugung der einen oder anderen Art von Betrachtung herbeizuführen. Clebsch und Gordan

ihrerseits erwarteten, wie sie in der Vorrede zu ihrem gemeinsamen Werke ausdrücklich hervorheben, die weiteren Fortschritte wesentlich von der Ausbildung der algebraischen Methoden. Es ist daher nicht zufällig, wenn sich beide seitdem ausschliesslich mit algebraischen (resp. geometrischen) Untersuchungen beschäftigten.

Dieselben gehen bei Clebsch nach zweierlei Richtungen. Sie betreffen einmal die Lehre von der eindeutigen Transformation, andererseits die Theorie der Invarianten bei linearen Substitutionen.

In dem Werke über Abel'sche Functionen waren nur Curven hinsichtlich ihrer bei eindeutigen Transformationen bleibenden Eigenschaften untersucht worden. Clebsch dehnt fortan die bez. Untersuchungen auf Gebilde zweiter Stufe aus, er wendet sich, wie man sich seitdem ausdrückt, zum Studium der Flächenabbildung. Wenn dieselbe naturgemäss als Erweiterung der Riemann'schen Untersuchungen erwachsen musste, wenn andererseits auf sie bezügliche geometrische Betrachtungen vereinzelt wiederholt aufgetreten waren, so ist es doch Clebsch, der durch seine eigenen stetig fortgesetzten Arbeiten, wie durch die mächtige von ihm ausgehende Anregung, aus ihr diejenige geschlossene Disciplin gemacht hat, als welche wir sie heute erblicken. — Die Untersuchungen über Invariantentheorie, mit denen sich Clebsch gleichzeitig beschäftigte, können erst weiter unten ihre Besprechung finden. Clebsch dachte sich das Verhältniss der beiden Disciplinen in der Weise, dass er die Invariantentheorie linearer Substitutionen als nothwendige Vorstufe der allgemeineren Ueberlegungen betrachtete, die sich an eindeutige Transformationen überhaupt anknüpfen. Wir werden im Folgenden noch die bis jetzt allerdings erst kleine Reihe von Untersuchungen zu berühren haben, welche eine Verwirklichung dieses Gedankens anbahnen. —

Es wurde bereits oben des Unterschiedes gedacht, der die Theorie der Flächenabbildung von derjenigen Theorie der algebraischen Flächen scheidet, die sich an die Polarentheorie anschliesst und ihren algebraischen Ausdruck unmittelbar in den einfachsten Bildungen der linearen Invariantentheorie findet. Auch wird man zwischen ihr und der Theorie der conformen Abbildung von Fläche auf Fläche oder gar der von Gauss gegründeten Theorie der auf einander abwickelbaren Flächen keinen nahen Zusammenhang aufstellen wollen. Die neue Abbildungstheorie erachtet alle Flächen als äquivalent, welche durch eindeutige Transformation in einander übergeführt werden können; sie erblickt in einer Fläche das Bild einer algebraischen Function zweier Variabeln, und richtet ihr Augenmerk darauf, wie viel von den Eigenschaften dieser Function bei beliebiger eindeutiger Umformung erhalten bleibt. Von geometrischer Seite entspricht dieser Auffassung, wenigstens in mancher Beziehung, die Betrachtung der Er-

zeugung der Fläche durch andere Raumgebilde, deren Parameter die Punkte der Fläche eindeutig bestimmen und somit ein Coordinatensystem der Fläche liefern; und man wird als Vorläufer der Flächenabbildung eine Reihe geometrischer Arbeiten betrachten können, die sich auf Erzeugung algebraischer Flächen beziehen.

Es sind hier vor Allem die Grassmann'schen und Steiner'schen Untersuchungen über die Flächen dritten Grades zu nennen (Crelle's J. Bd. 49, 53), die über das merkwürdige System ihrer Geraden nicht nur, sondern auch über die Lage ihrer Curven niederster Ordnung bereits Klarheit verschaffen.*) Ihnen schliessen sich die Untersuchungen Schläfli's, August's und Schröter's als Fortsetzungen und Erweiterungen an (1858, 62, 63). Weiterhin sind die Arbeiten Kummer's über Flächen vierter Ordnung, auf denen Schaaren von Kegelschnitten liegen, zu erwähnen (Berl. Monatsberichte. Juli 1863. Borch. J. Bd. 64). Die in denselben enthaltene Betrachtung der Steiner'schen Fläche vierter Ordnung mit drei sich in einem Punkte schneidenden Doppelgeraden gab Weierstrass (vergl. die Kummer'sche Arbeit) und Cayley (Borch. J. Bd. 64. 1864) Veranlassung, deren Coordinaten als quadratische Functionen zweier Parameter darzustellen, während andererseits Schröter (Berl. Monatsberichte Nov. 1863, Borch. J. 64) und Cremona (Borch. J. 63) dazu übergingen, eine Geometrie auf eben dieser Fläche zu ermitteln, ohne dass damals die Identität beider Betrachtungsweisen zum Bewusstsein oder doch der Uebergang von der einen zur anderen zur Darstellung gebracht wäre.

Nur für eine besonders einfache Fläche, die der zweiten Ordnung, hat man diesen Uebergang schon früh erfasst. Bereits 1847 hatte Plücker die Idee, das Netz, welches die beiden Systeme von Erzeugenden dieser Fläche bilden, zur Grundlage eines geradlinigen Coordinatensystems auf ihr zu machen (Crelle's J. Bd. 34). Zugleich wird von ihm diese Bestimmung der Punkte der Fläche durch die Parameter der beiden Systeme als identisch aufgefasst mit der Abbildung der Fläche auf die Ebene durch die schon 1828 von Chasles in allgemeiner Weise untersuchte stereographische Projection, — ein Gesichtspunkt, vermöge dessen er einzelne Sätze der Ebene auf die Fläche überträgt. Später (1861) entwickelte Chasles (Comptes Rendus t. 53), zu derselben Zeit, als Cayley (Phil. Magazine. Juli 1861)

*) Die allgemeinen Erzeugungsweisen aller algebraischen Gebilde, wie sie Grassmann in seiner Ausdehnungslehre gegeben und in einer Reihe von Aufsätzen in Crelle's Journal entwickelt hat, und die Grassmann's Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung als Corollar einschliessen, sind seither noch nicht von den Geometern weitergeführt worden; es muss der kommenden Zeit überlassen bleiben, deren Verhältniss zu den im Texte erwähnten Untersuchungen darzulegen.

auf diese Plücker'sche Darstellung und eine aus derselben abzuleitende Eintheilung der auf der Fläche liegenden Curven hinwies, unabhängig die Ideen Plücker's und Cayley's. Dabei führt er dieselben durch Aufstellung von Relationen zwischen den Parametern mit Hülfe seines Correspondenzprincips zu einer vollständigen Discussion der auf der Fläche gelegenen Curven durch. Schon kurz vorher hatte er (ebenda) eine ähnliche Methode auf die einfachsten geradlinigen Flächen mit einer mehrfachen Geraden rein geometrisch angewandt, indem er die Beziehung betrachtete, die durch eine Curve der Fläche zwischen zwei Ebenenbüscheln begründet wird, deren Axen die vielfache Gerade und eine Erzeugende der Fläche sind.

Um auch für höhere Flächen die Darstellung ihrer Coordinaten durch algebraische Functionen zweier Parameter als ein Mittel zum Studium ihrer Geometrie auffassen zu können und diese Darstellung selbst zu einem wichtigen Gegenstande der Forschung zu machen, war von algebraischer Seite der Durchgang durch die Begriffe und Methoden nöthig, welche in den Untersuchungen von Clebsch und Gordan über eindeutige Transformationen, deren wir oben bei den Abel'schen Functionen gedachten, ihre Ausbildung gefunden hatten. Bei ihnen entwickelte sich nicht nur jener Functionsbegriff auch für Flächen, sondern hauptsächlich auch die Methode, die zum Untersuchen der beim eindeutigen Entsprechen vorkommenden Singularitäten dient. Dabei war für die Curven der Zusammenhang zwischen diesem Standpunkte und dem der geometrischen Betrachtung ihrer Erzeugungsweise von vorneherein gegeben, so dass man, von den Curven ausgehend, bei den Flächen zu den entsprechenden Begriffsbildungen gelangen musste.

Aber auch von Seiten der rein geometrischen Forschung waren die Begriffe vorgerückt durch Ausbildung der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Man hatte sich lange Zeit darauf beschränkt, neben der projectivischen Verwandtschaft die einfachste eindeutige, die quadratische, zu betrachten, die gleichmässig für projectivische und metrische Geometrie wichtig schien.*) Aber in den Arbeiten Cremona's (Mem. dell' Accad. di Bologna Ser. 2. Bd. 2. 1863 u. bes. Bd. 5. 1864) gelangte bereits der allgemeine Begriff der eindeutigen Punktverwandtschaft in der Ebene zur Aufstellung und Entwickelung. Erst neuerdings wurde freilich (ziemlich gleichzeitig von Clifford, Nöther und Rosanes, vergl. Clebsch in den Math. An-

*) Es sei indess hervorgehoben, dass Magnus in der Vorrede zu seinen „Aufgaben über analytische Geometrie“ bereits darauf aufmerksam machte, dass sich durch Verknüpfung wiederholter quadratischer Transformationen höhere eindeutige Beziehungen ergeben (1837).

nalen Bd. IV. p. 490) der einfache Fundamentalsatz der Theorie gefunden: dass sich jede eindeutige Transformation der Ebene aus wiederholten quadratischen Transformationen zusammensetzen lässt.*)

Bei diesem Entwickelungsgange erklärt es sich, dass der eigentliche Beginn der Abbildungstheorie, die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung, durch ein nach Inhalt und Methode der Arbeiten vollständiges Zusammentreffen von Clebsch (Borch. J. Bd. 65. Oct. 1865) und Cremona bezeichnet ist (vergl. dessen 1866 von der Berliner Akademie gekrönte Arbeit in Borch. J. Bd. 68): ein merkwürdiges Beispiel dafür, wie sich in der Theorie der algebraischen Flächen die Objecte der Untersuchung sowohl, als auch die Begriffe, von denen man ausgeht, für die analytische und die synthetische Behandlung allmählich ganz ähnlich gestaltet hatten. Beide Forscher untersuchen die Abbildung der Flächen dritter Ordnung auf die Ebene und begründen dadurch eigentlich, was man „Geometrie auf der Fläche" nennt; bei beiden ist die Grundlage der Abbildung dieselbe: die Grassmann'sche Erzeugungsweise der Fläche durch projectivische Ebenenbündel. Für Clebsch wird die Abbildung ohne Weiteres durch die Formeln vermittelt, welche eben diese Erzeugungsweise darstellen. Bei Cremona wird zunächst eine Raumtransformation untersucht, die den Ebenen des Raumes Flächen dritter Ordnung mit einer gemeinsamen Curve sechster Ordnung zuordnet, eine Transformation, die im Grunde auf eine bereits von Hesse bei seinen Untersuchungen über Curven vierter Ordnung (Crelle J. Bd. 49) betrachtete Beziehung zurückkommt.

Was diese und die zunächst folgenden Arbeiten Clebsch's über Abbildungstheorie auszeichnet, ist die Methode, aus der Definition der die Abbildung bewirkenden Functionen allein die Geometrie der Fläche zu erschliessen. Die Verhältnisse auf der Fläche sind vollkommen bekannt, sowie das System ebener Curven gegeben ist, das, vermöge der Abbildung, den ebenen Schnitten der Fläche entspricht, und es bleibt zunächst unerörtert, wie diese Abbildung, wenn man die Fläche gegeben annimmt, gefunden werden kann.

Von dieser Methode hängt auch die Richtung ab, welche Clebsch mit seinen bez. Arbeiten zunächst einschlägt. Der mit den Specialitäten der ebenen Systeme zunehmenden Schwierigkeit entsprechend,

*) Die Verwerthung der quadratischen Transformation für metrische Probleme, welche an eine besondere Form derselben, die Transformation durch reciproke Radien, anknüpft, hat in neuerer Zeit eine principiellere Auffassung und allgemeine Benutzung gefunden (vergl. die Arbeiten der französischen Geometer Moutard, Laguerre, Darboux u. A., sowie Auseinandersetzungen von Lie und Klein in den Math. Ann. Bd. V). Aber diese Betrachtungen liegen den im Texte besprochenen doch verhältnissmässig fern.

behandelt Clebsch nach der Fläche dritter Ordnung die Steiner'sche Fläche und die geradlinige Fläche dritter Ordnung (Borch. J. Bd. 67. Juli 1866) und weiterhin eine merkwürdige unter den von Kummer betrachteten Flächen, die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt (Borch. J. Bd. 69. April 1868).

Aber schon bei der letztgenannten Arbeit und bei allen von ihm später in dieser Richtung untersuchten Flächen beschäftigt sich Clebsch auch mit der geometrischen Construction der Abbildung, nicht zum Zwecke ihres Studiums, sondern zum Beweise ihrer Möglichkeit. Die Betrachtungen, zu welchen er hierbei geführt wurde, gehören zu den schönsten und wichtigsten, welche die Abbildungstheorie ihm verdankt.

Der Nachweis der Abbildbarkeit einer Fläche auf die Ebene verlangt, auf der Fläche zwei lineare Systeme von einfach unendlich vielen Curven zu finden, die sich bezüglich nur in einem beweglichen Punkte schneiden. Es führt diese Aufgabe zu interessanten geometrischen Problemen, welche zu merkwürdigen algebraischen Gleichungen Anlass geben. So tritt bei den Flächen dritter Ordnung die Gleichung 27ten Grades auf, von deren Auflösung die Bestimmung der geraden Linien der Fläche abhängt. Bei der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt wird es nöthig, die 16 Geraden dieser Fläche zu kennen, die sich vermöge der von Kummer gefundenen fünf die Fläche doppelt berührenden Kegel zweiten Grades aus einer Gleichung fünften Grades und mehreren quadratischen Gleichungen*) bestimmten u. s. w.

Wenn der Nachweis zweier Curvensysteme der geforderten Art im Anschluss an die Clebsch'schen Arbeiten allgemein für solche Flächen gegeben werden konnte, auf welchen eines derselben bekannt ist (cf. Nöther in den math. Annalen Bd. III), so ist es Clebsch selbst gelungen, die hier auftretenden Gleichungen überhaupt zu charakterisiren und einen Zusammenhang derselben mit denjenigen Gleichungen zu entdecken, welche bei der Theilung der Abel'schen Functionen auftreten. (Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen etc. Math. Ann. Bd. III. Mai 1870.)

Er wurde dazu durch den Versuch geführt, die Flächen fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve vierter Ordnung erster Species auf die Ebene abzubilden (Gött. Abhandl. Bd. 15. Jan. 1870). Es handelte sich dabei, wie schon bei der von Clebsch früher (Math. Ann. Bd. I. p. 253 ff.) geleisteten Abbildung der Flächen vierter Ordnung mit

*) Vergl. die citirte Arbeit von Clebsch. Die 16 Geraden der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt wurden wohl zuerst von Darboux erkannt (Annales de l'Ecole Normale 1863), der in seinen allgemeinen Untersuchungen über Orthogonalsysteme die Flächen vierter Ordnung insbesondere betrachtete, welche den Kugelkreis doppelt enthalten.

Doppelgeraden, um die Aufgabe, auf der Fläche neben der von vorneherein erkennbaren Kegelschnittschaar gewisse isolirte Kegelschnitte nachzuweisen. Dieses Problem verlangte eine schwierige Abzählung (die später von Lüroth geleistet wurde, Math. Ann. Bd. III). Dagegen gestaltete sich die zweideutige Abbildung auf die Ebene, oder, wie Clebsch sagt, die Abbildung auf die Doppelebene, fast unmittelbar, indem man den Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die, durch die Doppelcurve hindurchgehend, die Kegelschnittschaar ausschneiden, mit einem Ebenenbüschel schnitt. Es entstand so die neue Aufgabe, die Doppelebene auf die neue Ebene zu übertragen, und diese Aufgabe kommt auf die Aufsuchung gewisser Berührungscurven der in der Doppelebene enthaltenen Uebergangscurve hinaus, was, wie oben erörtert, von einem Zweitheilungsprobleme der auf die Curve bezüglichen Abel'schen Functionen abhängt (die in dem Falle, von dem hier die Rede ist, hyperelliptische sind). Insbesondere beruht der von Clebsch am eingehendsten untersuchte Fall der Abbildung einer Doppelebene mit Uebergangscurve vierter Ordnung auf tiefliegenden Eigenschaften dieser Curven, die Aronhold aufgedeckt hat, indem er von 7 ihrer Doppeltangenten ausging (Berliner Monatsber. Juli 1864). Die entsprechende Methode hat bei allen bekannten Flächenabbildungen den nämlichen Erfolg*). Clebsch hat mit diesen Arbeiten ein neues, weites Gebiet eröffnet, das der analytischen wie der rein geometrischen Forschung zugänglich ist, auf dem aber bisher kaum einige weitere Schritte geschehen sind.

Die Möglichkeit der eindeutigen Beziehung zweier Flächen aufeinander hängt von einer Reihe bis jetzt noch nicht erledigter Fragen ab. Aber Clebsch hat auch in dieser Richtung wenigstens einen ersten Schritt gethan. Analog dem bei Curven entwickelten Geschlechtsbegriffe hat er in einem in den Comptes Rendus, December 1868, ohne Beweis mitgetheilten Satze eine von den Singularitäten der Fläche abhängige Zahl aufgestellt, die er als Geschlecht der Fläche bezeichnet, insofern sie bei beliebiger eindeutiger Transformation erhalten bleibt und ihre Gleichheit also zur Transformirbarkeit zweier Flächen in einander nothwendig ist. Bewiesen wurde dieser Satz von Nöther (1869), analytisch unter Ausdehnung auf mehrere Variable (Math. Ann. II.), sodann (1871) nochmals von Zeuthen durch geometrische Betrachtungen (Math. Ann. IV.). Seine weitergehende Bedeutung erhielt derselbe durch den Nachweis der Invarianteneigenschaft gewisser

*) Es ist zu bemerken, dass das Problem der Abbildung der Doppelebene auf die einfache Ebene in den im Texte gemeinten Fällen, in denen die Doppelebene durch Beziehung einer Fläche auf die Ebene gewonnen wurde, dadurch specialisirt resp. erleichtert ist, dass eine oder mehrere Wurzeln der Theilungsgleichung von vorneherein bekannt sind.

von der Fläche abhängigen Flächensysteme (Nöther, Gött. Nachr. März 1873), welche den mit gleicher Eigenschaft behafteten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung aus der Theorie der Abel'schen Functionen analog gebildet sind. Diese Sätze über die Erhaltung der Geschlechtszahlen scheinen bestimmt zu sein, für eine allgemeine Theorie der algebraischen Functionen mehrerer Variabeln, als deren Vorstufe man die Abbildungstheorie betrachten mag, in späterer Zeit eine Grundlage abzugeben. Clebsch selbst hat in einer seiner letzten Arbeiten, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen werden, noch eine Anwendung des Geschlechtsbegriffs auf die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen gegeben.

Auf den reichen Inhalt der Ausführungen, welche Clebsch sowohl für die allgemeine Theorie als für die Geometrie einzelner Flächen gegeben hat (vergl. Math. Ann. Bd. I. III., Rend. del Ist. Lombardo. Nov. 1868), können wir hier nur im Allgemeinen verweisen. Es mag nur noch der Arbeit über die geradlinigen Flächen vom Geschlechte Null gedacht werden (Math. Ann. Bd. V. Oct. 1871), insofern in derselben ein neuer Begriff, der des Flächentypus, eingeführt wird. Flächen werden demselben Typus zugewiesen, wenn sie ohne Zwischentreten singulärer Elemente auf einander eindeutig bezogen werden können, wie z. B. Ebene und Steiner'sche Fläche; Flächen desselben Typus verhalten sich daher in ihrer Geometrie vollkommen ähnlich. —

Die Darstellung einer Fläche durch Parameter hat Clebsch wiederholt auch benutzt, um Probleme des Unendlich-Kleinen, die sich auf die Fläche beziehen, zu behandeln. So wies er die Curven der Haupttangenten auf der Steiner'schen Fläche durch Integration als algebraische nach (Borch. J. Bd. 67. Juli 1866), ein Resultat, das daraufhin von Cremona (1867) auch geometrisch durch die Abbildung selbst wiedergefunden wurde*). Er zeigte ferner, in Verallgemeinerung der Methode, dass auf allen geradlinigen Flächen die Aufsuchung der Haupttangentencurven auf Quadratur zurückgeführt ist, wenn man eine derselben kennt (Borch. J. Bd. 68. Juni 1867) u. s. f.

Wie sehr alle diese Arbeiten von Clebsch noch dazu beigetragen haben, die analytische und synthetische Methode geometrischer Forschung ihrem Inhalte nach zur Uebereinstimmung zu bringen, sollte eine neuere Thatsache auf merkwürdige Art zeigen. In Entwickelung der angedeuteten Begriffe und Methoden ist zu gleicher Zeit (1870—71) und von mehreren Seiten her (Cayley, Cremona, Nöther) eine

*) Diese Bestimmung der Haupttangentencurven der Steiner'schen Fläche kann als besonderer Fall der Integration der ebenfalls algebraischen Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten betrachtet werden, wie diese von Lie und Klein gegeben wurde. (Berl. Monatsberichte. Dec. 1870. Vergl. auch Math. Ann. V.)

neue Theorie, die Theorie der eindeutigen Raumtransformationen aufgestellt worden, die man als directe Verallgemeinerung der Cremona'schen Transformationen der Ebene betrachten mag. Wenn dieselbe, obgleich erst in ihren Anfängen, schon jetzt gestattet, fast ohne Weiteres alle Flächenabbildungen, mit denen man sich bisher beschäftigt hat, abzuleiten, so darf man nicht vergessen, dass sie eben auf Grund dieser seitherigen Untersuchungen erwachsen ist. —

Wir hatten es seither verschieben müssen, von den Arbeiten Clebsch's auf dem Gebiete der Invariantentheorie im Zusammenhange zu berichten, so oft wir dieselben schon nebenbei berührt haben, und so enge die Beziehung dieser Arbeiten zu den bereits besprochenen geometrischen sein mag. Denn mit Problemen der Invariantentheorie hat sich Clebsch gerade auch in seinen letzten Jahren vielfach beschäftigt, und es hätte der zusammengehörige Stoff zerstückt werden müssen, wenn wir bereits bei früheren Gelegenheiten ausführlicher auf dieselben eingegangen wären.

Obwohl nach ihren Grundvorstellungen das analytische Bild der projectivischen Geometrie ist die Theorie der Invarianten bei linearen Substitutionen in ihren ersten Anfängen weniger auf die vorangegangenen geometrischen Forschungen, als auf die algebraische Determinantentheorie und deren Auftreten in dem zahlentheoretischen Gebiete (Transformation quadratischer Formen etc.) zurückzuführen. Auch ist für die Ausbildung der Invariantentheorie die Variationsrechnung durch die Art der in ihr üblichen Operationen wenigstens indirect von grossem Vortheile gewesen. Erst später hat die Geometrie Einfluss auf die Invariantentheorie geübt. Die elementaren Operationen der letzteren stimmen mit den in der projectivischen Geometrie üblichen Constructionen überein; die Hülfsmittel der Theorie in ihrer weiteren Ausbildung gehen aber bedeutend über die in der Geometrie üblichen Verknüpfungsweisen hinaus. Es fliesst daraus die Aufgabe, die geometrischen Begriffe in einer solchen Weise auszubilden, dass sie sich auch diesen höheren oder allgemeineren Operationen anschliesst. Andererseits ist die algebraische Formulirung gewisser Gattungen geometrischer Probleme, besonders von Aufgaben des Unendlich-Kleinen, im Sinne der Invariantentheorie erst in neuerer Zeit versucht und noch nicht überall consequent durchgeführt worden.*)

Bei der wesentlich geometrischen Auffassung der algebraischen Verhältnisse, die Clebsch eigenthümlich war, und die sich bei ihm je länger um so bestimmter ausgeprägt hatte, ist es natürlich, dass

*) Vergl. hierzu die allgemeinen Untersuchungen über homogene Differentialausdrücke von Christoffel und Lipschitz (Borch. J. Bd. 71 ff.), sowie die Erweiterungen, welche Beltrami der Lehre von den Differentialparametern hat zu Theil werden lassen. (Mem. dell' Accad. di Bologna.)

seine Untersuchungen über Invariantentheorie vorwiegend die geometrische Seite des Gegenstandes betreffen, ohne dass er sich jedoch ausschliesslich auf dieselbe beschränkt hätte. Die Abhandlung, durch deren Studium er zur Invariantentheorie geführt worden war und die für die Richtung seiner späteren Untersuchungen durchaus massgebend gewesen ist, ist Aronhold's Theorie der ternären cubischen Formen (Borch. J. Bd. 55). Einmal eröffnete diese Arbeit durch die grosse Zahl ihrer neuen Resultate, die sich sofort in die Theorie der Curven dritter Ordnung übersetzen liessen, wie durch die elegante Behandlung bereits von Anderen (bes. von Hesse) untersuchter Probleme der geometrisch-algebraischen Forschung, eine Reihe von neuen Gesichtspunkten. Andererseits bediente sich Aronhold in derselben eines Formalismus, den Clebsch sofort mit dem grössten Interesse aufgriff.

Es ist die Methode der symbolischen Darstellung algebraischer Formen als der Potenzen linearer Ausdrücke, vermöge deren Aronhold im Stande war, eine Aufgabe in voller Allgemeinheit der Coordinatenbestimmung aufzufassen und durchzuführen. Die Darstellungsweise geht in ihren ersten Anfängen auf die Symbolik zurück, deren sich Cauchy, Boole u. A.*) bei der Behandlung von Differentialgleichungen bedient hatten, oder, wenn man will, auf die bekannte abgekürzte Bezeichnung der höheren Glieder der Taylor'schen Reihe. Sie hatte dann in den Händen von Cayley (vergl. z. B. Crelle's J. Bd. 30) bereits die Ausbildung erhalten, welche sie geeignet macht, in der Invariantentheorie mit Erfolg verwandt zu werden. Aronhold, der seinerseits selbständig zu ihr geführt worden war, gab ihr, in Beschränkung auf ganze rationale Functionen, eine minder abstracte Form, indem er die von den Früheren gebrauchte Bezeichnung durch blosse Operationszeichen verliess.

Clebsch's erste**) Invariantenarbeit (Borch. J. Bd. 59. Sept. 1860) geht unmittelbar von Aronhold's symbolischer Darstellung aus. War letztere für Aronhold zunächst nur ein brauchbares Hülfsmittel zum Beweise seiner Sätze gewesen, so wird sie für Clebsch die principielle Grundlage der ganzen Theorie, indem ihm der Beweis gelingt, dass die symbolische Darstellung in ihren Determinantenaggregaten geradezu alle invarianten Bildungen ergibt. Es muss indess, wenn wir im Anschlusse an Clebsch's eigene Ausdrucksweise diesen Satz so uneingeschränkt aussprechen, ausdrücklich hervorgehoben werden, was man damals, zum Theil im Gegensatze zu

*) Vgl. auch Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe von Pfaff (Nova Acta Petropol. XI. 1797) und Jacobi (Crelle's Journal Bd. 36. pag. 135).

**) Vergl. auch die bereits genannte Abhandlung über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Borch. J. Bd. 58, sowie die sich zunächst anschliessenden geometrischen Arbeiten.

der heutigen, eben durch Clebsch selbst weiter entwickelten Anschauung, unter einer invarianten Bildung verstand. Man betrachtete nur solche Formenbildungen, wie sie bereits bei zwei und drei homogenen Veränderlichen auftreten: die Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen. Die Grundformen insbesondere dachte man nur mit einer Reihe ursprünglicher Veränderlichen ausgestattet. Später haben Clebsch und Gordan Formen mit verschiedenen Reihen von Veränderlichen zu Grunde gelegt, wie wir weiterhin noch ausführlicher zu berichten haben werden. Die dann nothwendig werdenden Symbole sind selbst aus anderen Symbolen zusammengesetzt und fügen sich dementsprechend in die Determinanten, die man aus ihnen zum Zwecke der Invariantenbildung aufbauen wird, nicht als Ganze ein. Auf Grundformen mit zusammengesetzten Symbolen ist daher der Clebsch'sche Satz in der Form, wie er ihn gab, nicht anwendbar.

Auf dem Standpunkte, der durch den Clebsch'schen Beweis geschaffen ist, und innerhalb der eben angedeuteten Begrenzung, wird das symbolische Aggregat geradezu die Definition der Invarianten; die Relationen zwischen den verschiedenen Bildungen, nach denen die Invariantentheorie sucht, ergeben sich aus den einfachen Principien der symbolischen Rechnung; die Invariantentheorie mit ihrer realen Vorstellung eines durch lineare Substitutionen unzerstörbaren Inhaltes erscheint fast als Corollar des symbolischen Formalismus. Hier springen nun alle die Vortheile hervor, welche ein solcher Formalismus, wenn er geschickt angelegt ist, mit sich führt. Die Hülfsmittel der symbolischen Rechnung, schon in der Form, in der Clebsch sie damals benutzte, führen sofort zu Bildungen, deren geometrische Bedeutung jenseits der Grenzen des rein geometrischen Verständnisses in seiner heutigen Ausbildung liegt. Clebsch hob diesen Punkt gern gesprächsweise hervor und pflegte dann wohl auf das Beispiel der binären Formen fünften und der ternären Formen vierten Grades aufmerksam zu machen. Bei beiden ergibt die symbolische Bezeichnung ohne Weiteres eine Reihe linearer Covarianten, während es bis jetzt nicht gelungen ist, bei fünf Punkten in gerader Linie einzelne covariante Punkte oder bei Curven vierter Ordnung einzelne covariante Gerade zu construiren*).

In seiner Abhandlung im 59ten Bande des Borchardt'schen Journals entwickelte Clebsch neben dem von der Allgemeingültigkeit der Symbolik noch insbesondere ein wichtiges Uebertragungsprincip, das eben durch die symbolische Darstellung ermöglicht wird. Dasselbe

*) Die im Texte genannten linearen Covarianten wurden von Hermite und Joubert entdeckt. Vergl. Cambridge a. Dublin Math. J. Vol. IX.

verwerthet die Theorie der Formen mit niederer Variabelnzahl für die Formen mit mehr Veränderlichen. Ein Beispiel wird am deutlichsten zeigen, worin dieses Princip besteht und in welcher Richtung seine Anwendung liegt.

Man kennt die Discriminante einer binären biquadratischen Form, d. h. die Invariante, deren Verschwinden aussagt, dass die gegebene Form zwei gleiche lineare Factoren besitzt. In symbolischer Darstellung ist dieselbe, wie jede Invariante binärer Formen, durch ein Aggregat von Producten zweigliedriger symbolischer Determinanten gegeben. Man kann nun vermöge des in Rede stehenden Princips in Folge dessen sofort die Bedingung hinschreiben, dass eine gerade Linie eine Curve vierter Ordnung in einem Punktsysteme mit verschwindender Discriminante schneiden soll, d. h. die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten. Es ist dazu nur nöthig, die symbolischen Determinanten, welche in der Darstellung der Discriminante vorkommen, durch Vermehrung der Symbolindices auf drei und Hinzunahme einer Reihe von Liniencoordinaten zu dreigliedrigen Determinanten zu erweitern und dann die Symbole als auf die Gleichung einer Curve vierter Ordnung bezüglich aufzufassen.

Clebsch hat damals diese Darstellung der Curven vierter Ordnung in Liniencoordinaten und entsprechend die der Flächen dritter Ordnung in Ebenencoordinaten gegeben, aus denen dann sofort eine Menge bis dahin unbekannter Sätze über diese Gebilde hervorgehen. Es sei hier noch insbesondere hervorgehoben, dass bei consequenter Anwendung dieses Princips und der symbolischen Rechnung die grossen zwiefach geränderten Determinanten, deren sich Clebsch, wie oben berichtet, in seinen früheren Arbeiten mit Vorliebe bediente, durch viel kürzere symbolische Potenzen ersetzt sind.

Im Zusammenhange hiermit erwähnen wir gleich hier einer späteren Arbeit von Clebsch über die Plücker'schen Complexe (Math. Ann. Bd. II. April 1869), in welcher Clebsch dem gemeinten Uebertragungsprincipe wie überhaupt der symbolischen Darstellung eine wesentliche Erweiterung hat zu Theil werden lassen.

Als Plücker, nach längerer physikalischer Thätigkeit, sich wieder mathematischen Problemen zuwandte (1864) und die neue Disciplin schuf, die man nun als Liniengeometrie*) bezeichnet, ergriff Clebsch die geometrischen Ideen, die Plücker vortrug, mit dem grössten Interesse. Für ihn war eine Geometrie der geraden Linien im Raume, wenn auch nicht bewusst von ihm erfasst, doch nach den

*) Dem Plücker'schen Buche (Neue Geometrie etc. Leipzig, B. G. Teubner. 1868/69) gingen eine grosse Zahl verschiedener Arbeiten Anderer voraus, die man heute zur Liniengeometrie rechnen wird. Vergl. Clebsch's Gedächtnissrede auf Plücker. Gött. Abhandl. Bd. 15.

allgemeinen Betrachtungen der bei quaternären Formen möglichen symbolischen Bildungen etwas sehr nahe liegendes gewesen*). Hiermit ist auch die Richtung gegeben, in der sich seine Untersuchungen über Plücker'sche Complexe erstrecken. Sie knüpft an die Darstellung der Liniencoordinaten durch die Determinanten aus zwei Reihen von Punkt- oder Ebenencoordinaten an: ein Standpunkt, von dem aus die Liniengeometrie als ein Theil der quaternären Formentheorie erscheint. In dem Plücker'schen Buche wird umgekehrt eine andere analytische Behandlungsweise der Liniengeometrie angebahnt, die sich der geometrischen Auffassung der Geraden als Raumelement genauer anschliesst und weiterhin besonders von Klein verfolgt worden ist (Math. Ann. Bd. II., V.). Sie betrachtet die 6 Coordinaten der geraden Linie als selbständige Veränderliche, die dann an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades geknüpft sind. Aber hiermit verlässt man den Boden der quaternären Formentheorie und tritt in den Kreis der Formen mit sechs Veränderlichen. —

Indem sich Clebsch der Darstellung der Liniencoordinaten durch zweigliedrige Determinanten bediente, zeigte er in der genannten Arbeit, wie man symbolisch einen Liniencomplex als Potenz einer viergliedrigen Determinante schreiben kann, in der zwei Reihen von Punkt- oder Ebenencoordinaten vorkommen, aus denen sich bei der Entwickelung der Determinante eben die Liniencoordinaten zusammensetzen. Ein wesentlicher Fortschritt, der hierin liegt, ist der, dass die Coëfficienten der darzustellenden Form nicht als blosse Producte von Symbolen, sondern als Determinantenaggregate**) von Symbolen erscheinen. Clebsch hat später (Math. Ann. Bd. V. Jan. 1872) gelegentlich die Fruchtbarkeit dieser Darstellung für die Behandlung der Complexe in ein helles Licht gestellt, indem er die fertigen Gleichungen einer Reihe in der Complextheorie auftretender Flächen ableitete. Er hat sodann diese neue Art von Symbolik bei allgemeinen Untersuchungen zu Grunde gelegt, auf die wir erst weiter unten zu sprechen kommen werden. —

Die Gesichtspunkte, die man bis jetzt in der Invariantentheorie verfolgt hat, mag man in zwei Gruppen bringen. Man hat einmal nach den charakteristischen Eigenschaften der invarianten Bildungen geforscht, man hat andererseits nach deren gegenseitigem Zusammenhange gefragt und nach Fundamentalformen gesucht, aus denen sich die übrigen durch einheitliche Processe ableiten lassen.

In seinen ersten Untersuchungen definirt Cayley die Invarian-

*) Vergl. den Bericht, den Clebsch in den Göttinger Anzeigen von dem Plücker'schen Buche erstattet hat (1869).

**) Dies ist also einer von den oben erwähnten Fällen, auf welche sich die Beschränkung bezieht, die man dem Clebsch'schen Satze von der Allgemeingültigkeit der Symbolik zufügen muss.

ten durch gewisse partielle Differentialgleichungen, in denen die Coëfficienten der gegebenen Formen als unabhängige Variable auftreten und deren einzige rationale Lösungen eben die Invarianten sind (Crelle's J. B. 47, vergl. auch Aronhold ebenda Bd. 62). Clebsch kommt auf diese Differentialgleichungen nur in der bereits oben bei Gelegenheit des Pfaff'schen Problems genannnten Arbeit über simultane lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zu sprechen (Borch. J. Bd. 65). Sie erscheinen dabei als Beispiele eines sogenannten vollständigen Systems von Differentialgleichungen, d. h. eines Systems, dessen Gleichungen mit einander combinirt, keine neue Bildungen ergeben. *)

Eine andere Definition der Invarianten, von der besonders Aronhold in seiner „fundamentalen Begründung der Invariantentheorie" ausgeht (Borch. J. Bd. 62), ist die aus den nothwendigen Transformationsrelationen, welche erfüllt sein müssen, damit zwei Formen linear ineinander übergeführt werden können. Für Clebsch trat auch diese Art der Definition verhältnissmässig zurück. Für ihn waren die Invarianten einfach definirt als ganze rationale Functionen der Coëfficienten gegebener Formen, die sich bei linearer Transformation bis auf eine als Factor vortretende Potenz der Substitutionsdeterminante reproduciren. Dieses ihr Verhalten wird in durchsichtigster Weise durch das symbolische Bildungsgesetz ausgesprochen, und es interessirte nun Clebsch vorwiegend, diejenigen Probleme weiter zu verfolgen, die man auf Grund der symbolischen Darstellung zu erledigen hoffen darf.

Bereits bei einer binären Form kann man eine unbegrenzte Zahl invarianter Bildungen nach dem Principe der Symbolik entwerfen, indem man nur die Reihe der zu vereinigenden symbolischen Determinanten und der zu Hülfe zu nehmenden wirklichen Veränderlichen beliebig vermehrt; um so mehr wächst die Zahl der Bildungen bei ternären, quaternären Formen u. s. w. Man wird sich die Frage vorlegen, ob man nicht aus der Mannigfaltigkeit aller dieser Gestalten einen kleineren Kreis auswählen kann, aus dessen Formen sich alle anderen in einer festzusetzenden Art und Weise ableiten lassen.

Mit Bezug auf diese Fragestellung, die schon von Cayley, Hermite, Brioschi u. A., aber zum Theil in anderer Richtung, in Betracht gezogen war, haben sich Clebsch und Gordan in erster Linie gemeinschaftlich auf die Aufgabe concentrirt, solche Formen anzugeben, aus denen sich die übrigen rational und ganz mit Hülfe bloss numerischer Factoren zusammensetzen. Bei binären Formen gelang es Gordan (Borch. J. Bd. 69) unter Benutzung des symboli-

*) Den Beweis der Unabhängigkeit dieser Gleichungen haben später Christoffel (Borch. J. Bd. 68) und Aronhold (ibd. Bd. 69) geführt.

schen Apparates den Satz zu beweisen, dass jede einzelne binäre Form, wie auch jedes System solcher Formen eine endliche Zahl solcher Bildungen besitzt. Die verhältnissmässig hohe Vollendung, die durch diesen Satz der Theorie der binären Formen geworden ist, veranlasste Clebsch, eine zusammenhängende Darstellung dieser Theorie zu geben, die 1872 erschien (Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, B. G. Teubner. dat. September 1871). Wenn dieses Werk zunächst bestimmt ist, auch in weiteren Kreisen die Ergebnisse und Anschauungsweisen der heutigen Invariantentheorie zu verbreiten*), so haben wir hier und im Folgenden die in ihm enthaltenen einzelnen Fortschritte hervorzuheben. Mit Bezug auf die hier vorliegende Fragestellung hat Clebsch in seinem Buche den Nachweis geführt (der gleichzeitig von Gordan in einem Aufsatze über Resultanten (Math. Ann. Bd. III.) gegeben wurde), dass man binäre Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen immer durch ein simultanes System von Formen ersetzen kann, die nur eine Art von Veränderlichen enthalten, — wodurch denn das Problem der binären Formen nach dieser Seite begrenzt erscheint und namentlich auch bei der Bildung von Covarianten binärer Formen die Beschränkung auf solche mit nur einer Reihe von Veränderlichen gerechtfertigt ist.

Für ternäre und höhere Formen hat sich ein Satz, der dem Theoreme von der Endlichkeit des Formensystems bei binären Formen entspräche, trotz wiederholter Bemühungen von Gordan nur erst in einzelnen Fällen als gültig erwiesen. Dagegen nahm Clebsch in seiner grossen Arbeit: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Gött. Abhandl. XVII. März 1872., vergl. auch Math. Ann. Bd. V.) eine Erledigung der Fragen in Angriff, welche bei mehr Veränderlichen den letzt erwähnten auf binäre Formen bezüglichen entsprechen. Bei binären Formen gibt es wesentlich nur eine Art von Veränderlichen, die man als die Punkte einer Geraden zu deuten pflegt. Bei ternären Formen treten aber bereits zweierlei, bei quaternären dreierlei Variable auf, entsprechend den verschiedenen Grundgebilden in Ebene und Raum, welche die projectivische Geometrie unterscheidet: dem Punkte und der Geraden in der Ebene, dem Punkte, der Geraden und der Ebene im Raume. Bei n homogenen Veränderlichen wird die Zahl dieser verschiedenen Stufen*) gleich $(n - 1)$. Insofern man nun

*) Das Werk stellt sich hierdurch neben Salmon's Lessons introductory to the modern Algebra. Ein Vergleich beider Bücher ist namentlich auch für Clebsch's mathematische Denkweise charakteristisch: bei Salmon in mannigfacher Abwechselung eine Fülle verschiedener Methoden, bei Clebsch ein einheitlicher streng systematischer Gang.

*) Die Unterscheidung dieser Stufen spielt bereits in Grassmann's Ausdehnungslehre von 1844 eine wichtige Rolle.

alle solche Bildungen von der Betrachtung ausschliesst, welche sich aus anderen, die man bereits berücksichtigte, rational und ganz zusammensetzen lassen, genügt es, wie Clebsch zeigt, solche Formen zu betrachten, welche von jeder Art der in Betracht kommenden Veränderlichen höchstens eine Reihe enthalten. In der Geometrie der Ebene z. B. beachte man nur solche Formen, welche entweder allein eine Reihe von Punktcoordinaten oder nur eine Reihe von Liniencoordinaten oder von jeder Coordinatenart je eine Reihe enthalten. Die ersten beiden Classen repräsentiren, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Curve in Punkt- bez. Liniencoordinaten. Die dritte Classe ergibt das, was man früher als Zwischenform bezeichnet, aber nicht eigentlich geometrisch verwerthet hat. Die Formen dieser Art repräsentiren geometrisch eine Verwandtschaft zwischen den Punkten der Ebene und einem von Geraden umhüllten Orte, oder, was dasselbe ist, zwischen den geraden Linien der Ebene und zugeordneten Punktgebilden. Wir werden noch weiter unten berichten, wie Clebsch im Anschlusse an die hier besprochene Arbeit es unternahm, diese Art geometrischer Beziehung, die er als Connex bezeichnet, als neues Grundgebilde in die Geometrie der Ebene einzuführen, und dadurch einen ersten Schritt that, um die Lehre von den Differentialgleichungen erster Ordnung mit der neueren geometrischen Forschung in Verbindung zu bringen.

Für ternäre Formen, auf die sich das besprochene Beispiel bezieht, hat übrigens Clebsch in der genannten Arbeit den Kreis der zu betrachtenden Formen noch enger gezogen. Bereits Gordan hatte in einer Arbeit über Combinanten (Math. Ann. Bd. IV) Connexe betrachtet, die einer gewissen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen; auf eben solche Formen darf man sich, nach den Untersuchungen von Clebsch, überhaupt beschränken. Eine entsprechende Reduction des Problems scheint auch bei mehr Veränderlichen statthaft, durch die Arbeit von Clebsch ist aber die bez. Frage erst angeregt, noch nicht erledigt.

Für den Standpunkt, wie ihn Clebsch mit diesen Untersuchungen entwickelt hat, erscheint die Liniengeometrie als ein specieller Theil der überhaupt auf vier homogene Variable bezüglichen Probleme. Dementsprechend gelingt es Clebsch, die Symbolik, die er, wie oben berichtet, insbesondere für Linien-Complexe entwickelt hatte, auf alle Formen mit beliebig vielen Veränderlichen auszudehnen. Sie gibt ihm den Ausgangspunkt für seine weiteren Betrachtungen und den wesentlichen Apparat zum Beweise der abzuleitenden Sätze. —

Die zuletzt besprochenen Arbeiten gehen alle darauf aus, solche Formen anzugeben, aus denen sich alle anderen rational und ganz zusammensetzen lassen. Aber man kann die Aufgabe auch so stellen,

dass man nur rationale Darstellung der ausgeschiedenen Bildungen verlangt. Mit Bezug auf diese Fragestellung haben Hermite*) und Brioschi**) bei binären Formen ganz allgemein ein System „associirter Formen" aufgestellt. Alle Covarianten drücken sich durch dieselben in der Weise rational aus, dass im Nenner jedesmal nur die Potenz einer Form, etwa der Grundform auftritt. Sie gelangten zu diesem wichtigen Satze mit Hülfe einer gewissen linearen Substitution, vermöge deren die gegebene Form Coëfficienten erhält, die sich aus Invarianten und Covarianten zusammensetzen lassen (vergl. hierzu Clebsch's Theorie der binären Formen, deren zweite Hälfte diesen Untersuchungen gewidmet ist). In einer Note in den Göttinger Nachrichten (Aug. 1870. vergl. Math. Ann. Bd. III) zeigte nun Clebsch, dass die von jenen aufgestellten Systeme associirter Formen noch nicht die einfachsten ihrer Art sind, dass sie sich vielmehr noch aus niederen Bildungen zusammensetzen lassen, nämlich aus der Grundform, aus den Covarianten, welche in ihren Coëfficienten quadratisch sind, und aus den Functionaldeterminanten derselben mit der Grundform (vergl. den vereinfachten Beweis von Gundelfinger. Borch. J. Bd. 74).

Beziehen sich diese Betrachtungen gleichmässig auf Invarianten und Covarianten, so gibt es ähnliche Ueberlegungen, die nur Invarianten betreffen. Sie gehen darauf aus, solche Functionen der Veränderlichen als neue Variable einzuführen, welche mit den gegebenen Formen covariant verknüpft sind. Die Coëfficienten der neuen „typischen" Form sind dann Invarianten, und durch diese Invarianten stellen sich von selbst alle anderen dar. Hermite, von dem diese Art der Betrachtung überhaupt herrührt, benutzt irrationale Bildungen zur typischen Darstellung. Aber dadurch wird gerade der charakteristische Unterschied aufgehoben, der zwischen der Typik und der sonst so viel gebrauchten Methode der kanonischen Formen besteht: die Beschränkung auf das Rationale. Dem gegenüber haben Clebsch und Gordan in einer gemeinsamen Arbeit über Formen fünften und sechsten Grades (annali di matematica. 1867. t. I.) insbesondere entwickelt, wie man den Vortheil rationaler Darstellung bei Formen gerader Ordnung dadurch erreichen kann, dass man quadratische Covarianten als neue Veränderliche einführt. Später haben Clebsch und seine Schüler die typische Darstellung auch anderer Formen gegeben; man vergleiche hierüber den zweiten Theil der „Theorie der binären Formen," in dem sie sämmtlich aufgeführt sind. —

Es war schon wiederholt von den Beziehungen der Invariantentheorie der linearen Substitutionen zur allgemeinen Lehre von den ein-

---

*) Cambr. und Dublin math. Journ. 1854. Crelle J. Bd. 52.

**) Annali di matem. tomo I p. 296.

deutigen Umformungen die Rede, und es wurde bereits von den Resultaten berichtet, welche letztere Theorie seither bei ternären und quaternären Formen aufzuweisen hat. Bei binären Formen, bei denen die Erledigung der einschlägigen Probleme um Vieles leichter scheint, hat zuerst Hermite (Comptes Rendus tome 46 pag. 961), dann Gordan (Borch. J. Bd. 71) den Gegenstand in der Weise in Angriff genommen, dass geradezu die Invarianten der durch eine gegebene eindeutige Transformation umgewandelten Form aufgestellt werden. Die Art, in der Gordan die eindeutige Transformation einführt, entspricht genau denjenigen, deren er und Clebsch sich in dem Buche über Abel'sche Functionen bei ternären Formen bedienten. Die neuen homogenen Veränderlichen werden mit ganzen Functionen der ursprünglichen proportional angenommen und aus diesen Gleichungen und der gleich Null gesetzten gegebenen Form werden die ursprünglichen Veränderlichen eliminirt. Die entstehende Resultante ist die transformirte Form. Die letztere ist also eine simultane Invariante der gegebenen Form und der Transformationsgleichungen; ihre Invarianten setzen sich dementsprechend aus den Invarianten der gegebenen Form und der Transformationsfunctionen zusammen.

Clebsch hat sich speciell mit der quadratischen Transformation binärer Formen beschäftigt (vergl. das Fünfseit und die Gleichungen fünften Grades, Math. Ann. Bd. 4. Juni 1871). Den Kern seiner Betrachtung bildet eine geometrische Repräsentation der quadratischen Transformation, die hier um so mehr auseinandergesetzt sein mag, als sie in ihrer Einfachheit ein ausgezeichnetes Beispiel für das Zusammengehen algebraischer Entwickelung und geometrischer Auffassung gibt, wie es die neuere Zeit entwickelt hat. Man ziehe n Tangenten an einen Kegelschnitt. Dann sind bekanntlich die Reihen von n Punkten, in welchen dieselben von einer beliebigen anderen Tangente des Kegelschnittes getroffen werden, alle untereinander projectivisch verwandt. Schneidet man die n Tangenten mit einer anderen Linie der Ebene, so ist das nicht mehr der Fall, sondern die durch die neuen Schnittpunkte repräsentirte Form geht aus der ursprünglichen eben durch eine quadratische Transformation hervor und die Gesammtheit der Formen, die durch quadratische Transformation entstehen können, ist durch die Gesammtheit der Schnittpunktsysteme der Geraden der Ebene mit den n Tangenten repräsentirt*). Handelt es sich jetzt darum, quadratische Transformationen zu bestimmen, welche der transformirten Form besondere Invarianteneigenschaften ertheilen, so

*) In ähnlicher Weise interpretirt man nach Clebsch die cubischen Transformationen, indem man n Osculationsebenen an eine Raumcurve dritter Ordnung legt und diese Ebenen mit den Geraden des Raumes schneidet.

kommt das auf die Bestimmung gewisser Linien der Ebene, d. h. auf ein Problem der linearen Invariantentheorie bei drei Veränderlichen hinaus.

Clebsch wendet diese Untersuchungen insonderheit auf binäre Formen fünften Grades an, und ohne dass wir hier eine nähere Darlegung der zahlreichen Resultate geben können, welche seine Arbeit im Einzelnen bietet, müssen wir hervorheben, dass er dieselben mit den Untersuchungen von Jerrard, Hermite und Kronecker, betr. die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, in Verbindung bringt.

Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, wie sie durch Lagrange begründet, durch Gauss und Abel weiter entwickelt, durch Galois zu ihrer jetzigen Allgemeinheit erhoben worden ist, hat Clebsch in hohem Masse interessirt. Er hat freilich in dieser Richtung nicht eigentlich eigene Untersuchungen angestellt, aber er hat indirect diesen Fragen genützt, indem er keine Gelegenheit vorübergehen liess, wenn ein geometrisches oder algebraisches Problem zu Gleichungen besonderen Charakters hinleitete, auf eben diese Gleichungen als an und für sich beachtenswerth hinzuweisen. Es waren wohl die Untersuchungen von Hesse und weiterhin die von Abel gewesen, die Clebsch's Interesse für diese algebraische Seite der geometrischen Probleme rege gemacht hatten; später wurde seine Aufmerksamkeit durch die vielfachen Beziehungen, in die er mit Camille Jordan getreten war, immer wieder auf Alles, was mit merkwürdigen Gruppirungen von Wurzeln einer Gleichung im Zusammenhange steht, hingelenkt. Umgekehrt hat man es ihm hauptsächlich zu verdanken, wenn Camille Jordan im Stande war, in seinem grossen Werke (Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, Gauthier-Villars 1870) ein besonderes Capitel den „Gleichungen der Geometrie" zu widmen.

Das erste Beispiel einer solchen „geometrischen" Gleichung hatten die neun Wendepunkte der Curven dritter Ordnung geboten, von denen Hesse zeigte, dass sie durch eine biquadratische und zwei reine cubische Gleichungen zu bestimmen seien. Es mögen ferner die Gleichungen genannt werden, welche bei der Bestimmung der 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung oder bei der Bestimmung der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung auftreten. Bei ihnen gelang es nicht, den Grad der Gleichungen zu erniedrigen (C. Jordan hat inzwischen bewiesen, dass das unmöglich ist), wohl aber besitzen ihre Wurzeln besondere Gruppirungen, welche interessante Beispiele für die bei Gleichungen höheren Grades in dieser Hinsicht auftretenden Eigenthümlichkeiten abgeben. Clebsch selbst hat in seiner Arbeit über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, deren wir oben gedachten, die Gleichung zehnten Grades näher discutirt, die durch die 10 Eckpunkte des Pentaeder's vorgestellt wird. In seinem Aufsatze „über die Wendetangenten der Curven dritter Ord-

nung" (Borch. J. Bd. 58) spielt der Zusammenhang zwischen einer Gleichung vierten und einer Gleichung sechsten Grades, auf den schon Hesse geführt worden war, eine interessante Rolle. Wir gedachten ferner bereits der Untersuchungen über die Theilungsgleichungen der Abel'schen Functionen, die Clebsch und Gordan in ihrem gemeinsamen Buche gegeben haben. Aber sehr viel charakteristischer für Clebsch's allgemeine Auffassungsweise sind zwei andere Leistungen, die wir beide ebenfalls schon berührt haben. Die eine ist die, dass Clebsch allgemein den Zusammenhang erkannte, den die Theilungsgleichungen der Abel'schen Functionen mit den Gleichungen zur Bestimmung der Berührungscurven einer ebenen Curve besitzen; die andere liegt in der Zurückführung der Gleichungen, welche in der Flächenabbildung auftreten, eben auf die Bestimmung solcher Berührungscurven.

Wir haben bei dieser Gelegenheit noch insbesondere von der Arbeit: über die binären Formen sechsten Grades und die Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen (Gött. Abhandl. Bd. 14. Juni 1869. vergl. Math. Ann. Bd. II) Bericht zu erstatten. Von der Aufgabe ausgehend, Curven dritter Ordnung zu construiren, welche sechs gegebene Gerade eines Büschels berühren, hatte Cayley (Quarterly J. Bd. 9) das Problem aufgestellt, eine binäre Form sechsten Grades in die Summe der dritten Potenz einer quadratischen und der zweiten Potenz einer cubischen Form zu zerlegen. Dieses Problem ist, wie Clebsch zeigt, vom 40ten Grade und kann vermöge einer Gleichung vom 27ten und einer anderen vom 5ten Grade gelöst werden. C. Jordan, dem Clebsch diese Resultate mitgetheilt hatte, erkannte die Uebereinstimmung dieser Gleichung vierzigsten Grades mit derjenigen, die sich bei der Dreitheilung der ultraelliptischen Functionen einstellt. Clebsch selbst gab darauf die Zurückführung des einen Problems auf das andere. Bei der weiteren Behandlung der Aufgabe erschliesst er nicht nur die Existenz gewisser Resolventen, sondern, und das macht sie besonders bemerkenswerth, er gibt Methoden an, um diese Resolventen unter Benutzung der Hülfsmittel symbolischer Rechnung wirklich zu bilden. Man vergl. hierzu p. 234 ff. der „Theorie der binären Formen", wo Clebsch diese Untersuchungen, oder wenigstens einen Theil derselben, reproducirt hat.

War Clebsch in dieser Weise bemüht, die Invariantentheorie auch mit solchen Gebieten mathematischer Forschung in Verbindung zu setzen, die ihr bis dahin ziemlich fern standen, so sei, als einer Leistung in gleichem Sinne, eines Aufsatzes über die Charakteristiken der Kegelschnitte gedacht (Math. Ann. Bd. VI. Mai 1872). In der Theorie der Charakteristiken, wie sie durch Chasles geschaffen ist, spielt ein Satz, dem man durch Induction eine grosse Ausdehnung gegeben hat, eine fundamentale Rolle. Derselbe sagt aus, dass die Zahl der Kegelschnitte einer

einfach unendlichen Reihe, welche einer gegebenen Bedingung genügen, sich aus zwei Zahlenpaaren linear und homogen zusammensetzt, von denen das eine bloss der Reihe, das andere bloss der hinzutretenden Bedingung angehört. In Benutzung der Resultate seiner Abhandlung: „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie," deren wir oben ausführlich gedacht, zeigt nun Clebsch, dass dieser Satz aus bestimmten Eigenthümlichkeiten hervorgeht, die das simultane Formensystem beliebiger ebener Gebilde besitzt, wenn sich unter denselben ein Kegelschnitt befindet. Es ist durch diese Untersuchung nicht nur der Satz in einer vollständigeren Weise bewiesen, als das bis dahin geschehen war*), sondern es ist namentlich auch eine Begrenzung desselben wahrscheinlich gemacht. Denn der Beweis des Satzes hängt in einer solchen Weise von speciellen Eigenschaften der Kegelschnitte ab, dass eine Geltung desselben in der nämlichen Form bei Curven höherer Ordnung nicht angenommen werden kann. Dem widerspricht nicht, wenn er sich auch bei höheren Curven in einzelnen Fällen als gültig erwiesen hat (cf. Chasles in den Comptes Rendus t. 58, 1864, Zeuthen in den Math. Ann. Bd. 3. p. 154); denn in diesen Fällen sind die Bedingungen, denen man die Curven unterwirft, besonderer Natur. — Clebsch setzt bei seinem Beweise eine gewisse Unabhängigkeit zwischen der gegebenen Kegelschnittreihe und der hinzutretenden Bedingung voraus. Findet eine solche nicht statt, so hat der Satz von Chasles auch keinen unmittelbaren Sinn. Indirect ist er aber auch auf solche Fälle durch Chasles (Comptes Rendus 1864) und Cremona (ebenda 1865) vermöge einer nicht völlig begründeten Induction angewandt worden und hat dann zu lauter richtigen Resultaten geführt. Bei Clebsch sind solche Fälle, wie gesagt, ausdrücklich von der Betrachtung ausgeschlossen; die auf sie bezügliche Benutzung des Chasles'schen Satzes ist bis jetzt noch unbewiesen.

Gedenken wir schliesslich der bereits genannten Untersuchung über Connexe, die Clebsch als neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene einzufügen gedachte (vergl. Gött. Nachrichten, Aug. 1872. Math. Ann. Bd. VI). Mit denselben hat Clebsch der geometrischen Forschung ein unübersehbares Feld neuer Speculation geöffnet; er hat selbst nur noch die Richtung im Allgemeinen bezeichnen können, in der er den Gegenstand zu verfolgen beabsichtigte. Der Connex wird bei ihm in demselben Sinne Object der geometrischen Untersuchung, wie etwa eine Curve oder Fläche. Ein Connex hat seine

*) Vergl. z. B. die Betrachtungen von Darboux in den Comptes Rendus. Es wird dort nur auf solche Curvenreihen Rücksicht genommen, die von einem Parameter rational abhängen. In neuester Zeit wurde ein geometrischer Beweis für den Fundamentalsatz der Charakteristikentheorie von Halphen mitgetheilt, Bulletin de la Société Mathématique. 1873.

Singularitäten, zwischen ihnen bestehen Gleichungen, die den Plücker'schen Formeln für die Singularitäten ebener Curven analog sind. Man kann nach den Gebilden fragen, die zwei, drei Connexen etc. gemeinsam sind. Alle diese Erzeugnisse besitzen bei beliebigen eindeutigen Transformationen, die man auf das doppelt ternäre System der Punkt- und Linien-Coordinaten erstrecken darf, ein Geschlecht u. s. f.

Aber besonders wichtig scheint die Verbindung, in welche die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung (zunächst bei zwei absoluten, oder, was dasselbe ist, drei homogenen Veränderlichen) zur Theorie der Connexe tritt. Jeder Connex zieht eine solche Differentialgleichung nach sich; ihre Integralcurven sind dadurch definirt, dass jedesmal Punkt und zugehörige Tangente der Connexgleichung genügen. Man erhält dadurch die allgemeinste algebraische Differentialgleichung erster Ordnung, wobei das Verhältniss ein solches ist, dass zu einer gegebenen Differentialgleichung noch unendlich viele Connexe gehören. Es ist dadurch für diese Differentialgleichungen ein ganz neuer Standpunkt der Auffassung gewonnen, der sich auf das Genaueste an die neuere geometrisch-algebraische Forschung anschliesst. Man kann z. B. diese Differentialgleichungen nach ihrem Geschlechte eintheilen u. s. f. Es ist aber namentlich auch ein formaler Apparat geschaffen, mit dem man die Differentialprobleme behandeln wird, wenn man sich an die genannten neueren Anschauungen anschliessen will. Es scheint dieser Apparat die Ergänzung zu den mehr synthetischen Untersuchungen über Differentialgleichungen bilden zu sollen, wie sie in neuester Zeit besonders von Lie begonnen wurden.

Clebsch beabsichtigte, seine Untersuchungen auf mehr Veränderliche auszudehnen. Die Theorie der quaternären Formen z. B., welche eine Reihe von Punkt- und eine Reihe von Ebenen-Coordinaten enthalten, schliesst dann die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bei drei Variabeln in sich. Auch für sie ist die Eintheilung in Geschlechter gegeben; andererseits mag man sie in Gruppen theilen je nach Ordnung und Classe der Connexe, zu denen sie gehören. Clebsch hat alle diese Fragen, die ihn in der letzten Zeit beschäftigten, nur noch gesprächsweise berühren können. Aber wir glaubten um so mehr, dieselben hier wenigstens nennen zu sollen, als er selbst von ihnen reichen Erfolg erwartete. Wie so oft vorher, hat Clebsch mit diesen Untersuchungen den Blick in neue, weite Gebiete geöffnet, die altbekannte, aber bis dahin getrennte Gegenstände in sich begreifen. Er hat mit ihnen dem Grundzuge seiner mathematischen Denkweise noch einmal Ausdruck gegeben, welche die Mathematik nicht als eine Reihe geschiedener, einander fremder Disciplinen, sondern als einen lebendigen Organismus erfassen wollte.

Liste der Publicationen.

I. Selbständige Veröffentlichungen.

1. De motu ellipsoidis in fluido incompressibili viribus quibuslibet impulsi. Regiomonti 1854.
2. Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig, 1862. B. G. Teubner.
3. Theorie der Abel'schen Functionen. (Mit P. Gordan). Leipzig, 1866. B. G. Teubner.
4. Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, 1872. B. G. Teubner.

In autographirten Heften: Vorträge über elementare und über analytische Mechanik. Carlsruhe 1858/59.

II. In Crelle-Borchardt's Journal.

Bd. 52. (1856.) Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit. 30 p. Aug. 1854.

Bd. 53. (1857.) Zusatz zu dem vorhergehenden Aufsatze. 5 p. Mai 1856.

Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes. 17 p. December 1855.

Bd. 54. (1857.) Ueber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. 20 p. Mai 1857.

Bd. 55. (1858.) Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form. 20 p. November 1857.

Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten. 21 p. Febr. 1858.

Bd. 56. (1859.) Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. 10 p. März 1858.

Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale. 26 p. Juni 1858.

Bd. 57. (1860.) Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt. 5 p. 1859.

Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. 18 p. Mai 1859.

Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper. 21 p. Aug. 1859.

Theorie der circularpolarisirenden Medien. 40 p. Oct. 1859.

Bd. 58. (1861.) Zur Theorie der algebraischen Flächen. 16 p. März 1860.

Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen. 18 p. März 1860.

Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung. 11 p. April 1860.

Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren. 19 p. Juni 1860.

Bd. 59. (1861.) Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen. 62 p. September 1860.

Ueber Curven vierter Ordnung. 21 p. Sept. 1860.

Ueber Jacobi's Methode, die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zu

integriren und ihre Ausdehnung auf das Pfaff'sche Problem (aus einem Schreiben an den Herausgeber). 3 p. März 1861.

Ueber die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung. 36 p. Februar 1861.

Bd. 60. (1862.) Ueber das Pfaff'sche Problem. 59 p. Sept. 1860.

Ueber eine Eigenschaft der Kugelfunctionen. 8 p. Juni 1861.

Bd. 61. (1863.) Ueber das Pfaff'sche Problem. Zweite Abh. 34 p. Januar 1861.

Bemerkung zur Abhandlung des Hrn. Röthig über das Potential eines homogenen rechtwinkeligen Cylinders. 8 p. Oct. 1861.

Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. 68 p. October 1861.

Bd. 62. (1863.) Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung. 46 p. Januar 1862.

Ueber eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. 14 p. November 1861.

Bd. 63. (1864.) Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven. 8 p. September 1862.

Zur Theorie der algebraischen Flächen. 13 p. Mai 1863.

Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. 28 p. Sept. 1863.

Bemerkung zu Jacobi's Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten. 3 p. Juli 1863.

Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. 55 p. Oct. 1863.

Bd. 64. (1864.) Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. 23 p. Mai 1864.

Ueber die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades. 3 p. April 1864.

Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. 3 p. April 1864.

Note zur Abhandlung des Hrn. Cremona: Sur l'hypocycloide à trois rebroussements. 2 p. Juni 1864.

Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. 61 p. October 1864.

Ueber einige von Steiner behandelte Curven. 6 p. Juli 1864.

Bd. 65. (1865.) Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. 12 p. Febr. 1865.

Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. 21 p. October 1865.

Bd. 67. (1867.) Ueber die Steiner'sche Fläche. 22 p. Juli 1866.

Ueber ein Problem der Forstwissenschaft. 18 p. April 1866.

Ueber simultane binäre cubische Formen. 11 p. Juni 1867.

Zur Theorie der binären Formen vierten Grades. 10 p. Juni 1867.

Bd. 68. (1867.) Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen 11 p. Juni 1867.

Ueber das simultane Formensystem einer quadratischen und einer cubischen binären Form. 8 p. Juli 1867.

Bd. 69. (1868.) Ueber Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. 43 p. April 1868.

Ueber eine Eigenschaft der Functionaldeterminanten. 4 p. November 1868.

Bd. 70. (1869.) Note zu dem vorhergehenden Aufsatze. 7 p. December 1868.

III. In den Mathematischen Annalen.

Bd. 1. (1869.) Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen (mit P. Gordan) 34 p. Sept. 1867.

Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen $p = 2$ ist. 3 p. October 1868.

Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung. 64 p. October 1868.

Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln (mit Gordan). 42 p. Sept. 1868.

Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung. 3 p. März 1869.

Bd. 2. (1870.) Ueber die Plücker'schen Complexe. 8 p. April 1869.

Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 5 p. Juni 1869 (vergl. Gött. Abhandl.).

Ueber die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformiren. 9 p. Nov. 1869.

Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. 3 p. Aug. 1869.

Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve dritten Grades besitzen. 27 p. Januar 1870.

Bd. 3. (1871.) Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen. 31 p. Mai 1870.

Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. 25 p. Mai 1870.

Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form. 2 p. Februar 1870.

Zur Theorie der binären algebraischen Formen. 3 p. Aug. 1870 (aus den Gött. Nachrichten).

Bd. 4. (1871.) Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits. 62 p. Juni 1871.

Ueber das ebene Fünfeck. 14 p. Juli 1871.

Bd. 5. (1872.) Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$. 26 p. October 1871.

Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung. 3 p. März 1872.

Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung. 5 p. März 1872.

Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. 8 p. März 1872 (vergl. Gött. Abhandl.).

Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe, 7 p. Januar 1872 (aus den Gött. Nachr.)

Bd. 6. (1873.) Zur Theorie der Charakteristiken. 15 p. Mai 1872.

Zur Theorie der Riemann'schen Fläche. 15 p. Sept. 1872.

Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. 13 p. Sept. 1872. (Aus den Gött. Nachrichten.)

IV. Annali di Matematica.

1. ser. Bd. IV. (1862.) Sur un problème concernant la théorie des surfaces du 2ème ordre. 4 p. Febr. 1862.

2. ser. Bd. I. (1867.) Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie (mit P. Gordan). 57 p. Febr. 1867.

V. Liouville's Journal de Mathématiques.

Bd. VIII. (1863.) Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires. 11 p. Sept. 1862.

VI. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Bd. 14. (1868/69.) Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 59 p. Juni 1869.

Bd. 15. (1870.) Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen der fünften Ordnung. 62 p. Jan 1870.

Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. 35 p. Nov. 1870.

Bd. 16. (1871.) Zum Gedächtniss an Julius Plücker. 40 p. December 1871.

Bd. 17. (1872.) Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. 60 p. März 1872.

VII. Nachrichten der Kgl. Gesellschaft etc. in Göttingen.

1869. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. 4 p. December.

1870. Ueber gewisse Probleme aus der Theorie der Oberflächen. 5 p. Mai.

Zur Theorie der binären algebraischen Formen. 5 p. August.

1871. Bemerkungen zu der Theorie der Gleichungen fünften und sechsten Grades. 6 p. April.

Ueber die geometrische Interpretation der höheren Transformationen binärer Formen und der Formen fünfter Ordnung insbesondere. 11 p. Juni.

1872. Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe. 12 p. Februar.

Mittheilung über eine Fläche dritter Ordnung. 2 p. August.

Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. 20 p. September.

VIII. Göttingische gelehrte Anzeigen.

1869. Bericht über Plücker's „Neue Geometrie des Raumes etc." 12 p. October.

1872. Bericht über Clebsch's „Theorie der binären Formen" 14 p. Februar.

IX. Monatsberichte der Berliner Akademie.

1857. Ueber die Criterien des Maximums und des Minimums in der Variationsrechnung. 4 p. December.

1860. Ueber eine symbolische Darstellungsweise algebraischer Formen, und über die davon zu machende Anwendung auf Probleme der Elimination. 5 p. October.

1868. Ueber die Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiter Ordnung. 6 p. April.

X. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

Bd. 60. (1865.) Sur une propriété des courbes d'ordre n, à $\frac{n \cdot n-3}{2}$ points doubles. 3 p. Juni.

Bd. 62. (1866.) Sur la théorie des fonctions abéliennes (mit P. Gordan). 7 p. März.

Bd. 62. (1866.) Sur la géométrie des courbes gauches tracées sur une surface générale du troisième ordre. 2 p. Mai.

Bd. 64. (1867.) Sur les formes binaires du sixième degré (mit P. Gordan). 7 p. März.

Bd. 67. (1868.) Sur les surfaces algébriques. 2 p. December.

XI. Rendiconti del R. Istituto Lombardo.

1868. Intorno alla rappresentazione di superficie algebriche sopra un piano. 13 p. November.

XII. Werke und Abhandlungen Anderer, durch Clebsch veröffentlicht.

Jacobi. Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi. Borch. Journal Bd. 60. 1862.

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik. Berlin G. Reimer. 1866.

Plücker. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig. B. G. Teubner. 1868/69.

Einzelne Referate in den Bänden der Fortschritte der Physik, dem ersten und zweiten Bande der Fortschritte der Mathematik, in Hoffmann's Zeitschrift für mathematischen etc. Unterricht.

Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung.

Von Ferdinand Lindemann in Erlangen.

Schon verschiedentlich hat man versucht, die Resultate und Methoden der neueren Geometrie auch für die Mechanik fruchtbar zu machen, den allgemeinen dort herrschenden Principien hier entsprechende gegenüberzustellen und so die Mechanik unter einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten. Vor Allem schien die in der Geometrie durchgeführte dualistische Auffassung ihr Gegenbild in der Möglichkeit zu finden, alle Kraftwirkungen aus einzelnen Kräften und Kräftepaaren entstehen zu lassen. Mit Begeisterung begrüsste daher Chasles*) das Werk Poinsot's**), in welchem durch Einführung des Begriffs der Kräftepaare die Statik zuerst eine ebenso einfache als consequente Begründung fand; er sieht in dieser neuen Methode einen ersten Schritt zum Aufbau einer doppelten Dynamik, indem man auf der einen Seite den Punkt, auf der andern die Ebene als Element der Ausdehnung betrachten soll***). Dieser Parallelismus in den ersten Principien trat noch klarer hervor, als Poinsot†) auch die directe Betrachtung der drehenden Bewegungen gleich der der translatorischen einführte und so zuerst über die geometrischen Vorgänge bei einer Rotation um einen Punkt Licht verbreitete. Zugleich musste damit ein anderes Princip der Analogie bemerkt werden, welches auf Kräfte und unendlich kleine Rotationen eine ähnliche Anwendung findet, wie in der Geometrie das der Dualität auf Punkte und Ebenen. Es setzen sich nämlich solche Rotationen nach denselben Gesetzen zusammen wie Kräfte, eine Symmetrie, welche Poinsot††) zuerst hervorhob,

---

*) Chasles: Aperçu historique, note 34. Vgl. auch A. Comte: Cours de philosophie positive, t. I, Paris 1830.

**) Elements de statique, zuerst Paris 1804.

***) Mit ähnlichen Gedanken beschäftigte sich auch Plücker; vgl. Philos. Transact. 1866, p. 361.

†) Théorie nouvelle de la rotation des corps. Paris 1834. Ausführlicher in Liouville's Journal des math. t. XVI, 1851.

††) Théorie nouvelle de la rotation etc.

während Möbius*) sie dann vollkommen durchführte und, über die Zusammensetzungsregeln hinausgehend, auch der Theorie der Momente und der Kräftepaare analoge Betrachtungen für unendlich kleine Rotationen gegenüberstellte. Ueberhaupt ist es ein wesentliches Verdienst des letzteren, die von Poinsot gewonnenen Resultate unter einem neuen Gesichtspunkte bearbeitet und bereichert durch eine Fülle neuer Ideen, in Deutschland verbreitet zu haben; wobei zugleich die räumlich-anschauliche, synthetische Methode, deren sich dieser bei seinen Untersuchungen bediente, in fruchtbringendster Weise durchgebildet wurde. Zur Ausbildung dieser Theorien that zunächst Chasles**) einen weiteren Schritt, indem er die rein geometrischen Vorgänge bei einer unendlich kleinen Bewegung eingehender untersuchte. Es war damit wohl zuerst das Studium der kinematischen Geometrie im Allgemeinen angeregt, einer Disciplin, welche in neuerer Zeit immer weiter ausgebildet ward, wie besonders auch die Arbeiten der Herren Resal und Aronhold bezeugen***). Allerdings wurde so dieser Theil der Mechanik durch Einführung geometrischer Methoden in hohem Masse gefördert; es blieb dabei aber die Betrachtungsweise der neueren projectivischen Geometrie, die ihr eigenthümliche Fassung metrischer Probleme ohne Anwendung, während man doch gerade von ihr einen dualistischen Aufbau der Mechanik auf Grund jener allgemeinen Reciprocitätsgesetze im Sinne von Chasles erwarten durfte. Wenn aber in dieser Richtung keine erfolgreichen Schritte gethan sind, so liegt der Grund dafür in dem undualistischen Charakter unserer metrischen Anschauungen, der sich auch besonders in der unvollkommenen Symmetrie offenbart, welche die Theorie der Kräftepaare mit der einzelner Kräfte verbindet.

Es findet diese Störung der Dualität dadurch ihren Ausdruck, dass wir für die Massbestimmung im Punkte den von ihm nach dem imaginären, unendlich fernen Kugelkreise gehenden Kegel 2. Ordnung zu Grunde legen, dagegen für die Massbestimmung in der Ebene ihren Schnitt mit der unendlich fernen Ebene, also ein lineares Gebilde; und dieser Auszeichnung der metrischen Geometrie im Punkte

---

*) Möbius: Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Crelle's J. Bd. 18, p. 189; 1838.

**) Chasles: Bulletin des sciences math. p. Férussac, 1830; Comptes rendus, t. XVI, p. 1420, 1843; t. LI, 1860; t. LII, 1861. Vgl. auch Jonquières, Mélanges de géométrie pure, Paris 1856.

***) Resal: Traité de cinématique pure, Paris 1862, Chap. III und V. Aronhold: Grundzüge der kinematischen Geometrie; in den Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleisses in Preussen, Berlin 1872. Vgl. auch den bez. Abschnitt in Schell's Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1870, p. 7—99.

steht die Thatsache zur Seite, dass wir an ihn, als erzeugendes Element, unsere mechanischen Vorstellungen vorwiegend zu knüpfen pflegen. Man kann aber eine allgemeinere Massbestimmung concipiren, bei welcher das Gesetz der Dualität vollkommen gewahrt bleibt, und es hat nach den obigen Bemerkungen wohl ein gewisses Interesse, die Gestaltung der mechanischen Gesetze unter einer solchen Voraussetzung zu betrachten. In diesem Sinne habe ich die vorliegenden Untersuchungen durchgeführt, und so mögen sie als ein erster Versuch in der bezeichneten Richtung angesehen werden. Es treten dann Punkt und Ebene einander auch in metrischer Beziehung vollkommen gleichmässig als elementare Grössen gegenüber, und somit lehnt sich die ganze Darstellung auf das Engste an die projectivische Geometrie an.

Wir benutzen dabei nach dem Vorgange von Cayley*) statt des unendlich fernen imaginären Kegelschnittes eine allgemeine (unendlich fern zu denkende) Fläche 2. Ordnung als fundamentales Gebilde und *definiren als Entfernung zweier Punkte den mit einer willkürlich, aber fest gewählten Constanten c multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches durch sie und die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der Fundamentalfläche bestimmt ist*, und analog: *als Winkel zweier Ebenen den mit einer anderen willkürlich, aber ebenfalls fest gewählten Constanten c′ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches sie mit den beiden von ihrer Schnittlinie an jene Fläche gehenden Tangentenebenen bilden***). Ueber die Natur der Fundamentalfläche, ob sie geradlinig ist oder nicht, ob reell oder imaginär, machen wir zunächst keine bestimmte Voraussetzung; wir werden uns allerdings geometrisch stets so ausdrücken, als wenn sie reell und geradlinig wäre, aber wir brauchen uns die Veränderlichen dann nur als complexe Grössen zu denken, um in der Darstellung alle möglichen Fälle gleichzeitig zu übersehen.

Ein wesentlicher Unterschied der so begründeten Massbestimmung gegenüber den thatsächlich gegebenen Verhältnissen besteht darin, dass eine gerade Linie zwei unendlich ferne Punkte hat, dass man also zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt zwei Parallele ziehen kann. Es ist damit der Zusammenhang angedeutet, in welchem eine auf Grund unserer obigen Definitionen construirte Massgeometrie mit den verschiedenen von anderer Seite aufgestellten Parallelentheorien

---

*) Cayley: A sixth memoir upon quantics. Philos. Transactions, vol. 149. 1859.

**) Die Definition des Winkels als Logarithmus eines Doppelverhältnisses gab für specielle Massbestimmung Laguerre: Nouv. annales de math. 1853, p. 57. Unter *specieller Massbestimmung* ist hier und im Folgenden stets die thatsächlich gegebene zu verstehen.

steht, und in der That hat Herr Klein nachgewiesen*), dass die von Cayley begründete projectivische Massbestimmung diese Theorien umfasst, dass sie insbesondere bei reeller, nicht geradliniger Fundamentalfläche identisch ist mit der Massbestimmung, wie sie die sogenannte *Nicht-Euklidische* (oder imaginäre) Geometrie aufstellt; und es gelang ihm so, diese von Bolyai und Lobatschefsky**) begründeten, anscheinend ganz heterogenen Untersuchungen der projectivischen Betrachtungsweise zu unterwerfen. Hierdurch stehen die folgenden Entwicklungen mit den Arbeiten der Herren Schering und de Tilly***) in gewisser Beziehung; ersterer untersuchte auf Grund dieser *Nicht-Euklidischen* Parallelentheorie besonders die Potentialfunction, während de Tilly die Zusammensetzung der Bewegungen und Kräfte bearbeitete.

Andererseits zeigte Herr Beltrami †), dass diese *Nicht-Euklidische* Geometrie in ihrem planimetrischen Theile zusammenfällt mit der gewöhnlichen metrischen Geometrie auf einer Fläche von constantem, negativem Krümmungsmasse, so dass z. B. die Geraden der Ebene als kürzeste Linien einer solchen Fläche erscheinen; und als dann durch Publication der Arbeiten Riemann's der Begriff eines Krümmungsmasses auch für Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen bekannt wurde, entwickelte er, zu solchen Mannigfaltigkeiten übergehend ††), insbesondere, wie auch dem Raume von 3 Dimensionen in der *Nicht-Euklidischen* Geometrie ein constantes negatives

---

*) Klein: Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Ann. Bd. IV, 1871, p. 573. Es finden sich hier die Definitionen für Strecken und Winkel in der oben gegebenen Form, die noch etwas allgemeiner ist als die Cayley'sche. Die dort auftretende Constante c entspricht geradezu der von Gauss gebrauchten Grösse k, welche für die Euklidische Geometrie unendlich gross gesetzt werden muss. Vgl. weitere Ausführungen einiger Punkte in einer gleich betitelten Arbeit, ib. Bd. VI, p. 112.

**) Vgl. über die einschlägige Litteratur F. Klein a. a. O. Hinzuzufügen ist, dass diese Theorien neuerdings eine übersichtliche Bearbeitung gefunden haben, in Frankreich von Herrn Flye St. Marie: Etudes analytiques sur la théorie des parallèles, Paris 1871; und in Deutschland von Herrn J. Frischauf: Absolute Raumlehre nach Joh. Bolyai, Leipzig 1872.

***) Schering: Die Schwerkraft im Gaussischen Raume; Göttinger Nachrichten, 1870 und 1873. De Tilly: Etudes de mécanique abstraite; Mémoires couronnées etc. publiées par l'académie r. de Belgique, t. XXI, 1870. Es werden hier nur die einfachsten Fälle betrachtet, wo die Richtungen und Axen der Kräfte und Bewegungen durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen.

†) Risolutione di problema di riportare i punti di una superficie etc. Annali di Mat. Serie I, t. VII, 1866; und: Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giornale di Matem. 1868.

††) Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica, Serie II, t. II, 1868/69.

Krümmungsmass beigelegt wird*). Es steht dies mit den allgemeinen Untersuchungen im Zusammenhange, in denen man als Bogenelement die Quadratwurzel aus einer beliebigen, positiven quadratischen Function von den Differentialen der Coordinaten statt der Wurzel aus der Summe ihrer Quadrate zu Grunde legt, wie dies besonders die Herren Beltrami und Lipschitz gethan haben**).

Während die erwähnten Untersuchungen sich auf die allgemeinsten Probleme der Mechanik beziehen, und soweit sie kinematischer Natur sind, die allgemeinste endliche Bewegung eines Systems behandeln, ist es vielmehr der Zweck der vorliegenden Arbeit, die ersten Grundlagen einer projectivischen Auffassung der Mechanik zu geben; sie beschränken sich deshalb darauf, *unter den angeführten Voraussetzungen die Theorie der unendlich kleinen Bewegungen eines freien, unveränderlichen Systems und die der Kräfte, welche an einem solchen angreifen, vom rein projectivischen Standpunkte aus zu entwickeln****. Zu dem Zwecke war es nöthig, auch die metrischen Relationen zwischen 2 Geraden, d. h. deren absolute Invarianten in Bezug auf die Fundamentalfläche in Liniencoordinaten aufzustellen, wie es in § 1. geschieht. Die linearen Transformationen, welche diese Fläche in sich überführen†), stellen alsdann die Bewegungen des Raumes dar (wir betrachten dabei eine Bewegung stets als gleichzeitig auf alle Punkte

*) In der von uns benutzten Massb. drückt sich dies Krümmungsmass des Raumes nach Herrn Klein (l. c.) einfach durch obige Constante c aus.

**) Beltrami: Sulla teorica generale dei parametri differenziali. Memorie dell' academia di Bologna. Serie II, t. VII, 1869. Lipschitz: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Borchardt's J. Bd. 74, p. 116; 1871. Vgl. auch die Untersuchungen desselben in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, ib. Bd. 70 und 72, sowie Christoffel: ib. Bd. 70.

***) Es mag bemerkt werden, dass mir der Werth derartiger Verallgemeinerungen als ein rein mathematischer erscheint, dass mir daher in den folgenden Untersuchungen alle jene philosophischen Speculationen fern liegen, welche man in Betreff unserer Raumanschauung daran knüpfen könnte. Bei einer solchen Auffassung wird man von ihnen nicht mit Herrn Dühring (vgl. dessen Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1873, p. 488) eine der Mechanik drohende Untergrabung der geometrischen Principien zu befürchten brauchen.

†) Mit endlichen Transformationen einer Form 2. Grades in sich beschäftigten sich auch Hermite: Remarques sur une mémoire de M. Cayley, rélatif aux déterminants gauches, Cambridge and Dublin Math. J. t. IX, 1854, und Cayley: Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle même par des substitutions linéaires: Crelle's J. Bd. 50, 1855, p. 288. — Sur quelques propriétés des déterminants gauches, ib. Bd. 32, p. 119 und Bd. 50, p. 299. — A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function, Phil. Transactions, 1858, vol. 148.

des Raumes ausgedehnt); *es wird also hier zugleich eine Theorie der unendlich kleinen linearen Transformationen einer Fläche 2. Ordnung in sich selbst gegeben,* wodurch die rein algebraische Seite gekennzeichnet ist, welche unseren Ausführungen — unabhängig von ihrer mechanischen Bedeutung — anhaftet. Durch unendlich oft wiederholte unendlich kleine Transformationen erhalten wir solche Umformungen des Raumes, welche als Bewegungen aufzufassen sind; dieselben führen, so entstanden, natürlich gleichzeitig jedes System von Erzeugenden der Fundamentalfläche in sich über; und nur solche Transformationen dürfen wir daher als Bewegungen betrachten, d. h. nicht diejenigen, welche die beiden Systeme von Erzeugenden vertauschen*). Von den so charakterisirten Transformationen ausgehend, erhalten wir zunächst besonders die von Chasles und Möbius über Elementarbewegungen für specielle Massbestimmung gegebenen Sätze. Insbesondere erscheinen dabei zwei lineare Complexe als charakteristisch für eine unendlich kleine Bewegung, und im Anschluss daran ergiebt sich eine Theorie der metrischen Eigenschaften eines linearen Complexes, d. h. seiner Beziehungen zur Fundamentalfläche (§ 3.). Die erst in kanonischer Form gegebenen Untersuchungen werden sodann für allgemeine Coordinatenbestimmung gegeben und dadurch die betreffenden Bewegungen durch ihre 6 Coordinaten definirt (§ 4.). Nachdem noch die von den Punkten des Raumes beschriebenen und von dessen Ebenen umhüllten Curven und der durch die Tangenten dieser gebildete Complex 2. Grades, sowie dessen Beziehungen zu den linearen Complexen (§ 5.—8.) näher betrachtet sind, wird nach der Lage dieses Complexes gegen die Fundamentalfläche und nach dem Verhalten der Erzeugenden dieser bei der Bewegung eine Eintheilung der verschiedenen Bewegungsarten aufgestellt (§ 10.). Das Princip der Dualität zwischen unendlich kleinen Rotationen und Kräften giebt sodann das Mittel, auch die Gesetze für die Zusammensetzung der Kräfte (§ 11.) und Kraftsysteme, die Theorie der Momente (§ 12. und 13.) und die Bedingungen des Gleichgewichtes (§ 14.) für eine allgemeine projectivische Massbestimmung durchzuführen. Für alle diese Untersuchungen ist die zwiefache Form besonders charakteristisch, in der es erlaubt ist, alle Gesetze und Relationen auszusprechen, was eben in der vollkommen dualistischen Massbestimmung für die Geometrie im Punkte und in einer Ebene seinen Grund hat.

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn F. Klein und stand mit ihm während der Ausführung in steter Ver-

*) Vgl. Klein; Ueber d. sog. Nicht-Eukl. G. Math. Ann. IV, p. 600, und: Zur Mechanik starrer Körper, ib. p. 403.

bindung, so dass ich ihm wegen der Förderung meiner Arbeit in hohem Masse zu Dank verpflichtet bin.

§ 1.

Neigung und Moment zweier Geraden und zweier linearen Complexe gegen einander.

Für die oben eingeführte Massbestimmung wollen wir nun zunächst die analytischen Ausdrücke aufstellen.

Ist $\Omega = 0$ die Gleichung der Fundamentalfläche*), so wird *die Entfernung zweier Punkte x und y* (vgl. Klein a. a. O. Math. Annal. Bd. IV):

$$= c \cdot \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}} = 2\,ic \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

wo Ω_{xx}, Ω_{yy} diejenigen Ausdrücke bedeuten, welche entstehen, wenn man in Ω die Coordinaten x, resp. y der beiden Punkte einsetzt, und

$$\Omega_{xy} = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Omega_{xx}}{\partial x_i} y_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ist; ebenso wird, wenn $\Omega' = 0$ die Gleichung der Fundamentalfläche in Ebenencoordinaten bedeutet, *der Winkel zweier Ebenen u und v:*

$$= c' \log \frac{\Omega'_{uv} + \sqrt{\Omega'^2_{uv} - \Omega'_{uu}\,\Omega'_{vv}}}{\Omega'_{uv} - \sqrt{\Omega'^2_{uv} - \Omega'_{uu}\,\Omega'_{vv}}} = 2\,ic' \arccos \frac{\Omega'_{uv}}{\sqrt{\Omega'_{uu}\,\Omega'_{vv}}}.$$

In den folgenden Untersuchungen soll jedoch immer

$$c = c' = \frac{i}{2} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

angenommen werden, damit die Summe der Winkel im Strahlbüschel gleich 2π wird. Es wird dadurch das Wesen der Sache im Allgemeinen nicht geändert; nur beim Uebergange zur speciellen Massbestimmung müssen wir die Constanten c und c' wieder einführen, da hier $c' = \frac{i}{2}$ und $c = \infty$ gesetzt wird. Aus dem Gleichsetzen beider Grössen folgt dann:

Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem Winkel ihrer absoluten Polarebenen, wenn wir als *absolute Polarebene* eines Punktes seine Polarebene in Bezug auf die Fundamentalfläche (*the absolute* nach Cayley) bezeichnen. Ebenso ist unter der *absoluten Polare*

*) Die Coefficienten von Ω sind im Folgenden immer als reelle Grössen vorausgesetzt.

einer Geraden die ihr in Bezug auf diese Fläche conjugirte Gerade verstanden.

Wir werden bei unseren Erörterungen besonders die metrischen Relationen, welche die gegenseitige Lage zweier Geraden bestimmen, nöthig haben, und wir wollen daher hier noch die entsprechenden Ausdrücke in Liniencoordinaten aufstellen.

Schneiden sich zunächst die beiden Geraden (p_{ik} und p_{ik}'), so ist ihr Winkel gleich dem mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches sie mit den beiden Tangenten bilden, die von ihrem Schnittpunkte an den Schnitt ihrer Ebene mit der Fundamentalfläche gehen. Ist also

$$\Phi = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche in Liniencoordinaten, oder symbolisch*)

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\,(\Sigma\,(a_i b_k - b_i a_k)\,p_{ik})^2,$$

wenn

$$\Omega = a_x{}^2 = b_x{}^2$$

gesetzt ist, so wird jenes Doppelverhältniss gleich dem Quotienten der beiden Wurzeln der Gleichung:

$$\Phi_{pp} + 2\,\lambda\Phi_{pp'} + \lambda^2\Phi_{p'p'} = 0\,,$$

und *der Winkel der beiden Geraden p und p':*

$$= \frac{i}{2}\log\frac{\Phi_{pp'} + \sqrt{\Phi_{pp'}^2 - \Phi_{pp}\cdot\Phi_{p'p'}}}{\Phi_{pp'} - \sqrt{\Phi_{pp'}^2 - \Phi_{pp}\cdot\Phi_{p'p'}}} = \arccos\frac{\Phi_{pp'}}{\sqrt{\Phi_{pp}\cdot\Phi_{p'p'}}}\;{}^{**}),$$

ein Ausdruck, welcher mit dem der speciellen Massbestimmung in seiner Bildung völlig übereinstimmt. Es entstehen hier wieder Φ_{pp} und $\Phi_{p'p'}$ aus Φ durch Einsetzen der Coordinaten p_{ik} und p'_{ik}, und es ist

$$\Phi_{pp'} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial\,\Phi_{pp}}{\partial p_{ik}}\,p'_{ik}\,.$$

Schneiden sich die beiden betrachteten Geraden nicht, so dienen uns in der gewöhnlichen Massgeometrie zwei Ausdrücke zur Charakterisirung ihrer gegenseitigen Lage: ihre *Neigung* und ihr *Moment*. Die erstere ist dann analytisch ebenso definirt, wie der Winkel

---

*) Ich bezeichne die Liniencoordinaten immer durch p_{ik}, insofern sie aus Punktcoordinaten, durch q_{ik}, insofern sie aus Ebenencoordinaten entstanden gedacht sind.

**) Alle Linien, welche gegen eine dieselbe Neigung (vgl. unten) haben, bilden also einen Complex 2. Grades

$$\mathrm{K}\,\Phi_{pp'}^2 = \Phi_{pp}\,\Phi_{p'p'}\,;$$

auf eine lineare Congruenz dieses Complexes werden wir in § 12. geführt werden.

zweier sich schneidender Geraden; wir werden also auch bei allgemeiner Massbessimmung den mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Quotienten bezeichen, der aus den Wurzeln der Gleichung:

$$(1)\qquad \Phi_{pp} + 2\lambda\Phi_{pp'} + \lambda^2\Phi_{p'p'} = \Phi_{p+\lambda p',\, p+\lambda p'} = 0$$

zu bilden ist.

Geometrisch bedeutet diese Gleichung aber, wie Herr Pasch gezeigt hat*), *dass der Complex mit den Coordinaten* $p + \lambda p'$ *zu seinem absolut conjugirten Complexe in Involution liegt*, wobei der zweite Complex von den absoluten Polaren der Geraden des ersten gebildet wird**). Man erkennt dies leicht in folgender Weise: Sind π_{ik}, π'_{ik} die Coordinaten der absoluten Polaren von p, p', so ist symbolisch:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varrho\pi_{12} = \frac{1}{2}(a_3 b_4 - b_3 a_4)\,\Sigma(a_i b_k - b_i a_k)\,p_{ik} \\ \varrho\pi_{34} = \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1 a_2)\,\Sigma(a_i b_k - b_i a_k)\,p_{ik}, \text{ u. s. w.,} \end{cases}$$

und ähnliche Gleichungen bestehen zwischen den π'_{ik} und p'_{ik}. Aus ihnen folgt aber:

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho\,(\pi, p) = \frac{1}{2}\left\{\Sigma(a_i b_k - b_i a_k)\,p_{ik}\right\}^2 = \Phi_{pp} \\ \varrho\,(\pi', p') = \frac{1}{2}\left\{\Sigma(a_i b_k - b_i a_k)\,p'_{ik}\right\}^2 = \Phi_{p'p'} \end{cases}$$

$$(4)\quad \varrho(\pi, p') = \varrho(p, \pi') = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(a_i b_k - b_i a_k)p_{ik}\cdot\Sigma(a_r b_s - b_r a_s)p'_{rs} = \Phi_{pp'},$$

wenn

$$(p, \pi) = p_{12}\pi_{34} + p_{34}\pi_{12} + p_{13}\pi_{42} + p_{42}\pi_{13} + p_{14}\pi_{23} + p_{23}\pi_{14}\text{***})$$

gesetzt wird, und (p, π'), (p', π), (p', π') analog definirt sind.

Durch diese Relationen geht die quadratische Gleichung für λ über in:

$$(5)\qquad (p, \pi) + \lambda\left\{(p, \pi') + (p', \pi)\right\} + \lambda^2(p', \pi') = 0\,,$$

und der links stehende Ausdruck ist jetzt identisch mit $(p + \lambda p', \pi + \lambda\pi')$; sein Verschwinden besagt also in der That, dass der Complex mit den Coordinaten $p_{ik} + \lambda p'_{ik}$ zu dem Complexe mit den Coordinaten

---

*) Vgl. Borchardt's J. Bd. 75, p. 144 f. Es ist diese Relation im Texte noch einmal abgeleitet, da wir die hier benutzten Transformationen noch wiederholt anwenden werden.

**) Es folgt daraus auch: *Sind 2 Gerade einander conjugirt in Bezug auf den einen Complex, so sind es ihre absoluten Polaren in Bezug auf den anderen.* Diese Beziehung wird uns unten nützlich sein. Ueber den Begriff der Coordinaten eines linearen Complexes vgl. Klein: Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. Math. Ann. Bd. II, p. 366.

***) Wir werden diese Bezeichnung auch im Folgenden stets anwenden und setzen insbesondere:

$$\tfrac{1}{2}(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}\,.$$

$\pi_{ik} + \lambda \pi'_{ik}$ in Involution*) liegt. Die Gleichung (5) sagt nun aus, dass es im Allgemeinen in einer zweigliedrigen Gruppe von Complexen zwei giebt, welche mit ihren absolut conjugirten in besagter Beziehung stehen; und, sind λ' und λ'' die beiden Wurzeln dieser Gleichung, so bedeutet (wie sogleich gezeigt werden soll) $\frac{\lambda'}{\lambda''}$ das Doppelverhältniss, welches die Schnittpunkte der Geraden p und p' mit einer beliebigen Ebene und die beiden dieser Ebene bez. in den Complexen $p + \lambda' p'$ und $p + \lambda'' p'$ zugeordneten Punkte bestimmen.

*Wir definiren demnach als die Neigung zweier Geraden gegen einander den mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, gebildet aus den Schnittpunkten einer beliebigen Ebene mit ihnen und aus den beiden Punkten, welche dieser Ebene in zwei linearen Complexen zugehören. Diese letzteren werden dadurch bestimmt, dass sie der durch die zwei Geraden bestimmten zweigliedrigen Gruppe***) *angehören und mit ihren absolut conjugirten Complexen in Involution liegen.* Wenn sich p und p' schneiden, geht diese Gruppe in das ebene Strahlbüschel über; und in der That schneiden die beiden Tangenten desselben an die Fundamentalfläche ihre absoluten Polaren, was bei speciellen Complexen der involutorischen Lage entspricht. Unsere Definition fällt also dann mit der obigen für den Winkel zweier Geraden zusammen; sie ist aber auch unabhängig davon, ob die Grössen p_{ik}, p'_{ik} Coordinaten zweier Geraden sind oder selbst schon solche von linearen Complexen; wir werden daher auch von *von der Neigung zweier linearen Complexe gegen einander sprechen können.* Um mich hier einfacher auszudrücken, will ich als *Doppelverhältniss von 4 linearen Complexen einer zweigliedrigen Gruppe* das Doppelverhältniss der 4 Punkte bezeichnen, welche einer beliebigen Ebene durch die 4 Complexe zugeordnet sind (diese Punkte liegen immer auf einer Geraden der zugehörigen Congruenz), oder, was dasselbe ist, das der 4 Ebenen, welche einem beliebigen Punkte entsprechen. Sind P_{ik}, P'_{ik}, $P_{ik} + \lambda' P'_{ik}$, $P_{ik} + \lambda'' P'_{ik}$ die 4 Complexe***), so sind die einer Ebene u zugehörigen 4 Punkte bestimmt durch:

---

*) Vgl. Klein: Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. Bd. II, p. 198.

**) Die Geraden p und p' sind dann die Directricen der Congruenz, welche der zweigliedrigen Gruppe gemeinsam ist, π und π' die der absolut conjugirten Congruenz.

***) Es sollen die Coordinaten von linearen Complexen immer mit grossen Buchstaben bezeichnet werden, und zwar mit P_{ik}, wenn ihre Gleichung ist:

$$(P, p) = 0 ,$$

$$\begin{aligned} \mu x_k &= P_{1k} u_1 + P_{2k} u_2 + P_{3k} u_3 + P_{4k} u_4 \\ \mu y_k &= P'_{1k} u_1 + P'_{2k} u_2 + P'_{3k} u_3 + P'_{4k} u_4 \\ z_k &= x_k + \lambda' y_k \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ P_{kk} = 0, \ P'_{kk} = 0 \end{matrix}\right) \\ t_k &= x_k + \lambda'' y_k , \end{aligned}$$

und also ist $\frac{\lambda'}{\lambda''}$ das erwähnte Doppelverhältniss der 4 Complexe; sind 2 derselben specielle, so geht dies in das für die Neigung der beiden Geraden benutzte Doppelverhältniss über.

Es ist also die Neigung zweier linearer Complexe gleich dem mit $\frac{i}{2}$ *multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches sie mit den beiden Complexen ihrer zweigliedrigen Gruppe bilden, die mit ihren absolut conjugirten Complexen in Involution liegen*, d. h.

$$= \frac{i}{2} \log \frac{\Phi_{PP'} + \sqrt{\Phi^2_{PP'} - \Phi_{PP}\Phi_{P'P'}}}{\Phi_{PP'} - \sqrt{\Phi^2_{PP'} - \Phi_{PP}\Phi_{P'P'}}} = \arccos \frac{\Phi_{PP'}}{\sqrt{\Phi_{PP} \cdot \Phi_{P'P'}}} \ ^{*)}.$$

Insbesondere kann man daher zwei lineare Complexe zu einander rechtwinklig nennen, wenn

$$\Phi_{PP'} = 0$$

wird, d. h. wenn der eine mit dem absolut conjugirten des anderen in Involution liegt, und *also sind zwei Gerade zu einander rechtwinklig, wenn die eine die absolute Polare der andern schneidet.*

---

mit Q_{ik}, wenn diese in der Form

$$\Sigma Q_{ik} p_{ik} = (Q, q) = 0$$

geschrieben werden kann.

*) Es bedeuten hier Φ_{PP} etc. die Ausdrücke, welche aus Φ_{pp} etc. entstehen, wenn man statt der Liniencoordinaten Complexcoordinaten einsetzt. — Es ist hier ferner, wenn Π_{ik}, Π'_{ik} die Coordinaten der absolut conjugirten Complexe zu P_{ik} und P'_{ik} sind, nach (3) und (4):

$$\frac{\Phi_{PP'}}{\sqrt{\Phi_{PP} \cdot \Phi_{P'P'}}} = \sqrt{\frac{(P, \Pi')\ (\Pi, P')}{(P, \Pi)\ (P', \Pi')}},$$

und es ist dies, wenn man unter den P_{ik} Liniencoordinaten versteht, ein Ausdruck, der sich, wenn die 4 Linien Erzeugende desselben Hyperboloids sind, auch durch Doppelverhältnisse deuten lässt, wie mir zufällig durch eine mündliche Mittheilung des Herrn Stolz an Herrn Klein bekannt geworden ist. — Es mag bemerkt werden, dass wir Φ_{PP} ausdrücklich in der Form

$$\Phi_{PP} = \tfrac{1}{2} \left\{ \Sigma (a_i b_k - b_i a_k) P_{ik} \right\}^2$$

annehmen, während man in der Gleichung

$$\Phi_{pp} = 0,$$

wo die p_{ik} Liniencoordinaten sind, den Ausdruck (p, p) multiplicirt mit einer beliebigen Constanten hinzufügen kann, ohne die Gleichung zu ändern.

Wir haben noch zu zeigen, wie die hier gegebenen Definitionen in die der speciellen Massbestimmung übergehen. Die Liniencoordinaten will ich alsdann in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho p_{12} &= x - x' & \varrho p_{34} &= yz' - zy' \\ \varrho p_{13} &= y - y' & \varrho p_{42} &= zx' - xz', \\ \varrho p_{14} &= z - z' & \varrho p_{23} &= xy' - yx', \end{aligned}$$

so dass die *Gleichung des imaginären Kugelkreises in Liniencoordinaten*, d. h. die Bedingung, dass eine Gerade p_{ik} ihn schneidet, wird:

$$p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0\,.$$

Einem linearen Complexe ist in Bezug auf ihn kein bestimmter anderer polar zugeordnet; einer Geraden entspricht aber auch hier eine andere: die conjugirte Polare ihres unendlich fernen Punktes in Bezug auf den Kugelkreis, und ich will diese hier als *absolute Polare* bezeichnen; es ist diese Zuordnung nur insofern unbestimmt, dass alle parallelen Linien dieselbe absolute Polare haben. Wir wollen hieran den obigen Ueberlegungen entsprechende anknüpfen. Die Coordinaten des unendlich fernen Punktes einer Geraden sind proportional zu den Cosinus ihrer Richtung, d. h.

$$x : y : z = p_{12} : p_{13} : p_{14}\,,$$

und also sind die Coordinaten von deren absoluter Polaren:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu\pi_{12} &= 0 & \mu\pi_{34} &= p_{12} \\ \mu\pi_{13} &= 0 & \mu\pi_{42} &= p_{13} \\ \mu\pi_{14} &= 0 & \mu\pi_{23} &= p_{14}\,. \end{aligned} \right.$$

Einer zweiten Geraden p' entspricht in derselben Weise eine absolute Polare π', und somit werden wir einem Complexe $p + \lambda p'$ die Gerade $\pi + \lambda\pi'$ zuordnen, d. h. jedem Complexe einer zweigliedrigen Gruppe eine Gerade des in der unendlich fernen Ebene gelegenen Strahlbüschels, welches durch die absoluten Polaren der Directricen der zugehörigen Congruenz bestimmt ist. Die beiden Complexe der Gruppe, welche mit ihren absolut conjugirten in Involution liegen, werden dann diejenigen, welche die ihnen zugehörigen Geraden selbst enthalten; und *in diesem Sinne können wir unsere obige Definition für die gegenseitige Neigung von zwei linearen Complexen auch für specielle Massbestimmung beibehalten.* In der That wird hier nach (6):

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu\,(P, \Pi) = P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{14}^2 \\ &\mu\,(P', \Pi') = P_{12}'^2 + P_{13}'^2 + P_{14}'^2 \\ &\mu\,(P, \Pi') = \mu\,(P', \Pi) = P_{12}P_{12}' + P_{13}P_{13}' + P_{14}P_{14}', \end{aligned} \right.$$

und also die *Neigung der beiden Complexe:*

$$= \arccos \frac{P_{12}P_{12}' + P_{13}P_{13}' + P_{14}P_{14}'}{\sqrt{P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{14}^2}\sqrt{P_{12}'^2 + P_{13}'^2 + P_{14}'^2}},$$

ein Ausdruck, der, wenn P und P' einzelne Gerade sind, mit dem gebräuchlichen für die Neigung zweier Geraden übereinstimmt.

Das Moment zweier Geraden in Bezug auf einander, d. h. das Product ihres kürzesten Abstandes in den Sinus ihrer Neigung, scheint als solches bei allgemeiner Massbestimmung nicht so unmittelbar darstellbar zu sein. Das Wesentliche in dem gebräuchlichen Ausdrucke ist jedoch, dass er bestimmt ist, eine invariante Beziehung der beiden Geraden zu ihren in der unendlich fernen Ebene gelegenen absoluten Polaren zu geben, denn es ist die Linie kürzester Entfernung die durch den Schnittpunkt dieser beiden Polaren gehende Gerade, welche beide gegebene Linien trifft. Wir werden daher auch bei allgemeiner Massbestimmung das Moment als eine invariante Beziehung der beiden Geraden zu ihren absoluten Polaren auffassen, und zwar wollen wir statt der Geraden sogleich zwei lineare Complexe P und P' annehmen: *Wir definiren dann als Moment zweier linearen Complexe gegen einander den Cosinus der Neigung des einen gegen den absolut conjugirten des andern.* Zwischen den Coordinaten P und Π, P' und Π' bestehen dann die Gleichungen (2); lösen wir dieselben nach Π, Π' auf, so müssen wir wegen der vollkommenen Reciprocität, welche zwischen den Π und P besteht, wieder Gleichungen von der Form (2) erhalten, d. h. es ist:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varrho' \, P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\gamma b_\delta - b_\gamma a_\delta)\,\Sigma\,(a_i b_k - b_i a_k)\,\Pi_{ik} \\ \varrho' \, P'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a \;\, b_\delta - b_\gamma a_\delta)\,\Sigma\,(a_i b_k - b_i a_k)\,\Pi'_{ik}\,, \end{cases}$$

wo statt der α, β, γ, δ die Indices 1, 2, 3, 4 in cyclischer Vertauschung zu setzen sind. Um den Zusammenhang von ϱ und ϱ' zu finden, setzen wir diese Werthe von P wieder in die Gleichungen (2) ein, wobei wir dann statt der a, b einmal neue, gleichbedeutende Symbole c, d einführen müssen; wir erhalten dadurch:

$$\begin{aligned} \varrho\varrho'\Pi_{12} &= \tfrac{1}{4}(a_3 b_4 - b_3 a_4)\cdot \Sigma(a_\alpha b_\beta - b_\alpha a_\beta)(c_\gamma d_\delta - d_\gamma c_\delta)\cdot \Sigma(c_i d_k - d_i c_k)\Pi_{ik} \\ &= \tfrac{1}{4}(a_3 b_4 - b_3 a_4)\,(abcd)\cdot \Sigma\,(c_i d_k - d_i c_k)\,\Pi_{ik}, \end{aligned}$$

und 5 ähnliche Gleichungen. In der rechts stehenden Summe ist aber, wenn man die Symbole durch die wirklichen Coefficienten a_{ik} ersetzt:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & 0 & 0 \\ b_\alpha & b_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\gamma & c_\delta \\ 0 & 0 & d_\gamma & d_\delta \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & a_{\alpha 3} & a_{\alpha 4} \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & a_{\beta 3} & a_{\beta 4} \\ a_{\gamma 1} & a_{\gamma 2} & a_{\gamma 3} & a_{\gamma 4} \\ a_{\delta 1} & a_{\delta 2} & a_{\delta 3} & a_{\delta 4} \end{vmatrix};$$

das Product zweier socher Determinanten verschwindet also, sobald irgend zwei der Indices α, β, γ, δ einander gleich sind; es fallen

somit in obiger Summe alle Glieder bis auf eins fort, und für dieses geht die rechts stehende Determinante in die Discriminante Δ der Fundamentalfläche über; es ist daher

$$\varrho\varrho'\Pi_{12} = \Delta\Pi_{12},$$

oder

(10) $$\varrho\varrho' = \Delta.$$

Aus den Gleichungen (8) findet man nun

$$\varrho'(P, \Pi) = \Phi_{\Pi\Pi},$$

und hieraus wegen (3) und (10):

(11) $$\Delta\Phi_{\Pi\Pi} = \varrho'^2\Phi_{PP},$$

und ebenso aus (8), (9) und (10)

(12) $$\begin{aligned}\varrho'^2(P, P') &= \varrho'\Phi_{P'\Pi} \\ &= \tfrac{1}{4}(abcd)\,\Sigma(c_i d_k - d_i c_k)\Pi'_{ik}\cdot\Sigma(a_r b_s - b_r a_s)\Pi_{rs} \\ &= \Delta(\Pi, \Pi'),\end{aligned}$$

oder

(13) $$\varrho'(P, P') = \varrho(\Pi, \Pi').$$

Unter Berücksichtigung dieser Relationen wird *das gegenseitige Moment der Complexe P und P'*:

$$= \frac{\Phi_{P\Pi'}}{\sqrt{\Phi_{PP}\cdot\Phi_{\Pi'\Pi'}}} = \frac{\Phi_{\Pi P'}}{\sqrt{\Phi_{P'P'}\,\Phi_{\Pi\Pi}}} = \frac{\sqrt{\Delta}(P, P')}{\sqrt{\Phi_{PP}\,\Phi_{P'P'}}}.$$

Es ist hier wieder der arccos des Momentes gleich dem mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, gebildet von dem einen Complexe, dem absolut conjugirten des andern und den beiden Complexen ihrer zweigliedrigen Gruppe, welche mit ihren absolut conjugirten in Involution liegen. Die beiden letzteren bestimmen sich hier durch die Gleichung:

(14) $$\begin{aligned}0 = (P + \lambda\varrho\Pi', \Pi + \lambda\varrho' P') = (P, \Pi) &+ \lambda[\varrho(\Pi, \Pi') + \varrho'(P, P')] \\ &+ \lambda^2\varrho\varrho'(P', \Pi').\end{aligned}$$

In der That ist dann wegen der soeben aufgestellten Relationen, wenn λ' und λ'' die Wurzeln der letzten Gleichung sind:

$$\frac{i}{2}\log\frac{\lambda'}{\lambda''} = \arccos\frac{1}{2}\frac{\varrho'(P, P') + \varrho(\Pi, \Pi')}{\sqrt{(P, \Pi)\cdot(P', \Pi')}} = \arccos\frac{\sqrt{\Delta}(P, P')}{\sqrt{\Phi_{PP}\cdot\Phi_{P'P'}}}.$$

Ordnen wir bei specieller Massbestimmung wieder einer zweigliedrigen Gruppe von linearen Complexen $(P + \lambda P')$ ein in der unendlich fernen Ebene gelegenes Strahlbüschel $(\Pi + \lambda\Pi')$ in obiger Weise zu, so besteht die Gleichung (14) fort; es ist nur in ihr

$$(\Pi, \Pi') = 0$$

zu setzen, während der zuerst für das Moment gegebene Ausdruck wegen des Verschwindens von Δ unbestimmt werden würde*). Es ist ferner, wenn wir wieder $x_1 = 0$ zur unendlich fernen Ebene nehmen:

$$\mu\,(P, \Pi) = P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{14}^2$$
$$\mu\,(P', \Pi') = P_{12}'^2 + P_{13}'^2 + P_{14}'^2,$$

und demnach wird das Moment:

$$= \frac{\frac{1}{2}(P, P')}{\sqrt{P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{14}^2}\ \sqrt{P_{12}'^2 + P_{13}'^2 + P_{14}'^2}}\ **).$$

Wir können also obige geometrische Definition desselben auch jetzt beibehalten; das darin auftretende Doppelverhältniss wird nunmehr gebildet von dem einen gegebenen Complexe, der dem andern zugeordneten Geraden des unendlich fernen Strahlbüschels und den beiden Complexen der durch die gegebenen bestimmten Gruppe, welche die ihnen zugeordneten Strahlen jenes Büschels selbst enthalten. Sind die Complexe specielle, so wird an dieser Definition im Wesentlichen nichts geändert; der obige Ausdruck giebt dann unmittelbar das halbe Product der kürzesten Entfernung in den Sinus der Neigung.

Setzt man

$$P_{ik} = P_{ik}',$$

so erhält man *das Moment des linearen Complexes in Bezug auf sich selbst;* für specielle Massbestimmung ist dies gleich dem Parameter des Complexes nach Plücker's Bezeichnung. Die geometrische Bedeutung desselben für allgemeine Massbestimmung werden wir in § 5. an einer kanonischen Form erkennen.

Statt zwei Gerade oder zwei lineare Complexe einander gegenüberzustellen, kann man natürlich auch Neigung und Moment einer Geraden gegen einen Complex nach den gegebenen Definitionen bestimmen; insbesondere werden wir gelegentlich in § 13. sehen, wie sich diese Ausdrücke für zwei Complexe zurückführen lassen auf die entsprechenden für gewisse ausgezeichnete Gerade und deren Neigung und Moment gegen die betreffenden Complexe.

---

*) Auch Φ_{pp} würde identisch verschwinden, da jetzt jede Gerade die unendlich ferne Ebene in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet; wir würden also $\frac{0}{0}$ erhalten.

**) Dieser Ausdruck lässt sich, abgesehen von dem Factor $\frac{1}{2}$, auf die Form

$$\Delta \sin\varphi + (K + K')\cos\varphi$$

bringen, welche Herr Klein (Math. Ann. Bd. II, p. 368) als Moment zweier Complexe bezeichnet; Δ ist die kürzeste Entfernung ihrer Hauptaxen, φ die Neigung derselben; K und K' sind die Parameter der beiden Complexe.

§ 2.

Die kanonische Form der Transformation.

Wenden wir uns nunmehr zur Betrachtung der linearen Transformationen der Fläche in sich selbst, welche an Stelle der Bewegungen treten, so wird es sich empfehlen, sie zunächst in der kanonischen Form darzustellen, und wir haben also die Lage des fest bleibenden Tetraëders gegen die Fläche zu bestimmen. Nach einer oben gemachten Bemerkung muss die Transformation jede Schaar von Erzeugenden der Fläche in sich überführen, d. h. jede einzelne dieser Geraden sich so bewegen, dass sie in ihrer neuen Lage wieder eine Erzeugende derselben Art ist; wir haben so zwei Systeme von je einfach unendlich vielen Geraden, d. h. zwei rationale lineare Mannigfaltigkeiten, deren jede in sich verschoben wird, und es bleiben folglich nach dem Correspondenz-Principe von Chasles im Allgemeinen*) zwei Erzeugende jeder Art fest; sie bestimmen durch ihre vier Schnittpunkte die Ecken jenes Tetraëders, und dieses wollen wir der Coordinatenbestimmung zu Grunde legen. Alsdann ist die Gleichung der Fläche von der Form:

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0 .$$

Die beiden Kanten, bestimmt als Schnittlinien der Ebenen $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sind conjugirte Polaren in Bezug auf die Fläche, und die vier Ebenen des Tetraëders berühren dieselbe bezüglich in den vier Ecken.

Gründen wir nun auf die Fläche eine projectivische Massbestimmung, so werden wir diejenigen Bewegungen des Raumes, welche dies Tetraëder ungeändert lassen, durch eine Transformation von der Form

$$\rho x_i = \alpha_i y_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

darstellen. Damit diese die Fläche und auf ihr die vier Geraden ungeändert lässt, müssen wir noch die Bedingung:

$$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3 \tag{2}$$

hinzufügen. Durch eine solche Transformation wird aber auch jede Fläche des Büschels**)

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0 \tag{3}$$

---

*) Diejenigen Fälle, in denen eine Anzahl von Ecken und Seiten des Tetraëders zusammenfallen, oder dasselbe unbestimmt wird, werde ich in § 10. näher behandeln.

**) Führt also eine lineare Transformation *eine* Fläche 2. Ordnung in sich über, so steht sie gleich zu unendlich vielen solchen Flächen in dieser Beziehung.

in sich übergeführt, d. h. *ein jeder Punkt des Raumes bewegt sich auf der durch ihn und die vier auf der Fundamentalfläche gelegenen Kanten des Tetraëders gehenden Fläche 2. Ordnung; dies Flächenbüschel vertritt somit die bei specieller Massbestimmung auftretenden Cylinderflächen.* Da die beiden anderen, sich gegenüberliegenden Kanten des Tetraëders natürlich auch fest bleiben, können wir uns die Bewegung durch eine gleichzeitige Verschiebung und Drehung in Bezug auf jede von ihnen entstanden denken. Es ist nämlich *eine jede Verschiebung nach einer Geraden identisch mit einer Drehung um deren absolute Polare.**) Denn bei der Bedingung

$$\alpha_2 = \alpha_3$$

geht jede Ebene des Büschels

$$(4) \qquad x_2 + \varkappa x_3 = 0$$

in sich über, d. h. die Bewegung besteht in einer Verschiebung nach der Geraden $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; gleichzeitig bleibt aber auch jeder Punkt der Reihe

$$u_2 + \lambda u_3 = 0$$

fest, d. h. die Bewegung besteht in einer Drehung um die Gerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, die absolute Polare der ersteren.

Eine Transformation, welche gleichzeitig das Ebenenbüschel (4) und das Flächenbüschel (3) in sich überführt, und zwar jede Ebene jenes Büschels, muss aber auch die Schnittcurven beider ungeändert lassen, und somit erhalten wir den Satz:

*Bei einer Verschiebung nach einer Geraden bewegt sich jeder Punkt auf einem Kegelschnitte, dessen Ebene diese Gerade enthält, und welcher den in seiner Ebene liegenden unendlich fernen Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit der Directrix der Verschiebung berührt***); *die Ebenen dieser Kegelschnitte stehen daher senkrecht zu der absoluten Polare dieser Geraden, um welche sich der Raum gleichzeitig dreht. Jede Ebene des Raumes umhüllt einen Kegel 2. Ordnung, dessen Spitze auf dieser Polare liegt, und welcher den von seiner Spitze an die Fundamentalfläche gehenden Tangentenkegel längs zweier Geraden berührt;* in diesen Geraden berührt er gleichzeitig die beiden von der Axe der Rotation an jene Fläche gehenden Tangentenebenen. Man sieht, wie hier die Dualität

*) Vgl. Schering: die Schwerkraft im Gaussischen Raume. Göttinger Nachrichten 1870, p. 311.

**) Es sind dies die von Herrn de Tilly als *lignes équidistantes* bezeichneten Curven; er entdeckt an ihnen einige Eigenschaften, welche sie mit den Kegelschnitten gemein haben, ohne sie jedoch geradezu als solche zu erkennen. — Den entsprechenden Satz für die Bewegung einer Ebene in sich gab Herr Klein (a. a. O. Math. Ann. IV. p. 602). Die hier auftretenden Kegelschnitte entsprechen den Kreisen der speciellen Massbestimmung.

vollkommen gewahrt bleibt; sobald wir also die eine Art der Bewegung betrachtet haben, können wir die entsprechenden Sätze für die andere Art sofort aufstellen.

Aus diesen Bemerkungen, sowie aus dem Umstande, dass wir im Allgemeinen jede Bewegung als Transformation in obiger kanonischer Form darstellen können, ergiebt sich ferner:

*Jede Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems ist äquivalent einer Drehung um eine Gerade und einer gleichzeitigen Verschiebung nach derselben**) (wobei ich statt dieser Geraden stets auch deren absolute Polare wählen kann). Die Curve, auf welcher sich dabei jeder Punkt bewegt, und welche auf der durch den Punkt gehenden Fläche des Büschels (3) liegt, will ich als *projectivische Schraubenlinie*, die Bewegung selbst als eine *Schraubenbewegung*, die beiden einander absolut conjugirten Kanten des Tetraëders als *Hauptaxen der Bewegung* bezeichnen. Die Eigenschaften dieser Schraubencurven werden sich unten (§ 6.) nach Betrachtung unendlich kleiner Transformationen leicht ergeben.

Dass wir jede Transformation von der Form (1) unter der Bedingung (2) als Bewegung auffassen können, ist sofort klar, da durch sie die Massverhältnisse des Raumes nicht geändert werden; und die einzige Transformationsart, welche dies ebenfalls leistet, nämlich diejenige, welche einer Figur eine ihr invers congruente zuordnet, ist durch den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen von vornherein ausgeschlossen. Eine solche würde sich in kanonischer Form z. B. durch die folgenden Gleichungen darstellen:

$$\varrho x_1 = \alpha_4 y_4 \qquad \varrho x_3 = \alpha_2 y_2$$
$$\varrho x_2 = \alpha_3 y_3 \qquad \varrho x_4 = \alpha_1 y_1\,,$$

wodurch ebenfalls jede Fläche des Büchels

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0$$

ungeändert bleibt, sobald wieder die Bedingung

$$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3$$

erfüllt ist.

§ 3.

Der lineare Complex als Bild einer unendlich kleinen Bewegung.

Indem wir uns hier auf die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen beschränken, werden wir zur Darstellung derselben *unendlich*

---

*) Für spec. Massbest. gab diesen Satz zuerst Chasles: Bulletin universelle des sciences math. p. Férussac Nov. 1830, und Correspondance math. de Bruxelles t. VII. p. 352.

kleine Transformationen der Fundamentalfläche in sich selbst untersuchen müssen. Wiederholen wir die durch die Gleichungen (1) in § 1. gegebene Transformation λ mal nach einander, so erhalten wir

$$\varrho\, y_i = \alpha_i^\lambda\, x_i.$$

Die entsprechende unendlich kleine Transformation ergiebt sich hieraus, wenn wir λ unendlich klein, etwa gleich $d\lambda$ nehmen, $x_i + dx_i$ statt ϱy_i setzen und rechts nach Potenzen von $d\lambda$ entwickeln. Man findet alsdann

$$(1)\qquad \begin{cases} dx_i = \log \alpha_i x_i\, d\lambda\,, \text{ oder} \\ dx_i = a_i d\lambda\,, \end{cases}$$

wo nun die Bedingungsgleichung übergeht in:

$$(2)\qquad a_1 + a_4 = a_2 + a_3\,.$$

Bei einer solchen unendlich kleinen Bewegung schreitet jeder Punkt des Raumes auf einer Geraden fort, und jede Ebene dreht sich um eine solche. Letztere ist bestimmt als Schnittlinie zweier entsprechender unendlich naher Ebenen, und ihre sechs Coordinaten sind demnach:

$$\sigma q_{ik} = u_i(u_k + du_k) - u_k(u_i + du_i) = -\, u_i u_k (a_k - a_i)\, d\lambda\,,$$

wo wir das $-\,d\lambda$ in den Factor σ eingehen lassen können, also:

$$(3)\qquad \sigma q_{ik} = u_i u_k (a_k - a_i)\,.$$

Wir wollen diese Gerade nach dem Vorgange von Chasles*) die *Charakteristik der Ebene u* nennen, und ebenso die Verbindungslinie zweier einander unendlich naher entsprechender Punkte, deren Coordinaten durch

$$(4)\qquad \varrho p_{ik} = x_i x_k (a_k - a_i)$$

gegeben sind, die *Charakteristik des Punktes x*.

Man kann nun in einer Ebene u immer einen Punkt x so bestimmen, dass er sich bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht zu dieser Ebene bewegt, d. h. dass seine Charakteristik durch den absoluten Pol y derselben hindurchgeht. Letzterer ist mit u durch die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu u_1 = y_4 & \mu u_3 = y_2 \\ \mu u_2 = y_3 & \mu u_4 = y_1 \end{cases}$$

verbunden, und man hat also zur Bestimmung von x:

*) Propriétés géométriques rélatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. Comptes rend. t. XVI, p. 1420. 1843. Die dort angeführten Sätze wurden bewiesen von Jonquières: Mélanges de géométrie pure, Paris 1856.

$$\begin{aligned}
x_1x_4(a_4 - a_1) &= x_1y_4 - y_1x_4 = \mu(x_1u_1 - x_4u_4)\\
x_2x_3(a_3 - a_2) &= x_2y_3 - y_3x_2 = \mu(x_2u_2 - x_3u_3)\\
x_1x_2(a_2 - a_1) &= x_1y_2 - y_1x_2 = \mu(x_1u_3 - x_2u_4)\\
x_3x_4(a_4 - a_3) &= x_3y_4 - y_3x_4 = \mu(x_3u_1 - x_4u_2)\\
x_1x_3(a_3 - a_1) &= x_1y_3 - y_1x_3 = \mu(x_1u_2 - x_3u_4)\\
x_2x_4(a_4 - a_2) &= x_2y_4 - y_2x_4 = \mu(x_2u_1 - x_4u_3).
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass diese Gleichungen, sowie die Bedingung $u_x = 0$, erfüllt sind, wenn zwischen den x und u folgende Beziehungen bestehen:

$$(6) \qquad \begin{cases} \mu u_1 = x_4(a_4 - a_1) & \mu u_3 = x_2(a_2 - a_3) \\ \mu u_2 = x_3(a_3 - a_2) & \mu u_4 = x_1(a_1 - a_4)\,. \end{cases}$$

Wir wollen den Punkt x als *Nullpunkt der Ebene* u*) und diese als *Nullebene des Punktes* x bezeichnen. Während sich die Ebene um ihre Charakteristik dreht, ist ihr Nullpunkt der einzige Punkt, welcher sich senkrecht zu ihr aus ihr heraus bewegt, und im Anschluss hieran haben wir den Satz:

*Die Bewegung einer Ebene im Raume lässt sich in jedem Augenblicke ersetzen durch eine Drehung derselben um eine ihrer Geraden und eine gleichzeitige Bewegung in sich um einen in ihr gelegenen Punkt.***)

Durch die Gleichungen (6) ist uns ein linearer Complex bestimmt, dessen durch einen Punkt gehende Geraden in der Nullebene des Punktes liegen; seine Gleichung ist:

$$(7) \qquad (a_4 - a_1)p_{14} + (a_3 - a_2)p_{23} = 0,\text{***})$$

und die ihm angehörigen Geraden werden senkrecht zu sich selbst versetzt. Es haben nämlich alle durch einen Punkt gehenden Ebenen ihren Nullpunkt in der Nullebene des Punktes, und umgekehrt geht die Nullebene von jedem Punkte einer Ebene durch den Nullpunkt dieser Ebene; allen Punkten einer Geraden des Complexes entsprechen also Nullebenen, welche durch diese Complexgerade hindurchgehen; die Charakteristik eines jeden Punktes aber geht durch den absoluten Pol der zugehörigen Nullebene, und alle diese Pole liegen wieder auf der absoluten Polare der betrachteten Complexgeraden, d. h. jene Charakteristik steht zu dieser letzteren senkrecht; also:

Die Geraden, auf welchen die Fortschreitungsrichtungen ihrer Punkte senkrecht stehen, bilden einen linearen Complex.†)

---

*) Nach **Möbius**: Lehrbuch der Statik. Theil I. § 84.

) Für spec. Massbest. zuerst von **Chasles gegeben: Aperçu historique, note 34. (Bruxelles 1837).

***) Ueber die Bedeutung der Coëfficienten dieses Complexes vgl. § 9.

†) Die Bedeutung dieses Complexes für die unendlich kleinen Bewegungen bei spec. Massbest. erkannte wohl zuerst **Möbius** (vgl. Lehrbuch der Statik

Zwei in Bezug auf einen solchen Complex conjugirte Gerade sind dadurch definirt, dass die den Ebenen des durch die eine bestimmten Büschels zugehörigen Nullpunkte auf der anderen liegen; zwischen den Coordinaten zweier Geraden der Art (p_{ik} und p'_{ik}) bestehen demnach hier die Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho p_{34} = -p_{34}' & \varrho p_{12} = -p_{12}' \\ \varrho p_{13} = -p_{13}' & \varrho p_{24} = -p_{24}' \\ \varrho p_{14} = \dfrac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} p_{23}' & \varrho p_{23} = \dfrac{a_4 - a_1}{a_3 - a_2} p_{14}' . \end{cases}$$

Indem man nun mittelst der Gleichungen (3), (4) und (6) die Coordinaten der Charakteristik eines Punktes und der seiner Nullebene aufstellt, findet man, dass sie diesen Gleichungen identisch genügen, und wir haben den Satz:

Die Charakteristik einer Ebene und die ihres zugehörigen Nullpunktes sind conjugirte Gerade in Bezug auf den linearen Complex, dessen Gerade senkrecht zu sich selbst versetzt werden.

Die Bedeutung zweier solcher Geraden für die Bewegung ist auch noch eine andere; es stehen nämlich nach Obigem die Charakteristiken der Punkte der einen senkrecht zu den durch die andere gehenden Ebenen; durch eine blosse Drehung um diese kann ich also jene in die Lage bringen, welche sie in Folge der unendlich kleinen Bewegung einnimmt, und es bedarf dann nur noch einer Drehung um die letztere, um auch die andere in ihre Endlage zu bringen; also:

Eine unendlich kleine Bewegung kann immer ersetzt werden durch die Folge von zwei unendlich kleinen Rotationen um zwei in Bezug auf den erwähnten Complex einander conjugirte Gerade. (Vgl. § 4.)

Da aber eine jede solche Drehung identisch ist mit einer Verschiebung nach der absoluten Polare der Drehaxe, so ist die Bewegung auch äquivalent mit zwei Translationen nach den absoluten Polaren zweier solcher conjugirter Rotationsaxen, oder, was nach den Ausführungen in § 2. dasselbe ist:

Eine unendlich kleine Bewegung kann immer ersetzt werden durch zwei Translationen, deren Directricen einander in Bezug auf den linearen Complex conjugirt sind, welcher dem zuerst erwähnten Complexe in Bezug auf die Fundamentalfläche polar zugeordnet ist; wir wollen dem entsprechend jenen ersten Complex als *den der unendlich kleinen Bewegung zugeordneten Rotationscomplex*, den zweiten, ihm absolut con-

---

Leipzig 1837, Th. I. § 183), ausgesprochen wurden obige Sätze zuerst von Chasles (compt. rend. 1843, l. c.); vgl. auch Battaglini: Nota sul movimento geometrico infinitesimo di un sistemo rigido; Rendiconti dell' academia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1870.

jugirten als *den ihr zugeordneten Translationscomplex* bezeichnen.*) Man würde zu dem letzteren unmittelbar gelangt sein, wenn man die den obigen dualistisch gegenüberstehenden Ueberlegungen durchgeführt hätte.

In der That ist dann jedem Punkte x eine durch ihn gehende Ebene u zugeordnet, deren Charakteristik in der absoluten Polarebene von x liegt, wo die x und u durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$(9) \qquad \begin{cases} \varrho u_1 = x_4(a_3 - a_2) & \varrho u_3 = x_2(a_1 - a_4) \\ \varrho u_2 = x_3(a_4 - a_1) & \varrho u_4 = x_1(a_2 - a_3), \end{cases}$$

und dadurch ist ein linearer Complex:

$$(10) \qquad (a_3 - a_2) p_{14} + (a_4 - a_1) p_{23} = 0$$

bestimmt, welcher eben dem Complexe (7) absolut conjugirt ist, da in der Gleichung nur p_{14} und p_{23} vertauscht sind. Entsprechend den an jenen Complex geknüpften Betrachtungen erhalten wir hier die folgenden Sätze:

Die Bewegung eines Ebenenbündels (d. h. eines Punktes, betrachtet als Ort der ihn umhüllenden Ebenen) lässt sich in jedem Augenblicke ersetzen durch eine Verschiebung seines Mittelpunktes (Trägers) nach einem durch ihn gehenden Strahle und eine gleichzeitige Bewegung des Bündels in sich, (d. h. ohne den Mittelpunkt zu ändern), bei der eine durch den Punkt gehende Ebene fest bleibt (die ihm durch den Translationscomplex entsprechende Nullebene).**)

Die Charakteristiken der Ebenen, welche durch eine dem Translationscomplexe angehörige Gerade hindurchgehen, sind normal zu dieser Geraden (d. i. schneiden deren absolute Polare).

Die Charakteristik eines Punktes und die Charakteristik der ihm in diesem Complexe zugehörigen Nullebene sind conjugirte Gerade in Bezug auf denselben. —

Nach dem Vorstehenden ist der lineare Complex für die unendlich kleine Bewegung von fundamentaler Bedeutung; um uns ein deutliches Bild von den Vorgängen bei einer solchen zu machen, ist es daher nöthig, die in Bezug auf ihn geltenden metrischen Sätze für unsere allgemeine Massbestimmung umzuformen, und wir thun dies im Folgenden, indem wir den Complex in seinen Beziehungen zu der Fundamentalfläche 2. Ordnung untersuchen.

Er hat mit jeder Schaar von Erzeugenden derselben zwei Gerade gemein; im Ganzen also giebt es vier Linien, welche gleichzeitig dem

---

*) Bei spec. Massbest. kann natürlich nur der erste Complex auftreten.

**) Die beiden von jenem Strahle an die Fundamentalfläche gehenden Tangentenebenen bleiben ausserdem selbstverständlich fest.

Complexe angehören und auf der Fläche liegen; sie bilden auf dieser ein windschiefes Viereck, welches durch zwei weitere Gerade zu einem Tetraëder ergänzt wird; diese letzteren sind dann conjugirte Polaren in Bezug auf die Fläche und in Bezug auf den linearen Complex, denn durch jede von ihnen gehen zwei Tangentenebenen an die Fläche, deren Berührungspunkte auf der andern liegen, und jede von ihnen schneidet vier Gerade des linearen Complexes. Diese Verhältnisse werden aber nicht geändert, wenn man statt des betrachteten linearen Complexes seinen absolut conjugirten wählt; auch in Bezug auf diesen sind also die genannten beiden Geraden einander zugeordnet; ich will sie als *Axenpaar des betreffenden linearen Complexes* bezeichnen, sie entsprechen der Hauptaxe und deren in der unendlich fernen Ebene gelegenen absoluten Polaren*) bei specieller Massbestimmung.

Der Definition nach liegen sowohl die absoluten Pole, als auch die Nullpunkte der durch die eine gehenden Ebenen auf der anderen Axe des Paares, d. h. bei der von uns zu Grunde gelegten Gleichung der Fundamentalfläche und des Complexes ((7) oder (10)) müssen die Gleichungen (5) und (6) oder (5) und (9) zusammenbestehen, was nur für die beiden Geraden

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0 \text{ und}$$
$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

möglich ist, also:

Die beiden Hauptaxen einer unendlich kleinen Bewegung bilden das Axenpaar der beiden linearen Complexe, welche derselben als Rotations- und Translations-Complex zugehören.

Wenden wir auf den Raum eine Transformation an, wie sie durch die Gleichungen (1) § 2. bestimmt ist, so bestehen zwischen zwei entsprechenden Geraden die Gleichungen

$$\varrho p_{ik} = \alpha_i \alpha_k p_{ik}',$$

und wegen der Gleichung

$$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3$$

haben wir den Satz: *Ein linearer Complex geht durch eine Schraubenbewegung um eine Gerade seines Axenpaares in sich selbst über* (n. 37.)**).

Allen Ebenen eines Büschels, deren Schnittlinie die beiden Geraden des Axenpaares trifft, entsprechen Punkte, die auf dieser Schnittlinie liegen, denn diese gehört als Gerade, welche zwei conjugirte Polaren schneidet, dem Complexe an, d. h. sie fällt mit ihrer conjugir-

---

*) D. h. der Polare des unendlich fernen Punktes der Hauptaxe in Bezug auf den Kugelkreis.

**) Die beigesetzten Zahlen beziehen sich auf die entsprechenden Sätze für spec. Massb. bei Plücker: Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig 1868 u. 1869.

ten zusammen; also: *Die einem Punkte entsprechende Ebene geht durch diejenige gerade Linie, welche durch den Punkt senkrecht zu einer Geraden des Axenpaares gezogen werden kann. Die Nullebenen aller Punkte, welche gleichen Abstand von einer Axe des Paares haben, bilden mit dieser gleiche Winkel* (n. 41). Das letztere ergiebt sich, da diese Punkte nach § 2. auf einer Fläche des Büschels

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0$$

liegen müssen, und die zugehörigen Nullebenen dann eine Fläche desselben Büschels umhüllen; diese Ebenen gehen also in der That auch durch jede Schraubenbewegung um die Axe in einander über.

Nach § 1. giebt es zu zwei Geraden zwei andere, welche gleichzeitig auf beiden senkrecht stehen, nämlich die beiden, welche ausser den gegebenen Geraden auch deren absolute Polarlinien schneiden. Sind nun zwei Gerade einander conjugirt in Bezug auf einen linearen Complex, so sind es ihre absoluten Polaren in Bezug auf den diesem absolut conjugirten Complex, ihre gemeinschaftlichen Normalen schneiden also in jedem Complexe zwei einander conjugirte Linien, d. h. sie gehören der durch beide gebildeten Congruenz an; die Directricen dieser sind aber die beiden Geraden des den Complexen gemeinsamen Axenpaares, und somit können wir den Satz aussprechen:

Die beiden Geraden, welche gleichzeitig auf zwei in Bezug auf einen linearen Complex conjugirten Geraden senkrecht stehen, schneiden das Axenpaar des Complexes und sind also zu den beiden Linien des Paares ebenfalls normal (n. 43).*)

Die Geraden der erwähnten Congruenz sind noch in anderer Weise ausgezeichnet, *sie bilden nämlich das gemeinsame Normalensystem der Flächen 2. Ordnung des Büschels*

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0.^{**})$$

Eine solche Fläche wird nämlich von einer Ebene u in einem Punkte x berührt, wenn

$$\begin{aligned} \mu u_1 &= x_4 \qquad & \mu u_2 &= \lambda x_3 \\ \mu u_4 &= x_1 \qquad & \mu u_3 &= \lambda x_2 \,, \end{aligned}$$

und der absolute Pol von u ist bestimmt durch:

---

*) Für spec. Massb. zuerst gegeben von Chasles: Propriétés géométriques etc. Compt. rend. 1843. Vgl. Schweins: Neue Eigenschaft zweier Kräfte, durch welche ein Kraftsystem ersetzt werden kann. Crelle's J. Bd. 32. p. 227 (1846), und eine Bemerkung dazu von Möbius, ib. Bd. 36. p. 89.

**) Ebenso, wie bei spec. Massbest. die Linien, welche eine Gerade und deren in der unendlich fernen Ebene liegende absolute Polare schneiden, gleichzeitig normal sind zu allen Kreiscylindern, die jene Gerade zur Axe haben.

$$\varrho u_1 = y_4 \qquad \varrho u_2 = y_3$$
$$\varrho u_4 = y_1 \qquad \varrho u_3 = y_2\,,$$

also sind für die Coordinaten der Verbindungslinie beider Punkte, d. h. der Normalen des Punktes x:

$$p_{14} = 0 \text{ und } p_{23} = 0, \; q. \, e. \, d.$$

Besteht die unendlich kleine Bewegung in einer Rotation um eine Gerade, so werden die beiden zugehörigen Complexe specielle; z. B. bei unserer Coordinatenbestimmung für eine Rotation um die Axe

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0,$$

d. h. wenn

$$a_2 = a_3$$

ist, gehen dieselben über in:

$$p_{14} = 0 \text{ und } p_{23} = 0\,.$$

Bei einer Rotation um eine Axe werden also alle sie schneidenden Linien senkrecht zu sich selbst versetzt, bei einer Translation nach einer solchen alle Linien, welche in den Normalebenen derselben liegen.

§ 4.

Die Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen.

Die beiden linearen Complexe, auf welche wir im Vorigen geführt wurden, sind für die Natur einer unendlich kleinen Bewegung, sowie auch für die Theorie der Kraftsysteme von hoher Bedeutung; es ist daher wohl von Interesse zu verfolgen, wie sich die Coordinaten derselben aus den Coefficienten einer nicht in kanonischer Form gegebenen Transformation zusammensetzen, zumal da wir die so gewonnenen Ausdrücke geradezu zur Definition der Bewegung (resp. später eines Kraftsystems) benutzen werden.

Es sei zu dem Zwecke

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = a_x^2 = b_x^2 = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche, und die unendlich kleine Transformation durch die vier Gleichungen

$$(1) \qquad dx_i = (\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 + \alpha_{i4} x_4) d\lambda$$

dargestellt. Es ist dann unter Vernachlässigung der Grössen von 2. Ordnung der Kleinheit

$$a_{x+dx}^2 = a_x^2 + 2\, a_x a_{dx}\,,$$

und damit die Fläche 2. Ordnung in sich übergeht, muss demnach die Gleichung

$$(2) \qquad M a_x^2 = a_x \, a_{dx}$$

identisch erfüllt sein, unter M einen beliebigen constanten Factor verstanden. Die Vergleichung der Coëfficienten gleicher Producte der x auf beiden Seiten nach Ausführung der Substitution (1) ergiebt dann folgende 10 Bedingungsgleichungen*) zwischen den Coëfficienten der Fläche und denen der Transformation:

$$2\,M a_{ik} = (\beta_{ik} + \beta_{ki})\,d\lambda,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(3)\qquad \begin{cases} \beta_{ik} = a_{i1}\alpha_{1k} + a_{i2}\alpha_{2k} + a_{i3}\alpha_{3k} + a_{i4}\alpha_{4k}, \text{ also} \\ \beta_{ki} = a_{k1}\alpha_{1i} + a_{k2}\alpha_{2i} + a_{k3}\alpha_{3i} + a_{k4}\alpha_{4i}. \end{cases}$$

Den Factor $2\,M$ wollen wir mit $d\lambda$ zu einer neuen Constanten J vereinigen und die Bedingungsgleichungen in der Form schreiben:

$$(4)\qquad a_{ik} = (\beta_{ik} + \beta_{ki})\,J.$$

Um den der Bewegung zugehörigen Rotationscomplex zu erhalten, müssen wir die Forderung stellen, dass die Charakteristik eines in der Ebene u gelegenen Punktes x durch den absoluten Pol y dieser Ebene hindurchgeht, d. h. es muss sein:

$$u_x = 0$$

und

$$y_i = \mu x_i + \nu\,dx_i,$$

wo y mit u durch die Gleichungen

$$\sigma u_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4$$

verbunden ist. Setzen wir in die letzteren die Werthe von y ein, so wird

$$\begin{aligned}\sigma u_i = {} & \mu\,(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4) \\ & + \nu\,d\lambda\,(a_{i1}\Sigma\alpha_{1k}x_k + a_{i2}\Sigma\alpha_{2k}x_k + a_{i3}\Sigma\alpha_{3k}x_k + a_{i4}\Sigma\alpha_{4k}x_k),\end{aligned}$$

und wegen der Gleichungen (3) geht dies über in:

$$\begin{aligned}\sigma u_i = {} & \mu\,(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4) \\ & + \nu\,d\lambda\,(\beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2 + \beta_{i3}x_3 + \beta_{i4}x_4) \\ = {} & \Sigma\,(\mu a_{ik} + \nu\,d\lambda\,\beta_{ik})\,x_k.\end{aligned}$$

Damit nun die Gleichung $u_x = 0$ identisch erfüllt wird, müssen wir

$$\nu = -\frac{2J}{d\lambda}\,\mu$$

setzen; in der That fallen dann, wie es bei einem Complexe sein muss, wegen der Gleichungen (3) und (4) die Diagonalglieder fort, da ja

*) Zwischen den 16 Grössen α_{ik} bestehen also 10 Bedingungsgleichungen, d. h. *es giebt fünffach unendlich viele, unendlich kleine Bewegungen des Raumes,* wie bei spec. Massbest. Die Bedingung, dass jedes System von Erzeugenden der Fläche in sich übergehe, ist bei einer unendlich kleinen Transformation von selbst erfüllt.

$$a_{kk} = 2J \cdot \beta_{kk}$$

ist, und die übrigen werden entgegengesetzt gleich:

$$a_{ik} - 2\beta_{ik}J = -(a_{ki} - 2\beta_{ki}J) .$$

Die Gleichungen, welche einer Ebene u ihren Nullpunkt x zuordnen, werden alsdann, wenn man ϱ statt $\frac{\sigma}{\mu}$ schreibt:

$$\varrho u_i = \Sigma(a_{ik} - 2\beta_{ik}J)x_k = \Sigma(2\beta_{ki}J - a_{ik})x_k,$$

und setzt man hierin schliesslich noch

$$Q_{ik} = 2\beta_{ki}J - a_{ik} = a_{ik} - 2\beta_{ik}J,$$

oder

(5) $$Q_{ik} = J(\beta_{ki} - \beta_{ik}) = -Q_{ki},$$

so ist der lineare Complex bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho u_1 &= \quad \cdot \quad + Q_{12}x_2 + Q_{13}x_3 + Q_{14}x_4\\
\varrho u_2 &= Q_{21}x_1 + \quad \cdot \quad + Q_{23}x_3 + Q_{24}x_4\\
\varrho u_3 &= Q_{31}x_1 + Q_{32}x_2 + \quad \cdot \quad + Q_{34}x_4\\
\varrho u_4 &= Q_{41}x_1 + Q_{42}x_2 + Q_{43}x_3 + \quad \cdot \quad ,
\end{aligned}$$

und *die Gleichung des Complexes* selbst wird:

(6) $$Q_{12}p_{12} + Q_{13}p_{13} + Q_{14}p_{14} + Q_{34}p_{34} + Q_{42}p_{42} + Q_{23}p_{23} = 0 .$$

Die Coëfficienten Q_{ik} sind durch die Gleichung (5) definirt, sie enthalten also noch einen unbestimmten Factor J, welchen wir als ein *Mass für die Grösse der unendlich kleinen Bewegung* auffassen können. Denken wir uns nämlich die Coëfficienten der Gleichung der Fundamentalfläche absolut bestimmt, so brauchen wir J nur für eine bestimmte unendlich kleine Bewegung gleich der Einheit zu setzen, um durch Vergleichung mit ihr die Intensität anderer Bewegungen zu messen. Legen wir demgemäss den Q_{ik} absolute Werthe bei, so ist eine jede unendlich kleine Bewegung durch diese 6 Coordinaten des ihr zugehörigen Rotationscomplexes vollkommen bestimmt, und wir werden diese daher geradezu als *Coordinaten der betreffenden Bewegung**) bezeichnen.

Den hier gegebenen Ausführungen stellen sich, ebenso wie in § 3., sofort dualistische gegenüber, welche in analoger Weise zur Darstellung des der Bewegung zugeordneten Translationscomplexes führen würden. Die Coordinaten desselben, welche immer durch P_{ik} bezeichnet werden mögen, können wir mit demselben Rechte, wie die *Q_{ik} als Coordinaten der unendlich kleinen Bewegung* auffassen, und diese zwie-

*) Vgl. Klein: Notiz, betr. den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper, Math. Annalen Bd. IV. p. 403. — Es werden dann alle Bewegungen, deren Coordinaten sich nur um einen gemeinsamen Factor unterscheiden, durch dieselben Complexe dargestellt.

fache Darstellung derselben Bewegung wird sich durch alle folgenden Betrachtungen hindurchziehen; sie ist für die allgemeine projectivische Massgeometrie charakteristisch. Der Zusammenhang zwischen beiden Darstellungsweisen wird stets durch die Fundamentalfläche vermittelt, indem der eine Complex dem andern (nach § 3.) in Bezug auf sie polar conjugirt ist; es bestehen demnach zwischen den P_{ik} und Q_{ik} stets die Gleichungen (2) resp. (8) in § 1., in welchen wir nur $\Pi_{\alpha\beta}$ durch $Q_{\gamma\delta}$ zu ersetzen haben. Da ferner die P_{ik} und Q_{ik} nunmehr absolut gegeben sind, so müssen wir den dort vorkommenden Proportionalitätsfactoren ϱ und ϱ' bestimmte Werthe beilegen, und zwar werden wir bei der vollkommenen Gleichberechtigung beider setzen müssen:

$$\varrho = \varrho' = \sqrt{\Delta}$$

(vgl. § 1. (10)), so dass wir erhalten:

$$(7) \quad \begin{cases} \sqrt{\Delta}\, Q_{ik} = \frac{1}{2}(a_i b_k - b_i a_k)\, \Sigma(a_r b_s - b_r a_s)\, P_{rs} = \frac{1}{2} \dfrac{\partial \Phi_{PP}}{\partial P_{ik}} \\ \sqrt{\Delta}\, P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\gamma b_\delta - b_\gamma a_\delta)\, \Sigma(a_{\alpha'} b_{\beta'} - b_{\alpha'} a_{\beta'})\, Q_{\gamma'\delta'} = \frac{1}{2} \dfrac{\partial \Phi_{QQ}}{\partial Q_{\alpha\beta}} \text{*)}. \end{cases}$$

Sind insbesondere die beiden Complexe specielle, d. h. ist (vgl. (13) § 1.)

$$Q_{12} Q_{34} + Q_{13} Q_{42} + Q_{14} Q_{23} = P_{12} P_{34} + P_{13} P_{42} + P_{14} P_{23} = 0,$$

so reducirt sich die Bewegung auf eine *Rotation um die Axe* Q_{ik}, oder was dasselbe ist, auf eine *Translation nach dem Strahle* P_{ik}, wie in § 3. an der kanonischen Form gezeigt wurde; wir können nämlich die dort erhaltenen Resultate sämmtlich allgemein aussprechen, da unsere Operationen durchgängig einen invarianten Charakter tragen. Von Interesse erscheint hierbei die *Frage nach der gleichzeitigen Transformation der Fundamentalfläche und der beiden Complexe in die oben benutzte kanonische Form*, eine Frage, welche mit dem bekannten Probleme der gleichzeitigen Transformation von zwei bilinearen Formen auf die kanonische Form**) zusammenfällt. Durch den Complex und

---

*) Ich verstehe immer unter Φ_{QQ} den Ausdruck, welcher aus Φ_{PP} entsteht, wenn man $P_{\alpha\beta}$ durch $Q_{\gamma\delta}$ ersetzt. Geht man von der Gleichung der Fundamentalfläche in Ebenencoordinaten aus:

$$0 = \Omega'_{uu} = \Sigma A_{ik} u_i u_k = \tfrac{1}{8}(abcu)^2 = \Sigma B_{ik} u_i u_k$$

so würde die Gleichung derselben in Liniencoordinaten:

$$0 = \left\{\Sigma(A_i B_k - B_i A_k) Q_{ik}\right\}^2 = \Delta \left\{\Sigma(a_\alpha b_\beta - b_\alpha a_\beta) Q_{\gamma\delta}\right\}^2;$$

tritt daher Φ_{QQ} unten in Verbindung mit Ω'_{uu} auf, so müssen wir statt des letztern Ausdruckes setzen:

$$\frac{\Omega'_{uu}}{\sqrt{\Delta}}.$$

**) Vgl. Weierstrass: Berliner Monatsberichte 1868.

die Fundamentalfläche sind uns nämlich zwei lineare Verwandtschaften zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes gegeben, und solche Verwandtschaften lassen sich durch zwei simultane bilineare Formen darstellen.

Wendet man zwei oder mehrere unendlich kleine lineare Transformationen, welche die Fundamentalfläche ungeändert lassen, nach einander an, so entsteht eine neue Transformation durch Addition der den verschiedenen Transformationen entsprechenden Differentiale der Coordinaten, dargestellt durch:

$$dx_i = \Sigma(\alpha_{ik} d\lambda + \alpha'_{ik} d\lambda' + \alpha''_{ik} d\lambda'' + \cdots) x_k.$$

Die Q_{ik} sind aber lineare Functionen der Transformationscoëfficienten, addiren sich also auch, und, da ganz Analoges für die P_{ik} gilt, können wir unabhängig davon, ob wir die Bewegung durch die P_{ik} oder die Q_{ik} gegeben annehmen, den Satz aussprechen:

Unendlich kleine Bewegungen setzen sich zusammen, indem sich ihre Coordinaten, die wir in obiger Weise absolut bestimmt denken, addiren.

Es ergiebt sich hieraus auch wieder die § 3. erwähnte Eigenschaft zweier in Bezug auf einen der beiden Complexe conjugirter Geraden (vergl. Klein, diese Ann. Bd. IV, S. 409), durch welche die Complexe eben als Rotations- und Translations-Complexe charakterisirt waren.

Verschwinden von den Coordinaten Q_{ik} alle bis auf eine, so ist der entsprechende Complex jedenfalls ein specieller; *eine jede der Coordinaten des Rotationscomplexes stellt also eine unendlich kleine Rotation um eine Kante des Coordinatentetraëders dar (Q_{14} um die Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$), und ebenso jede Coordinate des Translationscomplexes eine unendlich kleine Translation nach einer Kante desselben**) (z. B. P_{14} nach der Kante $x_2 = 0$, $x_3 = 0$); und dies giebt sofort:

Eine jede unendlich kleine Bewegung können wir erzeugt denken durch 6 unendlich kleine Rotationen um die Kanten eines beliebigen Tetraëders resp. durch 6 solche Translationen nach denselben, ein Satz, der für spec. Massb. zuerst von Möbius gegeben wurde**). Bei unserer Bestimmung der Bewegung durch ihre Coordinaten erscheint er als selbstverständlich.

Wir können ihn noch leicht verallgemeinern, da nach einer Bemerkung des Herrn Klein***) ein linearer Complex vollkommen durch 6 andere solche Complexe bestimmt ist, vorausgesetzt, dass man keinen linearen Complex angeben kann, der mit allen 6 zugleich in Involution

---

*) Vgl. eine andere Bedeutung dieser Coordinaten im § 13.

**) Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Crelle's J. Bd. 18. Für spec. Massbest. gilt natürlich nur der erste Theil der beiden Sätze.

***) Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. Math. Ann. Bd. II.

liegt. Als Coordinaten eines siebenten linearen Complexes definirt man dann die simultanen Invarianten desselben in Bezug auf die 6 gegebenen (d. h. nach § 1. ihre mit gewissen Constanten multiplicirten Momente in Bezug auf dieselben). Da nun jede unendlich kleine Bewegung durch einen linearen Complex dargestellt wird, so haben wir: *Eine jede unendlich kleine Bewegung kann durch dieselben sechs Schraubenbewegungen erzeugt werden, wenn von diesen keine die Folge der übrigen oder einiger unter ihnen ist.* Wäre dies Letztere der Fall, so würden nämlich die 6 Gleichungen, welche die involutorische Lage eines Complexes zu den 6 gegebenen Complexen ausdrücken, nach dem Satze über die Addition ihrer Coordinaten auflösbar werden, was wir ausgeschlossen haben. Von diesen 6 Complexen können natürlich einige specielle sein; sind sie es alle, so haben wir den Satz von Möbius:

*Ein Körper kann auf jede mögliche Weise bewegt werden, wenn er um sechs von einander unabhängige Gerade gedreht werden kann (resp. nach ihnen verschoben werden), d. h. Gerade, die so liegen, dass sie nicht alle einem siebenten linearen Complexe angehören,**) was ja die Bedingung dafür sein würde, dass sie mit ihm in Involution liegen.

§ 5.

Der Complex der Charakteristiken.

Soll eine gerade Linie Charakteristik eines Punktes sein, so müssen ihre Coordinaten nach § 3. folgenden Gleichungen genügen:

$$(1)\quad\begin{cases}\varrho p_{12} = x_1 x_2(a_2 - a_1) & \varrho p_{34} = x_3 x_4 (a_4 - a_3)\\ \varrho p_{13} = x_1 x_3 (a_3 - a_1) & \varrho p_{42} = x_4 x_2 (a_2 - a_4)\\ \varrho p_{14} = x_1 x_4 (a_4 - a_1) & \varrho p_{23} = x_2 x_3 (a_3 - a_2)\,.\end{cases}$$

Durch sie kann man jedes der drei Verhältnisse $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ auf zwei verschiedene Weisen mittelst der p_{ik} ausdrücken, was zu drei Gleichungen 2. Grades in ihnen Veranlassung giebt, die jedoch denselben *Complex zweiten Grades* darstellen müssen, da es dreifach unendlich viele Charakteristiken von Punkten giebt; ich kann die Gleichung des Complexes demnach in den 3 Formen schreiben:

$$(2)\quad\begin{cases}(a_2 - a_4)\,(a_3 - a_1) p_{12} p_{34} = (a_4 - a_3)\,(a_2 - a_1) p_{13} p_{42}\\ (a_4 - a_1)\,(a_3 - a_2) p_{12} p_{34} = (a_4 - a_3)\,(a_2 - a_1) p_{23} p_{14}\\ (a_4 - a_1)\,(a_3 - a_2) p_{13} p_{42} = (a_2 - a_4)\,(a_3 - a_1) p_{23} p_{14}\,,\end{cases}$$

---

*) Vgl. Sylvester: Sur l'involution de lignes droites dans l'espace, considerées comme des axes de rotation; compt. rend. t. 52. 1861. Das bei ihm auftretende *Involutionssystem* von Geraden ist eben nach Plückers Bezeichnung ein linearer Complex.

und in der That formt man leicht mit Hülfe der beiden Identitäten:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

und

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$$

jede von ihnen in jede andere von ihnen um. Der so erhaltene Complex ist jener bekannte, dessen Geraden die Ebenen eines bestimmten Tetraëders, welches dann zugleich die Singularitätenfläche des Complexes darstellt, nach constantem Doppelverhältnisse schneiden.*) Bei uns ist dies das Coordinatentetraëder; wie man leicht verificirt, wenn man beachtet, dass die Punkte der Charakteristik eines Punktes y durch:

$$\varrho x_i = y_i - \nu d y_i = y_i(1 - \lambda a_i)$$

gegeben sind, wo $\lambda = \nu \cdot d\lambda$ ein Parameter ist. Für die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Ebenen des Tetraëders ist dann

$$\lambda = \lambda_i = \frac{1}{a_i}\ (i = 1, 2, 3, 4),$$

und das Doppelverhältniss der vier Punkte:

$$\alpha = \frac{\dfrac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}}{\dfrac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_4}} = \frac{(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)}{(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)}, \quad \text{also constant.}$$

Es ist aber der Zähler des rechts stehenden Ausdrucks die simultane Invariante der beiden der Bewegung zugeordneten linearen Complexe in der hier zu Grunde gelegten kanonischen Form: $\frac{1}{2}(Q, Q)$ oder $\frac{1}{2}(P, P)$, und der Nenner geht aus der Gleichung der Fundamentalfläche in Liniencoordinaten:

$$\Phi_{pp} = (p_{14} + p_{23})^2 + 4\, p_{12} p_{34} = 0$$

hervor, wenn man darin die p_{ik} durch die Coordinaten eines jener beiden Complexe ersetzt, denn es ist

$$(a_4 - a_1 + a_3 - a_2)^2 = [(a_4 - a_2) + (a_3 - a_1)]^2 = 2\,(a_4 - a_2)(a_3 - a_1),$$

wegen

$$a_4 - a_2 = a_3 - a_1 .$$

Folglich haben wir allgemein für dies Doppelverhältniss:

---

*) Diesen Complex behandelt zuerst Chasles, er kommt auf ihn als gebildet von den Normalen eines Systems von confocalen Flächen 2. Ordnung (Ap. hist. note 31); Herr Reye erzeugt ihn durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte in collinearen Systemen (Geometrie der Lage, 2. Abth. p. 116); ebenso tritt er im Texte auf bei unendlich kleinen linearen Transformationen. Den Satz von der Constanz des erwähnten Doppelverhältnisses gab Herr Müller (Math. Annalen Bd. I, 1869).

$$\alpha = \frac{(Q,Q)\sqrt{\Delta}}{\Phi_{QQ}};$$

d. h. *es ist das Moment eines linearen Complexes in Bezug auf sich selbst, oder der Parameter dieses Complexes*), gleich dem Doppelverhältnisse, nach welchem die auf einer Ebene in ihrem Nullpunkte errichtete Normale die vier Ebenen des durch den Complex und die Fundamentalfläche bestimmten Tetraëders schneidet.* —

Auf denselben Complex wird man geführt, wenn man nach den Geraden fragt, welche Charakteristiken von Ebenen sind, und demnach aus den Gleichungen

$$(3) \qquad \sigma q_{ik} = u_i u_k (a_k - a_i)$$

die u_i eliminirt. Wir haben also den Satz:

Ist eine Gerade Charakteristik eines Punktes, so ist sie auch Charakteristik einer Ebene, und umgekehrt.

Hierdurch ist jedem Punkte y eine Ebene v zugeordnet, und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt der Art, dass beide gemeinsame Charakteristik haben; während der Punkt auf dieser um ein unendlich kleines Stück fortschreitet, dreht sich die Ebene um sie**); zwischen den Coordinaten beider bestehen demnach die Relationen:

$$\sigma q_{12} = u_1 u_2 (a_2 - a_1) = \varrho p_{34} = x_3 x_4 (a_4 - a_3)$$
$$\sigma q_{13} = u_1 u_3 (a_3 - a_1) = \varrho p_{42} = x_4 x_2 (a_2 - a_4), \text{ u. s. f.}$$

Drückt man hieraus die Werthe von $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ durch die u aus, so findet man die betreffenden Transformationsgleichungen in der Form:

$$(4) \qquad \begin{cases} \mu u_1 = \dfrac{a_3 - a_2}{x_1} & \mu u_3 = \dfrac{a_4 - a_1}{x_3} \\ \mu u_2 = \dfrac{a_1 - a_4}{x_2} & \mu u_4 = \dfrac{a_2 - a_3}{x_4}, \end{cases}$$

und dies ist jene bekannte Verwandtschaft***), welche einem Punkte eine Fläche 3. Ordnung mit 4 konischen Knotenpunkten entsprechen

*) Wenn wir die Bezeichnung Plückers für den analogen Ausdruck bei specieller Massbest. gebrauchen wollen; vgl. Neue Geometrie n. 38. — In α musste noch $\sqrt{\Delta}$ hinzutreten, damit Zähler und Nenner von gleichem Grade in den Coëfficienten von Φ werden; man erkennt dies auch, wenn man letztere in der kanonischen Form nicht gleich Eins setzt.

**) Die Ebene ist also Osculationsebene der durch den Punkt gehenden projectivischen Schraubenlinien; vgl. § 6.

***) Vergl. zum Beispiel Lie in den Göttinger Nachrichten 1870, 1; Eckardt: Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes. Math. Annalen Bd. V, p. 30; Klein und Lie: Sur une certaine famille de courbes et de surfaces; comptes rend. 13. juin 1870.

lässt, einer Ebene eine Fläche 3. Classe mit 4 Doppelebenen; näher werden wir auf sie, sowie auf ihre Beziehungen zu den durch die beiden linearen Complexe begründeten Transformationen in § 7. eingehen. —

Durch die Gleichungen (1) und (3) ist *eine eindeutige Abbildung des Charakteristiken-Complexes auf die Punkte, resp. Ebenen des Raumes gegeben*, wie sie bei jedem Complexe zweiten Grades möglich ist.*) Es geht dabei jede Gerade durch ihren Bildpunkt und liegt in ihrer Ebene, und dadurch unterscheidet sich diese Abbildung von derjenigen, welche Herr Lie durch eine sogenannte r-Transformation für denselben Complex gegeben hat**); andererseits ist sie auch von der allgemeinern verschieden, welche den Normalen eines Systems von confocalen Flächen 2. Ordnung ihre Fusspunkte zuordnet, indem bei uns der Punkt eine ausgezeichnete Lage auf seiner zugehörigen Geraden hat. Die Ebenen des Tetraëders sind nämlich hier nicht gleichmässig benutzt, sondern theilen sich in zwei Paare ($x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$), so dass die Schnittlinie der Ebenen des einen die absolute Polare derjenigen des andern ist, und *der Bildpunkt einer Geraden des Complexes ist der eine Doppelpunkt der durch diese beiden Ebenenpaare auf ihm bestimmten Involution*, wie man durch eine einfache Rechnung nachweist. Der andere Doppelpunkt dieser Involution ist der absolute Pol der dem ersteren im Translationscomplexe zugehörigen Nullebene und gleichzeitig der Nullpunkt der absoluten Polarebene dieses anderen Doppelpunktes in Bezug auf den Rotationscomplex. Man sieht aus diesen Verhältnissen, dass man jeden *Tetraëdralcomplex****), sobald 4 Kanten des Tetraëders auf der Fundamentalfläche liegen, durch die Charakteristiken der Punkte des Raumes bei einer unendlich kleinen Bewegung erzeugt denken kann, dass dann aber einem gegebenen Complexe der Art nur zwei unendlich kleine Bewegungen zugehören, je nachdem man den einen oder den anderen der Doppelpunkte obiger Involution als Bildpunkt einer Geraden desselben auffasst; vertauscht man die Punkte mit einander, so vertauschen zugleich die zugeordneten linearen Complexe ihre Rolle †).

Die Lage des Bildpunktes auf seiner zugehörigen Geraden ist aber

*) Vgl. Nöther: Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln. Göttinger Nachrichten 1869, Nr. 15.

**) Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes. Göttinger Nachrichten. 1870, Nr. 4. Vgl. Reye: Geometrie der Lage, Th. II. p. 125. 1868.

***) Wenn wir darunter einen Complex 2. Grades verstehen, dessen Geraden die Ebenen eines Tetraëders nach constantem Doppelverhältnisse schneiden.

†) Ganz analoge Ueberlegungen gelten, wenn statt der auf der Geraden gelegenen Punktreihe, das durch sie bestimmte Ebenenbüschel betrachtet wird.

auch noch in anderer Weise charakterisirt. Die Schnittpunkte derselben mit je dreien der Coordinantenebenen bilden nämlich mit ihm auch ein constantes Doppelverhältniss*); die Punkte der Geraden sind gegeben durch:

$$\varrho x_i = y_i(1 - \lambda a_i),$$

also ist für den Schnittpunkt mit $x_i = 0$:

$$\lambda_i = \frac{1}{a_i},$$

und das Doppelverhältniss von y mit den 3 durch

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

bestimmten Punkten ist demnach:

$$\alpha_1 = \frac{a_4 - a_2}{a_3 - a_2},$$

und entsprechend sind die drei anderen Doppelverhältnisse

$$\alpha_2 = \frac{a_3 - a_1}{a_4 - a_1}, \quad \alpha_3 = \frac{a_4 - a_2}{a_4 - a_1}, \quad \alpha_4 = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}.$$

Wegen der Identität:

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$$

bestehen aber zwischen ihnen noch die Relationen:

$$\alpha_1 = \alpha_4 \text{ und } \alpha_2 = \alpha_3\text{**}),$$

und diese Relationen bezeichnen unsere Abbildung als eine specielle gegenüber der bei einer allgemeinen linearen Transformation auftretenden, wie sie Herr Reye behandelt.

§ 6.

Die projectivischen Schraubenlinien.

Eine jede Gerade des Charakteristiken-Complexes ist als Verbindungslinie zweier aufeinander folgender Lagen eines Punktes in diesem Tangente an die Curve, auf welcher sich der Punkt bewegt, d. h. an eine projectivische Schraubenlinie (§ 2.). Diese Curven selbst sind dadurch definirt, dass sie durch diejenige lineare Transformation, welche die betrachtete Bewegung darstellt, in sich übergeführt werden, sie sind also eine specielle Art der von den Herren Klein und Lie***)

*) Vgl. Klein und Lie: comptes rend. 13. juin 1870.

**) Sie sind wieder durch die verschiedene Benutzung der 4 Tetraëderebenen bei der Transformation bedingt.

***) Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. Comptes rend. 6. und 13. Juni 1870. Und: Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen, vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Ann. Bd. IV, p. 50.

näher untersuchten Gebilde. Bei einer Bewegung einer solchen Schraubenlinie in sich geht auch der Complex der Charakteristiken in sich über*), da seine Geraden jene Curven umhüllen. Während der einer solchen zugehörige Bildpunkt (§ 5.) die Curve durchläuft, bleibt die Gerade stets Tangente derselben und die zugehörige Bildebene umhüllt als Osculationsebene der Curve die von den Tangenten gebildete abwickelbare Fläche; die Schraubenlinie selbst liegt immer ganz auf der durch einen ihrer Punkte gehenden Fläche des Büschels

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0,$$

da ja jeder Punkt sich auf einer solchen bewegt (§ 2.).

Bei der Bewegung geht ein Punkt x nach einander in die Punkte $x + dx$ und $x + 2dx + d^2x$ über, wo nun nach § 2:

$$dx_i = a_i x_i d\lambda, \qquad (a_1 + a_4 = a_2 + a_3)$$

also auch:

$$d^2 x_i = a_i dx_i d\lambda = a_i^2 x_i d\lambda^2.$$

Die Integration dieser Gleichungen ergiebt *die Coordinaten eines Punktes einer Schraubenlinie als Functionen eines Parameters* λ**) in der Form:

---

*) Es giebt überhaupt dreifach unendlich viele lineare Transformationen des Complexes in sich. Eine von den Linien desselben umhüllte Complexcurve geht dabei im Allgemeinen in eine andere derselben Gattung über; der Complex kann also durch die Gesammtheit der dreifach unendlich vielen Curven derselben Gattung erzeugt angesehen werden (vgl. Lie: Göttinger Nachr. 1870). Im Texte bilden die Schraubenlinien eine solche Gattung; es sind nur zweifach unendlich viele, da eine jede von ihnen durch die betreffende Transformation in sich selbst übergeführt wird.

**) Eine Ebene

$$kx_2 - lx_3 = 0$$

schneidet eine Schraubenlinie in Punkten, welche der Bedingung

$$k c_2 a_2^\lambda - l c_3 a_3^\lambda = 0$$

genügen müssen; für diese Schnittpunkte ist also der Parameter λ bestimmt durch

$$\lambda = \frac{1}{a_2 - a_3} \log \frac{lc_3}{kc_2}.$$

Bei reeller geradliniger Fundamentalfläche schneidet daher die Curve jede Ebene der beiden durch das Hauptaxenpaar bestimmten Büschel nur einmal; es treten hier für $a_i = \varrho^i$ Raumcurven 3. Ordnung auf, welche die Hauptaxen zweimal treffen. — Sind dagegen die von einer Hauptaxe an die Fundamentalfläche gehenden Tangentenebenen imaginär, d. h. setzen wir

$$\gamma + i\delta = kc_2 \qquad \alpha + i\beta = a_2$$
$$\gamma - i\delta = lc_3 \qquad \alpha - i\beta = a_3,$$

so wird

$$\lambda = \frac{1}{2i\beta} \lg \frac{\gamma - i\delta}{\gamma + i\delta} = -\frac{1}{\beta}\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\gamma} + 2n\pi\right),$$

wenn n eine ganze Zahl bedeutet; also *bei reeller nicht geradliniger Fundamental-*

$$\varrho x_i = c_i e^{a_i \lambda},$$

oder da

$$a_i = \log \alpha_i:$$

(1) $$\varrho x_i = c_i \alpha_i^{\lambda}.$$

Die hier auftretenden Grössen α_i müssen der Bedingung

$$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3$$

genügen; und die c_i sind beliebige Constante, die wir als Coordinaten eines bestimmten Punktes der Curve betrachten können. Wählen wir statt seiner irgend einen anderen Punkt derselben Curve, so werden ihre Gleichungen dadurch nicht geändert; soll demnach eine solche Schraubenlinie auf einer bestimmten Fläche:

(2) $$a x_1 x_4 + b x_2 x_3 = 0$$

des erwähnten Büschels liegen, so besteht zwischen den c_i noch die eine Gleichung:

$$a c_1 c_4 + b c_2 c_3 = 0,$$

und jedem Werthsysteme dieser Grössen entspricht eine der einfach unendlich vielen Curven auf der gegebenen Fläche. *Die Tangenten aller dieser letzteren gehören nach einer Bemerkung der Herren Klein und Lie* (comptes rend. 1870) *einem linearen Complexe an*, durch welchen dann einem Punkte der Curve seine Schmiegungsebene zugeordnet wird; dies ist aber dieselbe Relation, welche einem Punkte diejenige Ebene entsprechen lässt, die mit ihm gemeinsame Charakteristik hat, und sie ist daher durch die Gleichungen (4) § 5. gegeben. In der That, soll der Punkt y immer auf der Fläche (2) liegen, so müssen wir $y_1 y_4$ zu $-b$ und $y_2 y_3$ zu a proportional setzen, wodurch wir erhalten:

(3) $$\begin{cases} \sigma v_1 = a(a_3 - a_2) y_4 & \sigma v_3 = b(a_1 - a_4) y_2 \\ \sigma v_2 = b(a_4 - a_1) y_3 & \sigma v_4 = a(a_2 - a_3) y_1 . \end{cases}$$

Man leitet dieselben Gleichungen auch leicht direct ab, wenn man von der Gleichung der Schmiegungsebene des Punktes y ausgeht, die hier gegeben ist durch:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ dy_1 & dy_2 & dy_3 & dy_4 \\ d^2y_1 & d^2y_2 & d^2y_3 & d^2y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & a_3 y_3 & a_4 y_4 \\ a_1^2 y_1 & a_2^2 y_2 & a_3^2 y_3 & a_4^2 y_4 \end{vmatrix} d\lambda^3 = 0.$$

---

fläche schneiden die Schraubenlinien die Ebenen des einen Büschels (dessen Axe die Fläche in imaginären Punkten trifft) nur einmal, die des andern in regelmässigen Intervallen unendlich oft, wie bei spec. Massbestimmung. — *Bei imaginärer Fundamentalfläche* endlich werden die Ebenen beider Büschel unendlich oft getroffen.

Die Gleichung des linearen Complexes, der die Zuordnung vermittelt, wird:

$$(4) \qquad a(a_3 - a_2)p_{14} + b(a_4 - a_1)p_{23} = 0;$$

die Tangenten der auf der Fundamentalfläche gelegenen Schraubenlinien ($a = b$) gehören also dem der unendlich kleinen Bewegung zugeordneten Translationscomplexe an. Aus dem Auftreten des Complexes (4) ergiebt sich sofort:

Die Schmiegungsebene der Punkte einer projectivischen Schraubenlinie, in denen sie von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, schneiden sich in einem Punkte dieser Ebene.

Die Normalenebene eines Punktes der Curve ist ihm unmittelbar durch den Rotationscomplex nach der Definition desselben zugeordnet, woraus sich der für die specielle Massbestimmung bekannte Satz*): dass *die Normalebenen einer Schraubenlinie in ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen Ebene sich in einem Punkte dieser Ebene schneiden,* für allgemeine Massbestimmung von selbst ergiebt. Durch dies Verhältniss des linearen Complexes zu den Schraubencurven wird es selbstverständlich, dass er bei einer Bewegung dieser in sich ebenfalls ungeändert bleibt (vgl. § 3). Bei einer solchen geht aber auch jedes System von Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung, auf welcher die Curve liegt, in sich über, und also bleibt eine metrische Relation zwischen einer solchen Erzeugenden und einer Tangente der Schraubenlinie in einem Schnittpunkte mit derselben ungeändert, d. h. *die Tangenten einer projectivischen Schraubenlinie bilden mit den beiden Schaaren von Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung, auf welcher sie liegt, constante Winkel.* Man verificirt dies auch leicht direct in folgender Weise:

Die Gleichung einer Fläche

$$a x_1 x_4 + b x_2 x_3 = 0$$

in Liniencoordinaten ist bekanntlich:

$$(5) \qquad (a p_{14} + b p_{23})^2 + 4ab\, p_{12} p_{34} = 0,$$

und die Erzeugenden der einen Schaar derselben sind durch die drei inearen Complexe:

$$p_{12} = 0, \quad p_{34} = 0, \quad a p_{14} + b p_{23} = 0$$

gegeben. Sind nun p'_{ik} die Coordinaten einer Tangente der Schraubenlinie, und

$$\Phi_{pp} = (p_{14} + p_{23})^2 + 4 p_{12} p_{34} = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche, so wird der Cosinus des von p' mit einer Erzeugenden p gebildeten Winkels, da ja p' den Gleichungen (4) und (5) genügt:

*) Vgl. Chasles: Aperçu historique p. 679.

$$= \frac{\Phi_{pp'}}{\sqrt{\Phi_{pp} \cdot \Phi_{p'p'}}} = \frac{-a^2(a_3-a_2) - b^2(a_4-a_1) + 4ab(a_3-a_1)}{\sqrt{(a-b)^2 \left\{a^2(a_3-a_2)^2 + b^2(a_4-a_1)^2 - ab(a_2-a_3)^2 - ab(a_4-a_1)^2\right\}}},$$

also in der That constant. —

Ganz dualistisch entsprechend hätten wir auch von den Ebenen ausgehen können, welche die abwickelbare Fläche einer Schraubenlinie umhüllen; ihre Coordinaten stellen sich in ähnlicher Weise mittelst eines Parameters dar, wie die Punkte der Curve; die Geraden aller solcher Flächen, welche dieselbe Fläche 2. Classe des mehrfach erwähnten Büschels umhüllen, bilden wieder einen linearen Complex, u. s. f.

Artet die Fundamentalfläche in einen Kegelschnitt aus, so lassen sich die Schraubenlinien für diese specielle Massbestimmung in ganz ähnlicher Weise durch einen Parameter λ darstellen, wie dies oben bei allgemeiner Massbestimmung geschah; ist der Kegelschnitt dann insbesondere imaginär, so erscheinen also die gewöhnlichen Schraubenlinien als eine Ausartung der durch die Gleichungen (1) bestimmten Curven. In der That, sei dieser Kegelschnitt gegeben durch:

$$u_2 u_3 - u_1^2 = 0,$$

so wird eine Bewegung dargestellt durch die Gleichungen:

$$\varrho x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_4 y_4, \qquad \varrho x_3 = \alpha_3 y_3,$$
$$\varrho x_2 = \alpha_2 y_2, \qquad \varrho x_4 = \alpha_1 y_4,$$

wenn die Bedingung

$$\alpha_1^2 = \alpha_2 \alpha_3$$

erfüllt ist. Diese Transformation lässt dann auch jeden Kegelschnitt der Schaar

$$u_2 u_3 - \mu u_1^2 = 0$$

und jeden Kegel des Büschels

$$x_2 x_3 - \mu x_4^2 = 0$$

ungeändert, wo die Spitze aller dieser Kegel in dem Schnittpunkte der beiden gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnittschaar liegt. Durch λ malige Wiederholung derselben Transformation erhalten wir:

$$\varrho x_1 = \alpha_1^\lambda y_1 + \lambda \alpha_4 \alpha_1^{\lambda-1} y_4, \qquad \varrho x_3 = \alpha_3^\lambda y_3,$$
$$\varrho x_2 = \alpha_2^\lambda y_2, \qquad \varrho x_4 = \alpha_1^\lambda y_4,$$

und wenn wir $d\lambda$ statt λ setzen, so wird die entsprechende unendlich kleine Bewegung gegeben durch:

$$dx_1 = \left(\log \alpha_1 x_1 + \frac{\alpha_4}{\alpha_1} x_4\right) d\lambda, \qquad dx_3 = \log \alpha_3 \cdot x_3 d\lambda$$
$$dx_2 = \log \alpha_2 \cdot x_2 d\lambda \qquad dx_4 = \log \alpha_1 \cdot x_4 d\lambda.$$

Die Integration dieser Gleichungen ergiebt die betreffenden Schraubenlinien in der Form:

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= c_1\alpha_1^\lambda + \lambda c_4\alpha_4\alpha_1^{\lambda-1}\\ \varrho x_2 &= c_2\alpha_2^\lambda\\ \varrho x_3 &= c_3\alpha_3^\lambda\\ \varrho x_4 &= c_4\alpha_1^\lambda,\end{aligned}$$

worin die c_i die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve bedeuten. Man erhält nun sofort die gewöhnlichen Gleichungen der Schraubenlinie, wenn man den Kegelschnitt imaginär annimmt, d. h. wenn man setzt:

$$\begin{array}{lll} \frac{x_2}{x_4} = x + iy & \frac{c_2}{c_4} = a + ib & \log\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = iu \\ \frac{x_3}{x_4} = x - iy & \frac{c_3}{c_4} = a - ib & \log\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = -iu \\ \frac{x_1}{x_4} = z & \frac{c_1}{c_4} = c & \frac{\alpha_4}{\alpha_1} = \alpha; \end{array}$$

es sind hier $\log\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $\log\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ rein imaginär angenommen worden, damit die Bedingung

$$\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1^2$$

erfüllt bleibt. Durch diese Substitutionen gehen unsere Gleichungen über in:

$$\begin{aligned} z &= c + \alpha\cdot\lambda\\ x &= a\cos u\lambda - b\sin u\lambda\\ y &= a\sin u\lambda + b\cos u\lambda,\end{aligned}$$

und setzt man hierin noch:

$$z' = z - c,\qquad a^2 + b^2 = r^2,\qquad \frac{u}{\alpha} = h$$

$$x' = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad y' = \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

so erhält man schliesslich die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\frac{z'}{h}\\ y' &= r\sin\frac{z'}{h}.\end{aligned}$$

Betrachten wir hierin r und z' als Parameter, so erhalten wir die zweifach unendlich vielen Schraubenlinien, deren Tangenten nunmehr den Complex der Charakteristiken bilden. Zwei Ebenen seines Fundamentaltetraëders sind in die unendlich ferne Ebene ($x_4 = 0$) zusammengefallen; die beiden anderen sind imaginär, es sind die durch die Z-Axe gehenden Tangentenebenen an den unendlich fernen Kugelkreis.

§ 7.

Geometrische Beziehungen zwischen den im Vorigen auftretenden Verwandtschaften.

Während ich bisher bemüht war, im Allgemeinen ein Bild von einer unendlich kleinen Bewegung zu geben, wie sie bei unserer Metrik stattfindet, ist es der Zweck der folgenden Untersuchungen, den Zusammenhang der verschiedenen bisher erwähnten Flächen und Complexe im Einzelnen darzustellen. Besonders werden wir uns über die Vorgänge in einer Ebene, in der Nähe eines Punktes oder einer Geraden, als den Grundgebilden der Geometrie Aufschluss zu verschaffen suchen, und so zu Sätzen gelangen, wie sie meist für specielle Massbestimmung von Chasles*) u. A. aufgestellt wurden. Unsere algebraische Behandlungsweise ergiebt dabei leicht eine Reihe von Relationen, die hier näher auszuführen nicht unser Zweck sein kann; es kommt mir vielmehr darauf an, die für specielle Massgeometrie bekannten Sätze abzuleiten und, so weit es mir möglich ist, ein anschauliches Bild des Ganzen zu geben.

Von Interesse erscheint zunächst die Frage nach denjenigen Punkten, deren Fortschreitungsrichtungen (d. h. ihre Charakteristiken) sich bei einer unendlich kleinen Bewegung in einem gegebenen Punkte y schneiden. Den Ort derselben werden wir als Durchschnitt zweier Flächen in folgender Weise bestimmen: Die Coordinaten der Verbindungslinie von y mit einem solchen Punkte x müssen zu denen der Charakteristik von x proportional sein, und somit haben wir die Gleichungen:

$$\varrho x_i x_k (a_k - a_i) = x_i y_k - y_i x_k .$$

Aus ihnen ergiebt sich:

$$\varrho (a_2 - a_1) = \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}$$

$$\varrho (a_4 - a_3) = \frac{y_4}{x_4} - \frac{y_3}{x_3},$$

also müssen die gesuchten Punkte x wegen der zwischen den a_i bestehenden Identität auf einer Fläche 3. Ordnung liegen, dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_4}{x_4} - \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_3}{x_3} = 0 . \tag{1}$$

---

*) Bulletin universel p. Férussac, Nov. 1830; Aperçu hist. Note 25 und 33; Comptes rendus t. XVI, 1843 p. 1429 und t. 52. 1861 p. 1094; vgl. Jonquières: Mélanges de géometrie pure, Paris 1856; Sylvester: Comptes rend. t. 52 p. 741; Cayley ib. p. 1039; Mannheim: Bulletin de la société math. de France, t. I, 1873, p. 106 und Journal de l'école polyt. cah. 43, 1870.

Die Fläche ist nur abhängig von der Lage der Hauptaxen der Bewegung im Raume, also dieselbe für alle Schraubenbewegungen mit demselben Axenpaare; ihre speciellen Eigenschaften sind bekannt: sie hat vier konische Knotenpunkte in den Eckpunkten des Tetraeders (ist also von der 4. Classe) und enthält ausser den Kanten dieses noch 3 in einer Ebene liegende Gerade, von denen jede zwei gegenüberliegende jener Kanten trifft. Auf eine andere Fläche 3. Ordnung mit gleichen Eigenschaften führt uns die Betrachtung derjenigen Punkte, deren Charakteristiken gleichzeitig Charakteristiken von Ebenen sind, welche durch den Punkt y gehen. Wir erhalten ihre Gleichung, indem wir eine solche Ebene:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0$$

mittelst der Gleichungen (4) § 5. transformiren, in der Form:

$$(2) \qquad (a_3 - a_2)\left(\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_4}{x_4}\right) - (a_4 - a_1)\left(\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_3}{x_3}\right) = 0,$$

und folglich haben wir die beiden Sätze*):

*Die Punkte, welche gemeinschaftliche Charakteristik mit den Ebenen eines Bündels haben, bilden eine Fläche 3. Ordnung mit 4 konischen Knotenpunkten in den Eckpunkten des Fundamentaltetraëders, die durch das Centrum des Ebenenbündels geht.***)

*Die Ebenen, welche gemeinschaftliche Charakteristik mit den Punkten einer Ebene haben, umhüllen eine Fläche 3. Classe mit 4 Berührungskegelschnitten in den Seiten des Fundamentaltetraëders (**Steiner'sche** Fläche), welche die gegebene Ebene berührt.*

---

*) Bei der vollkommenen Gültigkeit des Dualitätsgesetzes für unsere Betrachtungen, stelle ich die den gefundenen Sätzen dual entsprechenden ihnen unmittelbar gegenüber.

**) Wir erhalten diese Fläche für spec. Massb., wenn wir beachten, dass die benutzten Transformationsgleichungen gleichzeitig einem Punkte seine Schmiegungsebene in Bezug auf die durch ihn gehende Schraubenlinie zuordnen. Ist nämlich

$$u\xi + v\eta + w\zeta + 1 = 0$$

die Gleichung des Punktes (ξ, η, ζ), so sind die Coordinaten der Schmiegungsebene eines Punktes (x, y, z) für die durch ihn gehende Schraubenlinie mit der Ganghöhe $2\pi h$:

$$u = \frac{-hy}{(x^2+y^2)z}, \qquad v = \frac{+hx}{(x^2+y^2)z}, \qquad w = \frac{-1}{z},$$

und also ist die Gleichung der betreffenden Fläche 3. Ordnung:

$$h(x\eta - y\xi) + (x^2+y^2)(z-\zeta) = 0.$$

Es sind zwei Knotenpunkte der Fläche (2) in den unendlich fernen Punkt der Centralaxe der Bewegung (z-Axe) zusammengefallen, und hier entsteht dadurch ein biplaner Knotenpunkt; das in ihm osculirende Ebenenpaar berührt den imaginären Kugelkreis, denn es ist durch die Gleichung

Unter den Punkten der Fläche (2) sind auch jedenfalls diejenigen, deren Charakteristiken durch den Punkt y selbst hindurchgehen, und nach denen wir oben fragten; den Ort derselben erhalten wir demnach als Durchdringungscurve der Flächen (1) und (2), und da diese die 6 Kanten des Tetraëders gemein haben, so kann die gesuchte Curve nur von der 3. Ordnung sein; also:

Die Punkte, deren Chrakteristiken einen bestimmten Punkt treffen, bilden eine Raumcurve 3. Ordnung; es sind die Bildpunkte der Erzeugenden des durch den betreffenden Punkt gehenden Complexkegels*) (vgl. § 5.).

Die Ebenen, deren Charakteristiken in einer bestimmten Ebene liegen, umhüllen eine abwickelbare Fläche 3. Classe; es sind die Bildebenen für die Tangenten der in der betreffenden Ebene liegenden Complexcurve*).

Es ist damit jedem Punkte eine Curve 3. Ordnung zugeordnet, und *alle diese Curven gehen durch die vier Eckpunkte des Fundamentaltetraëders***), da die Charakteristiken dieser Punkte unbestimmt sind. Eine jede von ihnen berührt natürlich in dem Punkte, zu welchem sie gehört, dessen Charakteristik und, da sie auf dem durch ihn gehenden Complexkegel liegt, hat sie die Bildebene dieser Charakteristik zur Schmiegungsebene; längs ihr wird jener Kegel nämlich von dieser Ebene berührt (vgl. unten). *Wir können somit für einen Punkt die betreffende Curve 3. Ordnung construiren****) und kennen dann von der ihm zugehörigen Fläche (2) ausser dieser Curve 7 auf ihr liegende Gerade: die 6 Kanten des Tetraëders und die durch den Punkt gehende Gerade, welche das Axenpaar trifft, und dadurch *ist die Fläche 3. Ordnung vollkommen bestimmt.* Dass der Punkt y auch auf der zuletzt erwähnten Geraden liegt, folgt aus den folgenden Ueberlegungen, die

---

$$x^2 + y^2 = 0$$

dargestellt; die andern beiden Knotenpunkte sind imaginär, es sind die Schnittpunkte der absoluten Polare der z-Axe, d. h. der unendlich fernen Geraden der Ebene $z = 0$ mit dem Kugelkreise. Ausser dieser Geraden enthält die Fläche noch die z-Axe, die beiden von dem unendlich fernen Punkte derselben an den Kugelkreis gehenden Tangenten, und die durch den Punkt (ξ, η, ζ) zur z-Axe normale Linie, bestimmt durch:

$$z - \zeta = 0 \text{ und } y\xi - x\eta = 0;$$

die beiden sonst mit dieser in einer Ebene liegenden Linien sind in die unendlich ferne Gerade der XY-Ebene hineingefallen.

*) Es ist damit im Folgenden immer Complexkegel und Complexcurve im Charakteristikencomplexe gemeint.

**) Da bei spec. Massbest. zwei dieser Punkte in den unendlich fernen Punkt der Centralaxe zusammenfallen, so ist diese Axe Asymptote für jede in obiger Weise einem Punkte zugehörige Curve 3. Ordnung; diese sind also immer *cubische Ellipsen.*

***) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, II. p. 76.

überhaupt die Lage der verschiedenen Geraden gegen einander näher charakterisiren mögen.

Wir bemerken zunächst, dass die Fläche (1) für den absoluten Pol z der dem Punkte y im Rotationscomplexe zugehörigen Nullebene dieselbe Rolle spielt, wie die Fläche (2) für den Punkt y, denn beide Punkte sind durch die Gleichungen:

$$\mu z_1 = y_1(a_1 - a_4) \qquad \mu z_3 = y_3(a_3 - a_2)$$
$$\mu z_2 = y_2(a_2 - a_3) \qquad \mu z_4 = y_4(a_4 - a_1)$$

mit einander verbunden. Wir können daher alles, was wir für die erste Fläche aussagen, auf die zweite übertragen, wenn wir die Punkte y und z mit einander vertauschen, so dass es nur nöthig ist, eine der beiden Flächen zu betrachten.

Die dreifach berührende Ebene der Fläche (1) ist durch die Coordinaten:

$$\varrho u_1 = \frac{1}{y_1}, \quad \varrho u_2 = -\frac{1}{y_2}, \quad \varrho u_3 = -\frac{1}{y_3}, \quad \varrho u_4 = \frac{1}{y_4}$$

gegeben, sie schneidet dieselbe in den 3 Geraden, von denen jede 2 Kanten des Tetraëders trifft; zwei von diesen Linien schneiden sich im Punkte y, und die dritte, y gegenüberliegende, ist diejenige, welche die beiden Hauptaxen der Bewegung trifft*).

Durch die ersteren beiden Geraden geht auch die erste Polarfläche von y in Bezug auf die Fläche 3. Ordnung, und es ist bemerkenswerth, dass diese mit der durch y gehenden Fläche des Büschels

$$x_1 x_4 - \lambda x_2 x_3 = 0$$

identisch ist; zu ihnen harmonisch liegen die beiden Geraden, in denen die Ebene u den zu y gehörigen Complexkegel schneidet. Die eine ist die Charakteristik des Punktes y und schneidet die gegenüberliegende Seite des erwähnten Dreiecks in dem Punkte z, die andere ist die Charakteristik der Ebene u und schneidet jene Seite in einem Punkte, dessen Charakteristik sie gleichzeitig ist, und in welchem sie die Fläche (2) berührt. Letzteres folgt daraus, dass der genannte Complexkegel diese Fläche überhaupt längs der dem Punkte y zugehörigen Curve 3. Ordnung berührt, wie sogleich gezeigt werden soll.

Durch jeden Punkt x der Fläche geht nämlich im Allgemeinen nur eine Gerade (seine Charakteristik), deren Bildebene den Punkt y in sich enthält; denn eine zweite solche Gerade müsste auf dem zu x gehörigen

---

*) Auf dieser dritten Seite liegt auch der Nullpunkt von u (im Rotationscomplexe), und durch sie geht die absolute Polarebene von y. — Die hier ohne Beweis angeführten Sätze ergeben sich durch einfache Combination der verschiedenen Transformationsgleichungen.

Complexkegel liegen; die Bildebenen der Erzeugenden dieses Kegels schneiden aber (wie in § 8 gezeigt werden wird) alle die Charakteristik von x; die betreffende Gerade müsste daher in der durch y und die Charakteristik von x gehenden Ebene liegen und diese zur Bildebene haben, d. h. sie würde mit der Charakteristik von x zusammenfallen.

Es geht also durch jeden Punkt der Fläche nur eine der betrachteten Charakteristiken, und doch muss jede die Fläche in 3 Punkten schneiden; dies wird dadurch möglich, dass unsere Schlussweise für die Punkte der zu y gehörigen Curve 3. Ordnung ungültig ist. Denn die Charakteristik eines solchen Punktes geht durch y selbst, und die durch sie und y gehende Ebene wird also unbestimmt.

Da dies auch die einzigen Punkte sind, für welche diese Unbestimmtheit eintritt, so schneidet eine jede der Charakteristiken der Punkte der Fläche dieselbe noch in zwei auf der Curve 3. Ordnung gelegenen Punkten; also:

Die Charakteristiken der Ebenen eines Bündels bilden das vollständige Secantensystem der dem Mittelpunkte des Bündels zugeordneten Curve 3. Ordnung, und eine jede solche Secante hat ihren Bildpunkt auf der ihm zugehörigen Fläche 3. Ordnung (2).

Die Charakteristiken der Punkte einer Ebene bilden das vollständige Schnittliniensystem der Ebenen, welche die der gegebenen Ebene zugeordnete abwickelbare Fläche 3. Classe umhüllen, und die Bildebene einer jeden solchen Linie berührt die jener Ebene zugehörige Steiner'sche Fläche.

Die Charakteristiken der Punkte der Curve selbst, welche deren Verbindungslinien mit y sind, können also die Fläche nur in Punkten der Curve treffen; da sie aber die Fläche 3. Ordnung doch in 3 Punkten schneiden müssen, so schliessen wir:

Der durch einen Punkt gehende Complexkegel des Charakteristikencomplexes berührt die dem Punkte zugehörige Fläche 3. Ordnung längs der ihm zugeordneten Curve 3. Ordnung.

Die in einer Ebene liegende Complexcurve des Charakteristikencomplexes liegt auf der ihr zugehörigen Steiner'schen Fläche; die dieser längs dieser Curve umschriebene abwickelbare Fläche 3. Classe ist die der Ebene zugeordnete.

Dieser Kegel schneidet dagegen die Fläche (1) noch in einer zweiten Curve 3. Ordnung, welche zu dem Punkte z in derselben Beziehung steht, wie die erste zu y; längs ihr wird also diese Fläche von dem Complexkegel von z berührt, u. s. f.

Jedem der gegebenen und auch der noch folgenden Sätze kann man ferner einen neuen gegenüberstellen, wenn man bemerkt, dass

die Beziehung zwischen einem Punkte und der Normalebene seiner Charakteristik in ihm durch einen linearen Complex, den Rotationscomplex, vermittelt wird; man hat also z. B.:

Die Normalebenen der Charakteristiken der Punkte einer Fläche (2) *umhüllen eine Steiner'sche Fläche; die Charakteristiken dieser Ebene liegen in der Normalebene der Charakteristik von* y. Und analoge Sätze könnte man durch Benutzung des Translationscomplexes ableiten, wie hier jedoch nicht weiter durchgeführt werden soll.

§ 8.

Fortsetzung. Congruenzen der auftretenden Complexe.

Die mehrfach erwähnte Curve 3. Ordnung können wir auch als theilweisen Durchschnitt des Complexkegels mit einer anderen Fläche 2. Ordnung erhalten; diese letztere bestimmt sich in folgender Weise: Wir fragen nach dem Orte der Punkte, deren Charakteristiken eine gewisse Gerade (p'_{ik}) schneiden; die Coordinaten p_{ik} jener genügen dann der Gleichung:

$$p_{12}'p_{34} + p_{13}'p_{42} + p_{14}'p_{23} + p_{34}'p_{12} + p_{42}'p_{13} + p_{23}'p_{14} = 0,$$

und wegen

$$\varrho p_{ik} = x_i x_k (a_k - a_i)$$

liegen die Bildpunkte der Linien p auf der Fläche:

$$(3) \ldots (a_4 - a_3)(p_{12}'x_3x_4 + p_{34}'x_1x_2) + (a_1 - a_3)(p_{13}'x_2x_4 - p_{42}'x_1x_3) + (a_4 - a_1)p_{23}'x_1x_4 + (a_3 - a_2)p_{14}'x_2x_3 = 0$$

Also haben wir den Satz:

Die Punkte, deren Charakteristiken eine bestimmte Gerade schneiden, liegen auf einer Fläche 2. Ordnung.	*Die Ebenen, deren Charakteristiken eine bestimmte Gerade schneiden, berühren eine Fläche 2. Classe.*

Auf dieser Fläche 2. Ordnung liegen dann alle die Curven 3. Ordnung, welche den Punkten jener festen Geraden in obiger Weise zugeordnet sind; und den Geraden, die durch einen bestimmten Punkt y gehen, entsprechen in dieser Weise Flächen 2. Ordnung, welche alle die dem Punkte zugehörige Curve 3. Ordnung enthalten (in der That gehen auch alle diese Flächen durch die 4 Eckpunkte des Fundamentaltetraëders). Wir werden sehen, dass unter ihnen auch der Complexkegel von y enthalten ist, indem dieser mit der der Charakteristik von y durch die Gleichung (3) entsprechenden Fläche identisch ist; und auch die Curve 3. Ordnung werden wir von einem neuen Gesichtspunkte betrachten. Es führen dazu die folgenden Erörterungen:

Nehmen wir zwei auf einander folgende Lagen einer Geraden, so

sind die Punktreihen derselben durch die linearen Gleichungen, welche die unendlich kleine Bewegung darstellen, projectivisch auf einander bezogen, und somit erzeugen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Fläche 2. Ordnung. Fassen wir nun diese Geraden als Schnittlinien aufeinander folgender Lagen von Ebenen auf, so müssen diese Ebenen gleichzeitig alle Flächen 3. Classe der Schaar berühren, welche den Ebenen des durch die betrachtete Gerade bestimmten Büschels in der Weise zugeordnet sind, dass die Punkte einer solchen Ebene gemeinschaftliche Charakteristik mit den die Fläche umhüllenden Ebenen haben (vgl. § 7.). Die gemeinsame Developpable dieser Flächen besteht aber aus den 6 Kanten des Fundamentaltetraëders, die für uns keine Bedeutung haben, und einer Developpablen 3. Classe. Es folgt also:

Die Charakteristiken der Punkte einer Geraden sind die Erzeugenden einer Fläche 2. Ordnung; jede ist wieder Charakteristik einer Ebene, und alle diese Ebenen umhüllen eine abwickelbare Fläche 3. Classe, und entsprechend: *Die Charakteristiken der Ebenen eines Büschels erzeugen eine Fläche 2. Ordnung; jede ist wieder Charakteristik eines Punktes, und alle diese Punkte liegen auf einer Raumcurve 3. Ordnung*).*

Hierdurch ist jeder Geraden eine solche Curve zugeordnet; ausserdem entspricht auch jedem Punkte derselben eine solche in der oben angegebenen Weise (§ 7.), und die Secanten dieser letzteren sind die Charakteristiken der durch den Punkt gehenden Ebenen. Unter diesen sind nun jedenfalls, wo auch der Punkt auf der Geraden liegen mag, die Ebenen des durch dieselbe bestimmten Büschels, und ihre Charakteristiken müssen daher alle den Punkten der Geraden entsprechende Curven 3. Ordnung schneiden. Alle diese Curven liegen aber auf der Fläche 2. Ordnung, welche der Geraden durch die Gleichung (3) zugeordnet ist; folglich liegen die betreffenden Charakteristiken ganz auf dieser Fläche, d. h.:

Die durch die Charakteristiken der Ebenen eines Büschels erzeugte Fläche 2. Ordnung ist identisch mit derjenigen, welche von den Punkten gebildet wird, deren Charakteristiken die Axe des Büschels schneiden. Diese Axe gehört der anderen Schaar von Erzeugenden der Fläche an; die ihr zugehörige Curve 3. Ordnung schneidet die Charakteristiken der Ebenen des Büschels nur einmal, während die letzteren von den den Punkten der Axe zugehörigen Curven zweimal geschnitten werden. Analoges gilt für die von den Charakteristiken der Punkte eines Strahles erzeugte Fläche.

---

*) Für eine Gerade, welche beide Hauptaxen der Bewegung schneidet, zerfällt die Curve in diese Gerade und einen Kegelschnitt, da alle den Punkten einer solchen entsprechenden Flächen 3. Ordnung diese Gerade selbst enthalten.

Ist eine Gerade Charakteristik eines ihrer Punkte, so schneiden sich offenbar ihre beiden successiven Lagen in diesem Punkte, und da diese beiden Linien wieder projectivisch auf einander bezogen sind, so haben wir:

Gehört eine Gerade dem Charakteristiken-Complexe an,

so umhüllen die Charakteristiken ihrer Punkte einen Kegelschnitt in der Ebene, deren Charakteristik sie ist (Schmiegungsebene der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie).	*so bilden die Charakteristiken der durch sie gehenden Ebenen einen Kegel 2. Ordnung, dessen Spitze im Bildpunkte der Geraden liegt.*

Die der Geraden entsprechende Curve 3. Ordnung fällt dann mit der ihrem Bildpunkte zugehörigen zusammen, und der durch diesen gehende Complexkegel wird mit der Fläche identisch, die seiner Charakteristik durch die Gleichung (3) entspricht, d. h. die Charakteristiken der Punkte des Kegels schneiden die Charakteristik seiner Spitze, und ebenso: Die Charakteristiken der einen Complexkegelschnitt umhüllenden Ebenen schneiden die Charakteristik seiner Ebene. Ein solcher Kegelschnitt und die Schnittcurve seiner Ebene mit der Fundamentalfläche haben 4 Tangenten gemein; *zwei von diesen schneiden sich in dem der Ebene durch den Rotationscomplex zugeordneten Nullpunkte*, (und man sieht so, wie der Kegelschnitt bei spec. Massbestimmung in eine Parabel übergeht, deren Brennpunkt mit dem Nullpunkte der Ebene zusammenfällt). Die Nullebene eines Punktes nämlich schneidet den von ihm an die Fundamentalfläche gehenden Berührungskegel in 2 Linien, welche dem Rotationscomplexe angehören; die Charakteristiken der Punkte dieser Linien schneiden daher deren absolute Polaren, die selbst wieder von den Linien (im Berührungspunkte) getroffen werden; folglich liegen die Charakteristiken der Punkte einer jeden von ihnen in einer Ebene, und desshalb müssen die beiden Linien selbst dem Charakteristiken-Complexe angehören, d. h. in der betrachteten Ebene den Complexkegelschnitt berühren. Ebenso beweist man, dass *die beiden anderen gemeinsamen Tangenten der beiden erwähnten Kegelschnitte sich in dem ihrer Ebene durch den Translationscomplex zugehörigen Nullpunkte schneiden*; man hat dabei zu zeigen, dass die Charakteristiken der durch eine jede von ihnen gelegten Ebenen sich in ihrem Berührungspunkte mit der Fundamentalfläche schneiden. Diese Beziehungen können wir nun auch in folgender Weise aussprechen:

Die durch den Charakteristiken-Complex und den Tangenten-Complex der Fundamentalfläche bestimmte Congruenz 4. Ordnung und Classe zerfällt in zwei Congruenzen 2. Ordnung und Classe, von denen jede einem der beiden der unendlich kleinen Bewegung zugehörigen linearen Complexe angehört.

Wir haben uns hier darauf beschränkt, die von den Charakteristiken der Punkte einer Ebene und Punktreihe oder der Ebenen eines Bündels und Büschels erzeugten Gebilde zu untersuchen; man könnte natürlich auch weiter gehen und die Bewegung anderer Flächen betrachten; die neue Lage einer solchen steht dann immer in linearer Beziehung zu der alten. Man erhält so z. B.:

Die Charakteristiken der einen Kegel 2. Ordnung berührenden Ebenen bilden eine windschiefe Fläche 4. Ordnung mit einer Doppelcurve 3. Ordnung; ist der Kegel ein Complexkegel des Charakteristikencomplexes, so fällt diese Curve mit dem Orte der Punkte zusammen, deren Charakteristiken durch seine Spitze hindurchgehen, und die windschiefe Fläche geht in die dieser Curve zugehörige abwickelbare über.

Da alle Tangenten einer solchen Curve 3. Ordnung dem Charakteristiken-Complex angehören, so können wir diesen auch durch jene Curven, als Complexcurven, entstanden denken; wir können so den ganzen Complex behandeln, indem wir diese Curven statt der geraden Linie als Raumelement einführen*). Dabei ergiebt sich, dass alle durch einen Punkt gehenden Curven unserer Art auf dem Complexkegel dieses Punktes liegen.

§ 9.

Ueber einige metrische Relationen.

Während wir bisher unsere Aufmerksamkeit wesentlich auf die geometrischen Verhältnisse richteten, und bei der Zusammensetzung, resp. Zerlegung unendlich kleiner Bewegungen nur die gegenseitige Lage der verschiedenen Gebilde berücksichtigten, stellen wir uns jetzt die Aufgabe, die Zusammensetzung der Bewegungen auch der Grösse nach zu bestimmen und die metrischen Relationen festzustellen, welche für die Vorgänge im Raume bei einer unendlich kleinen Bewegung charakteristisch sind, oder welche zwischen verschiedenen Bewegungen bestehen müssen, damit sie vereinigt eine bestimmte hervorrufen. Wir führen dabei alle Operationen zunächst in der in § 2. gegebenen kanonischen Form der Transformation aus, ohne dadurch der Allgemeinheit der erhaltenen Resultate Abbruch zu thun; denn alle unsere Ausdrücke tragen einen *absolut invarianten Charakter* gegenüber einer Transformation der Fundamentalfläche in sich und werden daher durch eine Verlegung des Coordinatensystems nicht geändert. In dieser Weise leiten wir für eine einzelne allgemeine Schraubenbewegung besonders die Sätze ab, welche den von Chasles für spec. Massbestimmung ge-

*) Vgl. Lie: Göttinger Nachrichten, 1870.

gebenen (a. a. O.) entsprechen; es kommt dabei wieder nicht so sehr darauf an, ihm in allen Einzelheiten zu folgen, als zu zeigen, wie derartige Fragen bei unserer projectivischen Auffassung sich gestalten.

Bei einer unendlich kleinen Bewegung schreitet jeder Punkt auf einer gewissen Geraden fort und jede Ebene dreht sich um eine solche; für jeden Punkt wird die Grösse seiner Verschiebung im Allgemeinen eine andere, für jede Ebene ihr Drehungswinkel ein anderer sein. Betrachten wir jedoch die Bewegung eines Punktes und die einer Ebene, welche mit ihm gemeinsame Charakteristik hat, so besteht zwischen beiden eine gewisse Relation.

Das von einem Punkte zurückgelegte Streckenelement ist nämlich (vgl. Klein, Math. Ann. IV, p. 618):

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\Omega_{x,\,dx}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx}}}{\Omega_{xx}}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist aber die linke Seite der Gleichung der Fundamentalfläche in Liniencoordinaten, geschrieben in den Coordinaten p_{ik} der Charakteristik von x; es ist also

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\Phi_{pp}}}{\Omega_{xx}}, \tag{1}$$

wo wir uns die p_{ik} aus den x und den Coordinaten des benachbarten Punktes, in den x übergegangen ist, berechnet denken müssen. Nehmen wir nun die Transformation in der kanonischen Form an, so ist bis auf einen unendlich kleinen Factor:

$$p_{ik} = x_i x_k (a_k - a_i)$$

und

$$\Omega_{xx} = 2\,(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 2\,\left(\frac{p_{14}}{a_4 - a_1} + \frac{p_{23}}{a_3 - a_2}\right).$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in (1) erhalten wir also:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(p_{14} + p_{23})^2 + 4\,p_{12}\,p_{34}}}{(a_4 - a_1)\,p_{23} + (a_3 - a_2)\,p_{14}}\,(a_4 - a_1)\,(a_3 - a_2), \tag{2}$$

und entsprechend ist die unendlich kleine Rotation der zugehörigen Ebene u gegeben durch:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(q_{14} + q_{23})^2 + 4\,q_{12}\,q_{34}}}{(a_4 - a_1)\,q_{23} + (a_3 - a_2)\,q_{14}}\,(a_3 - a_2)\,(a_4 - a_1) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(p_{14} + p_{23})^2 + 4\,p_{12}\,p_{34}}}{(a_4 - a_1)\,p_{14} + (a_3 - a_2)\,p_{23}}\,(a_3 - a_2)\,(a_4 - a_1).\end{aligned} \tag{3}$$

Im Nenner von (2) steht hier die linke Seite der Gleichung des der Bewegung zugeordneten Translationscomplexes, und in der That kann dieselbe von Ω_{xx} nur um einen Factor verschieden sein, da die

Charakteristiken der Punkte der Fundamentalfläche dem Complexe angehören (vgl. § 6., Gl. (4)). Ebenso tritt dann in (3) der Rotationscomplex auf.

Besonders charakteristisch für eine unendlich kleine Bewegung sind nun die Werthe von ε und ω, gebildet für eine der Hauptaxen der Bewegung (für die andere vertauschen sich dann nur beide), d. h. die Grösse der Verschiebung einer solchen in sich und die der Drehung des bez. Ebenenbüschels um sie. Bezeichnen wir erstere für die Axe $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, d. h.

$$p_{12} = 0,\ p_{34} = 0,\ p_{14} = 0$$

mit e und die Grösse der zugehörigen Drehung mit v, so wird:

$$e = \tfrac{1}{2}(a_3 - a_2)\,,\quad v = \tfrac{1}{2}(a_4 - a_1)\,, \tag{4}$$

und damit haben wir eine unmittelbare *Deutung für die Coefficienten der beiden linearen Complexe in ihrer kanonischen Form. Das Vorzeichen dieser Grössen bestimmt uns in Folge dieser Bedeutung den Sinn der Bewegung*; ändere ich dasselbe in beiden, so bewegen sich alle Punkte auf denselben Schraubenlinien, wie vorhin, nur in entgegengesetzter Richtung, und in der That bleiben dann die beiden linearen Complexe ungeändert; ändere ich dagegen das Vorzeichen von e oder v allein, so bewegen sich alle Punkte auf Schraubenlinien, die den vorhin auftretenden gleich, aber entgegengesetzt gewunden sind*); die zugehörigen linearen Complexe liegen mit den obigen in Involution.

Das Product der Ausdrücke ε und ω können wir nun leicht durch e und v ausdrücken. Es ist nämlich, da die Linie p dem Charakteristikencomplexe angehört, also den Gleichungen (2) § 5. genügt:

$$\begin{aligned}\Phi_{pp} &= p_{23}^2 + p_{14}^2 + 2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42}) \\ &= p_{23}^2 + p_{14}^2 + 2\,\frac{(a_4 - a_2)(a_3 - a_1) - (a_3 - a_4)(a_2 - a_1)}{(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)}\,p_{14}p_{23}\,,\end{aligned}$$

oder wegen:

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3:$$

$$\Phi_{pp} = p_{23}^2 + p_{14}^2 + p_{14}p_{23}\,\frac{(a_4 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2}{(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)}\,.$$

Das Product der beiden Nenner in ε und ω findet man aber gleich demselben Ausdrucke, noch multiplicirt mit $(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)$; folglich ist

$$\varepsilon \cdot \omega = e \cdot v = \text{Const.} \tag{5}$$

---

*) Mit e und v steht nach § 5. der *Parameter des betreffenden Complexes* in einfachem Zusammenhange, er wechselt sein Vorzeichen mit dem Producte ev. Je nachdem er also positiv oder negativ ist, können wir die linearen Complexe als *links* oder als *rechts gewundene* unterscheiden, wie es Plücker bei spec. Massbest. that, vgl. „Neue Geometrie“ n. 48.

Also: *Bei einer unendlich kleinen Bewegung steht die Grösse der Rotation einer Ebene um ihre Charakteristik in umgekehrtem Verhältnisse zu der Translation des Bildpunktes derselben auf ihr*).*

Bezeichnen wir nach Gleichung (3) durch ω die Grösse der Rotation einer Ebene um ihre Charakteristik p, durch ω' die entsprechende Grösse, die sich auf diejenige Gerade p' bezieht, welche p vermöge des Rotationscomplexes als conjugirte Polare zugeordnet ist, so finden wir unter Anwendung der Gleichungen (8) § 3:

$$\omega^2 + \omega'^2 = e^2 + v^2 \text{ **)},$$

und ebenso, wenn wir von zwei Linien ausgehen, die einander durch den Translationscomplex conjugirt sind:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = e^2 + v^2 .$$

Es geben hier ω und ω' die Grösse der beiden Rotationen, durch welche die Bewegung eines jeden ebenen Punktsystems ersetzt werden kann (vgl. § 3.), nämlich Drehung um die Charakteristik der Ebene und Rotation der Ebene in sich um ihren Nullpunkt; entsprechend geben ε und ε' die Grösse der beiden Bewegungen, durch welche die eines jeden Ebenenbündels ersetzt werden kann, und so haben wir den Satz:

Bei einer unendlich kleinen Bewegung ist die Summe der Quadrate der beiden Bewegungen, welche dabei einem ebenen Punktsystem oder einem Ebenenbündel ertheilt werden, constant.

Für die *Zusammensetzung verschiedener Bewegungen* betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wo sich die Axen zweier Rotationen oder die Directricen zweier Translationen in einem Punkte schneiden. Wir ertheilen also einem Punkte x gleichzeitig zwei verschiedene Verschiebungen mit den Coordinaten P_{ik} und P'_{ik}, von denen

---

*) Die Ebene ist hier Schmiegungsebene des Punktes in Bezug auf die durch diesen gehende Schraubenlinie, also können wir diesen Satz auch so aussprechen: *Das Product des Bogenelementes in den Torsionswinkel ist dasselbe für alle projectivischen Schraubenlinien desselben Systems*, d. h. für alle, die durch dieselbe lineare Transformation in sich übergehen.

**) Für spec. Massb. lautet die entsprechende Gleichung (vgl. Chasles und Jonquières a. a. O.), indem e im Vergleiche zu v unendlich klein wird:

$$\omega^2 + \omega'^2 = v^2;$$

es tritt hier also recht deutlich hervor, wie bei allgem. Massb. die Dualität in jeder Weise gewahrt wird, indem bei letzterer e und v vollkommen gleichberechtigt auftreten. — Diese Quadratsumme, in welcher e und v gleichmässig vorkommen, können wir als ein Mass für die Intensität der unendlich kleinen Bewegung betrachten; und in der That werden wir dazu in § 13. von einem andern Ausgangspunkte aus geführt werden.

die eine ihn in den Punkt $x + dx$, die andere in den Punkt $x + dx'$ zu bringen sucht. Die Quadrate der Entfernungen der Anfangslage von diesen beiden Punkten sind dann nach (1):

$$(6)\quad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{\Omega^2_{x,\,dx} - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx}}{\Omega^2_{xx}} = \dfrac{\Phi_{PP}}{\Omega^2_{xx}} \\[2ex] ds'^2 = \dfrac{\Omega^2_{x\,dx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx'\,dx'}}{\Omega^2_{xx}} = \dfrac{\Phi_{P'P'}}{\Omega^2_{xx}}\,. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit Π_{ik} die Coordinaten der resultirenden Bewegung, so dass also (§ 4.):

$$\Pi_{ik} = P_{ik} + P'_{ik}$$

ist, so folgt, dass auch

$$(\Pi, \Pi) = 0$$

wird; diese Bewegung besteht also wieder in einer Translation, und ihre Grösse ist gegeben durch

$$d\sigma^2 = \frac{\Phi_{\Pi\Pi}}{\Omega^2_{xx}}\,.$$

Setzt man andererseits in dem Ausdrucke für ds^2 die Summe $dx + dx'$ statt dx, so ist

$$d\sigma^2 = ds^2 + ds'^2 - 2\,\frac{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx'} - \Omega_{x\,dx}\,\Omega_{x\,dx'}}{\Omega^2_{xx}}\,.$$

Der Zähler des letzten Gliedes ist nun gleich $\Phi_{PP'}$, und da

$$\cos(ds, ds') = \frac{\Phi_{PP'}}{\sqrt{\Phi_{PP}\cdot\Phi_{P'P'}}}\,,$$

so ergiebt sich wegen der Gleichungen (6):

$$(7)\qquad d\sigma^2 = ds^2 + ds'^2 - 2\,ds\,ds'\cos(ds, ds')\,.$$

Ebenso erhält man unter Berücksichtigung von (6) leicht das Resultat:

$$(8)\qquad \frac{\Omega_{xx}\cdot\sqrt{\Phi_{PP}\,\Phi_{P'P'} - \Phi^2_{PP'}}}{\sqrt{\Phi_{PP}\cdot\Phi_{P'P'}\cdot\Phi_{\Pi\Pi}}} = \frac{\sin(ds, ds')}{d\sigma} = \frac{\sin(d\sigma, ds)}{ds'} = \frac{\sin(ds', d\sigma)}{ds}\,,$$

und ganz analoge Relationen folgen, wenn man statt der P die Coordinaten zweier Rotationen einsetzt; also:

Für die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen oder Translationen, deren Axen, resp. Directricen sich schneiden, gelten ganz dieselben Gesetze, wie für die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen bei specieller Massbestimmung. Es ist dies eigentlich selbstverständlich, da wir in der Nähe des Punktes x unsere allgemeine

Massbestimmung durch eine sie in ihm berührende specielle ersetzen können*). *Die geometrische Construction der Resultante mit Hülfe des Parallelogramms dürfen wir jedoch nicht anwenden*, da dieselbe nicht mehr eindeutig ist und überdies voraussetzt, dass bei einer Translation sich alle Punkte auf parallelen Geraden bewegen.

Schneiden sich die betrachteten Geraden nicht, so ergiebt die Addition ihrer Coordinaten, wenn man diese als Coordinaten einer Rotation (resp. Translation) auffasst, nach § 4. einen linearen Complex, und die resultirende Bewegung besteht in einer Schraubenbewegung um eine seiner Hauptaxen, welche man in gleicher Weise durch die Aufeinanderfolge von zwei unendlich kleinen Rotationen um zwei in Bezug auf den Complex conjugirte Gerade erhalten kann (resp. durch die von zwei unendlich kleinen Translationen). Zwischen den Grössen zweier solcher Bewegungen besteht dann immer eine constante Relation, wie man auch die beiden conjugirten Geraden wählen mag, und diese soll hier noch abgeleitet werden.

Sind nämlich Q_{ik} und Q'_{ik} die Coordinaten zweier Rotationen der Art, ω und ω' bez. die Grössen derselben, so ist**)

$$\omega = \frac{\sqrt{\Phi_{QQ}\cdot\Delta}}{\Omega'_{uu}} \qquad \omega' = \frac{\sqrt{\Phi_{Q'Q'}\cdot\Delta}}{\Omega'_{u'u'}},$$

wenn u eine durch Q gehende Ebene und u' eine solche durch Q' bedeutet. Das Product dieser Grössen in das gegenseitige Moment der beiden Geraden Q und Q' ist dann (vgl. § 1)

$$M_{(QQ')}\cdot\omega\cdot\omega' = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}(Q, Q')}{\Omega'_{uu}\cdot\Omega'_{u'u'}}.$$

Für unsere kanonische Form wird aber wegen der Gleichungen (8) § 3. (in denen wir $\varrho = 1$ zu setzen haben, damit die Addition der Coordinaten die des verlangten Complexes ergiebt):

$$\begin{aligned}(Q, Q') &= -2\,Q_{12}Q_{34} - 2\,Q_{13}Q_{42} + Q_{14}'Q_{23} + Q_{23}'Q_{14}\\ &= Q_{14}Q_{23} + Q_{14}'Q_{23}' + Q_{14}'Q_{23} + Q_{23}'Q_{14}\\ &= (Q_{14} + Q_{14}')(Q_{23} + Q_{23}').\end{aligned}$$

Ferner können wir setzen:

$$Q_{ik} + Q'_{ik} = K_{ik} + K'_{ik},$$

wenn K_{ik} und K'_{ik} die Coordinaten von irgend zwei anderen Rotationen sind, die die verlangte Bewegung hervorrufen. Die Axe K kön-

*) Vgl. Klein: Nicht-Euklid. Geometrie (Math. Ann. IV), § 14.

**) Nach einer in § 4. gemachten Bemerkung muss hier im Zähler $\sqrt{\Delta}$ als Factor hinzutreten.

nen wir speciell so wählen, dass sie Charakteristik der Ebene u wird, alsdann schneiden sich Q' und K' im Nullpunkte von u, und wir können als Ebene u' die durch diese beiden Geraden bestimmte Ebene nehmen. Drehen wir schliesslich u noch so um Q, dass K' Charakteristik von einer Ebene u' des durch Q' bestimmten Büschels wird, so haben wir:

$$K_{ik} = (a_k - a_i)\, u_i u_k\,, \qquad K'_{ik} = (a_k - a_i)\, u_i' u_k'$$

und wegen (8) § 3.:

$$Q_{23} + Q_{23}' = K_{23} + K_{23}' = K_{23} + \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} K_{14} = (a_3 - a_2)(u_2 u_3 + u_1 u_4)\,,$$

$$Q_{14} + Q_{14}' = K_{14} + K_{14}' = K_{14}' + \frac{a_4 - a_1}{a_3 - a_2} K_{23}' = (a_4 - a_1)(u_2' u_3' + u_1' u_4')\,.$$

Hier stehen aber rechts die Ausdrücke für Ω'_{uu} und $\Omega'_{u'u'}$, multiplicirt mit e resp. v, und folglich wird:

$$M_{(QQ')} \cdot \omega \cdot \omega' = e \cdot v\,,$$

und ebenso entsprechend:

$$M_{(PP')} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon' = e \cdot v\,,$$

wenn P und P' die Coordinaten einander conjugirter Translationen sind, welche dieselbe Bewegung wie Q und Q' hervorbringen, und ε, ε' die Grössen dieser Translationen bedeuten. Also:

Wie man auch eine unendlich kleine Bewegung durch 2 Rotationen (resp. Translationen) ersetzen mag, es hat immer das Product, gebildet aus dem gegenseitigen Momente ihrer beiden Axen (resp. Directricen) und der Grösse der beiden Rotationen (resp. Translationen) denselben Werth.

Für specielle Massbestimmung ist dies der bekannte, von Chasles*) zuerst gegebene Satz von der *Constanz des durch die beiden Rotationen bestimmten Tetraëders.* Wir können ihn hier jedoch nicht in dieser geometrischen Form aussprechen; denn tragen wir auf den beiden Axen den Rotationswinkeln gleiche, unendlich kleine Strecken ab, so ist der Inhalt des so bestimmten Tetraëders noch von der gegenseitigen Entfernung dieser Streckenelemente, also einer endlichen Grösse abhängig, und würde sich demnach durch obiges Product nur ebenso wie bei gewöhnlicher Massbestimmung ausdrücken lassen, wenn wir eine specielle Massbestimmung construiren könnten, welche die gegebene allgemeine längs jener Verbindungslinie berührt. Das letztere ist aber nicht möglich.

---

*) Comptes rend. 1843.

§ 10.

Specielle Arten unendlich kleiner Bewegungen.

Lässt die Transformation ausser der Fundamentalfläche noch einen Punkt des Raumes ungeändert, so besteht die Bewegung in einer *Rotation um diesen Punkt*; es geht dabei natürlich auch der von ihm an die Fläche gehende Tangentenkegel, die Berührungscurve dieses und die absolute Polarebene des Punktes in sich über. *Jede Rotation um einen Punkt ist also identisch mit einer Bewegung, bei der eine Ebene fest bleibt*, und wir brauchen nur die eine Art der Bewegung zu betrachten; die entsprechenden Sätze für die andere ergeben sich dann einfach durch dualistische Uebertragung. In der Ebene kann man nun auch bei unserer allgemeinen Massbestimmung eine Bewegung in jedem Augenblicke ersetzen durch eine Rotation um einen Punkt*), folglich *besteht auch eine Rotation des Raumes um einen Punkt in jedem Augenblicke in einer Drehung um eine durch den Punkt gehende Axe***) (= Verschiebung längs einer in der absoluten Polarebene des Punktes gelegenen Geraden), eine Bewegung, welche wir schon oben näher betrachtet haben. *Die beiden linearen Complexe wurden für sie specielle*, und der *Charakteristikencomplex zerfällt in diese****). Nur die Geraden der durch sie bestimmten Congruenz sind noch gleichzeitig Charakteristiken von Punkten und Ebenen, im Allgemeinen dagegen bilden erstere den Translations-, letztere den Rotationscomplex, und für die Ebenen des durch die Axe des Translationscomplexes bestimmten Büschels, sowie für die Punktreihe ihrer absoluten Polare werden die Charakteristiken unbestimmt.

Zu anderen Specialfällen der Bewegung werden wir gelangen, wenn das fest bleibende Tetraëder unbestimmt wird, oder wenn gewisse Kanten desselben zusammenfallen. Es zeigt sich dies abhängig von dem Verhalten der Erzeugenden der Fundamentalfläche bei der Transformation, und wir können die verschiedenen hier möglichen Fälle demnach schematisch durch die Zeichen

$$[1, 2], \quad [1, 1], \quad [\infty, 2], \quad [\infty, 1]$$

darstellen, wenn $[\alpha, \beta]$ bedeutet, dass α Erzeugende der einen und β der andern Art bei der Transformation fest bleiben. Wir wollen diese

---

*) Vgl. F. Klein: Nicht-Eukl. G., § 9., Math. Ann. IV. Für spec. Massb. zuerst gegeben von Joh. Bernoulli: De centro spontaneo rotationis; opera t. IV. 1742.

**) Für spec. Massb. zuerst von d'Alembert: Traité de la précession des équinoxes. 1749.

***) Wie man sofort erkennt, wenn man in den Gleichungen (2) § 5. etwa $a_4 = a_1$ setzt.

Fälle nun im Folgenden im Einzelnen durchgehen und dabei besonders auf das Verhalten der auftretenden Complexe achten.

I. *Es fallen 2 Erzeugende derselben Art zusammen*, [1, 2]; die beiden andern bleiben getrennt. Das Tetraëder reducirt sich auf 2 Ebenen, von denen jede die doppelt zählende Erzeugende und eine der beiden anderen enthält. Bei der Transformation geht also auch das so bestimmte Ebenenbüschel in sich über, und ich kann die Bewegung gleichzeitig als Rotation um die Axe dieses Büschels und als Translation nach derselben auffassen.

Lege ich das Coordinatentetraëder so, dass diese Axe die Schnittlinie der Ebenen $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ wird, und in diesen die beiden anderen fest bleibenden Erzeugenden durch ihren Schnitt bez. mit $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ bestimmt werden, so ist die Gleichung unserer Fundamentalfläche von der Gestalt:

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}\, a_x{}^2 = a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{24} x_2 x_4 = 0\,,$$

und die betreffende unendlich kleine Transformation können wir in der Form annehmen:

$$(2) \qquad \begin{cases} dx_1 = \alpha_1 x_1 d\lambda & dx_2 = (\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2)\, d\lambda \\ dx_4 = \alpha_4 x_4 d\lambda & dx_3 = (\alpha_4 x_3 + \alpha_3 x_4)\, d\lambda\,. \end{cases}$$

Soll dieselbe die Fläche (1) in sich überführen, d. h. soll die Gleichung

$$M a_x{}^2 = a_x \cdot a_{dx}$$

bestehen (vgl. § 4.), so müssen die Coëfficienten der Gleichungen (2) der Bedingung

$$(3) \qquad a_{13}\alpha_3 + a_{24}\alpha_2 = 0$$

genügen. Die so bestimmte Transformation führt aber auch jede Fläche des Büschels:

$$(4) \qquad a_{13} x_1 x_3 + a_{24} x_2 x_4 + \mu x_1 x_4 = 0$$

in sich über, wenn μ ein Parameter ist, d. h. des Büschels von Flächen, deren gemeinsame Durchdringungscurve sich auf obige 3 Erzeugende reducirt. Unter den letzteren zählt eine doppelt, und in diese fällt auch das Axenpaar der beiden zugehörigen linearen Complexe zusammen; *beide haben in Folge dessen eine specielle Congruenz gemein.* In der That wird die Gleichung des Translationscomplexes:

$$\Psi = a_{13}(\alpha_4 - \alpha_1) p_{13} + (a_{13}\alpha_3 - a_{24}\alpha_2 + a_{14}(\alpha_4 - \alpha_1)) p_{14} + a_{24}(\alpha_4 - \alpha_1) p_{24} = 0$$

und die des absolut conjugirten:

$$\Psi + 2\, a_{14}\, (\alpha_4 - \alpha_1)\, p_{14} = 0\,.$$

Man erkennt, dass die Leitlinien der so bestimmten Congruenz in die Gerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zusammenfallen.

Die Gleichung des Charakteristikencomplexes wird in diesem Falle:

(5) $$\alpha_2\alpha_3 p_{14}^2 + (\alpha_4 - \alpha_1)^2 p_{12}p_{34} = 0\,,$$

auch er wird also particularisirt, denn seine Singularitätenfläche besteht nunmehr aus den beiden fest bleibenden Ebenen*). Die Geraden des Complexes umhüllen natürlich noch die projectivischen Schraubenlinien, und ein Punkt dieser letzteren drückt sich jetzt in Function eines Parameters λ aus durch die Gleichungen:

(6) $$\begin{cases} \varrho x_1 = c_1 e^{\alpha_1\lambda} & \varrho x_2 = e^{\alpha_1\lambda}(c_2 + \lambda c_1\alpha_2) \\ \varrho x_4 = c_4 e^{\alpha_4\lambda} & \varrho x_3 = e^{\alpha_4\lambda}(c_3 + \lambda c_4\alpha_3)\,, \end{cases}$$

wo die c, damit die Curve auf einer bestimmten Fläche des Büschels (4) liegt, noch der Bedingung:

$$a_{13}c_1 c_3 + a_{24}c_2 c_4 + \mu c_1 c_4 = 0$$

genügen müssen. Verstehe ich also unter den c die Coordinaten eines Punktes dieser Fläche, so geben die Gleichungen (6) die durch ihn gehende Schraubenlinie. *Alle diese Curven berühren die Hauptaxe der Bewegung,* da für $\lambda = -\infty$ x_1 und x_4 verschwinden, während $\frac{x_2}{x_3}$ einen endlichen Werth behält.

II. *Es fallen die beiden Erzeugenden eines jeden Systems zusammen,* [1, 1]. Alsdann fallen auch alle 4 Ebenen unseres Tetraëders in eine zusammen; diese möge durch $x_1 = 0$ gegeben sein, und die beiden in ihr liegenden Erzeugenden der Fundamentalfläche durch ihre Schnittlinien mit den Ebenen $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$. Die Gleichung dieser Fläche erhält dann die Form:

$$a_x^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 = 0\,,$$

und die Transformationsgleichungen für eine unendlich kleine Bewegung, die jene Ebene fest lässt, werden:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \alpha_{11}x_1 d\lambda \\ dx_2 &= (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{11}x_2)\,d\lambda \\ dx_3 &= (\alpha_{31}x_1 + \alpha_{11}x_3)\,d\lambda \\ dx_4 &= (\alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{11}x_4)\,d\lambda\,. \end{aligned}$$

Damit wieder die Gleichung

$$Ma_x^2 = a_x a_{dx}$$

identisch erfüllt ist, müssen die Transformationscoëfficienten folgenden Bedingungen genügen:

---

*) Nr. 18 in der Aufzählung des Herrn Lie (Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe § 23.; Math. Ann. Bd. V) und Nr. 14 in der des Herrn Weiler im vorliegenden Bande der Math. Ann.

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha_{21}a_{21} + \alpha_{31}a_{31} + \alpha_{41}a_{41} = 0 \\ \alpha_{31}a_{32} + \alpha_{42}a_{41} = 0 \\ \alpha_{21}a_{32} + \alpha_{43}a_{41} = 0, \end{cases}$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt wieder:

$$(8) \qquad \alpha_{31}\alpha_{43} - \alpha_{21}\alpha_{42} = 0 \,.$$

Durch eine solche Transformation gehen auch alle Flächen des Büschels:

$$(9) \qquad a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + \mu x_1^2 = 0$$

in sich über, d. h. alle, welche die Fundamentalfläche längs der beiden festen Erzeugenden berühren. Eine solche Fläche aber können wir auffassen als Kugel, deren Centrum auf der Fundamentalfläche liegt, so dass dessen absolute Polarebene zur Tangentenebene wird, und somit können wir die Bewegung als eine *Rotation um einen unendlich fernen Punkt betrachten*; als solche wird sie in den räumlichen Vorgängen eine gewisse Analogie mit der Bewegung parallel einer Ebene bei specieller Massbestimmung zeigen.

Bei der Transformation bleiben aber auch alle Ebenen des Büschels:

$$(10) \qquad \alpha_{31}x_2 - \alpha_{21}x_3 + \mu x_1 = 0$$

fest und folglich auch ihre ebenen Schnitte mit den Flächen des Büschels (9). Die Punkte des Raumes bewegen sich also in Ebenen, welche sich in einer Tangente der Fundamentalfläche schneiden, und *jeder in seiner Ebene auf einem Kegelschnitte, welcher den unendlich fernen Kegelschnitt derselben vierpunktig berührt, d. h. auf einem Kreise mit unendlich grossem Radius**). Für die Punkte der Tangentenebene der Fundamentalfläche in dem gemeinsamen Berührungspunkte gehen die Curven in die Geraden des durch diesen Punkt bestimmten Strahlbüschels über, und in der That muss jede solche Gerade fest bleiben, da dies für 3 Strahlen des Büschels der Fall ist: für die beiden Erzeugenden der Fundamentalfläche und die Axe des Ebenenbüschels (10).

Wir können demnach die Bewegung auch *als Translation nach dieser letzteren oder als Rotation um deren absolute Polare*, die dann in demselben Punkte Tangente der Fläche ist, auffassen. Dem entsprechend *zerfällt auch der Complex der Charakteristiken in 2 specielle lineare Complexe*, die einander absolut conjugirt sind: der eine wird gebildet von allen Linien, welche als Charakteristiken von Punkten die Directrix der Translation schneiden, der andere von allen, welche als Charakteristiken von Ebenen die Rotationsaxe treffen. Für die Charakteristik eines Punktes ist nämlich:

---

*) Vgl. Klein: Ueber die sog. Nicht-Eukl. Geom. § 12., Math. Ann. IV.

$$\varrho p_{12} = \alpha_{21} x_1^2, \quad \varrho p_{13} = \alpha_{31} x_1^2,$$

und daher die Gleichung des einen Complexes:

$$\alpha_{31} p_{12} - \alpha_{21} p_{13} = 0.$$

Vermöge der die Bewegung repräsentirenden Formeln ist ferner:

$$du_2 = (\alpha_{11} u_2 + \alpha_{42} u_4)\, d\lambda$$
$$du_3 = (\alpha_{11} u_3 + \alpha_{43} u_4)\, d\lambda,$$

und also die Gleichung des anderen Complexes:

$$\alpha_{43} p_{13} + \alpha_{42} p_{12} = 0,$$

und diese geht, mit α_{21} multiplicirt, wegen (8) über in:

$$\alpha_{31} p_{12} + \alpha_{21} p_{13} = 0,$$

stellt also in der That die vierte harmonische Gerade zu der Axe des ersten Complexes und den beiden festen Erzeugenden der Fundamentalfläche dar.

III. *Alle Erzeugenden eines Systems bleiben fest, und zwei des andern*, $[\infty, 2]$. Wir können hier die in § 2. gegebene kanonische Form der Transformation beibehalten. Sind nämlich die Geraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die beiden festen Erzeugenden der einen Art, so haben wir nur die Bedingung hinzuzufügen, dass jede Ebene der beiden Büschel

$$x_1 + \lambda x_2 = 0$$
$$x_3 - \lambda x_4 = 0,$$

welche auf der Fläche

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0$$

die Erzeugenden der andern Art ausschneiden, in sich übergeht; d. h. wir müssen setzen:

$$a_1 = a_2 \text{ und } a_3 = a_4.$$

Für die Charakteristiken der Punkte und Ebenen ist jetzt gleichzeitig:

$$p_{12} = 0 \text{ und } p_{34} = 0,$$

es giebt also nur noch 2-fach unendlich viele Linien der Art; jede Gerade, welche der durch die beiden festen Erzeugenden bestimmten linearen Congruenz angehört, ist zugleich Charakteristik aller ihrer Punkte und aller durch sie gehenden Ebenen, d. h. *jede Gerade dieser Congruenz wird bei der Bewegung in sich verschoben, während sich das durch sie bestimmte Ebenenbüschel um sie dreht, und zwar ist die Verschiebung immer gleich dieser Drehung.* Denn es wird auch

$$a_4 - a_1 = a_3 - a_2,$$

d. h.

$$v = e$$

und folglich auch nach § 9.:

$$\varepsilon = \omega ,$$

wo ω den Torsionswinkel der durch einen beliebigen Punkt gehenden projectivischen Schraubenlinie und ε das Bogenelement derselben in diesem Punkte bedeutete. Je mehr also diese beiden Grössen bei einer Schraubenlinie sich demselben Werthe nähern, um so flacher wird die Windung derselben, bis sie, wenn $\varepsilon = \omega$, in eine Gerade übergegangen ist, die man dann als eine nicht gekrümmte, aber tordirte Curve aufzufassen hat.

Die beiden einer unendlich kleinen Bewegung dieser Art zugehörigen linearen Complexe fallen hier in einen zusammen, dessen Gleichung wird:

$$p_{14} + p_{23} = 0 ;$$

er enthält alle Erzeugenden des fest bleibenden Systems der Fundamentalfläche und ist sich selbst in Bezug auf diese polar conjugirt. Jeder Linie der erwähnten Congruenz entspricht in Bezug auf ihn und die Fläche dieselbe Gerade, und *man kann demnach die Bewegung des Raumes ersetzen durch eine unendlich kleine Verschiebung nach einer Geraden jener Congruenz*) und eine ihr gleiche Drehung um dieselbe.*

Es folgt aber auch, dass, sobald dies der Fall, d. h. $e = v$ ist, die Bewegung immer von der hier betrachteten Art ist, denn wegen

$$a_4 + a_1 = a_3 + a_2$$

folgt dann wieder:

$$a_2 = a_1 \text{ und } a_3 = a_4 .$$

Hätten wir $e = -v$ gesetzt, so würde die andere Schaar von Erzeugenden bei der Bewegung fest geblieben sein (§ 5.); *durch die Wahl des Erzeugendensystems wird der Torsionssinn der Bewegung bestimmt.*

IV. *Alle Erzeugenden der einen Art bleiben fest, und die beiden fest bleibenden der andern Art fallen zusammen*, $[\infty, 1]$. Die eine solche Bewegung darstellende Transformation erhalten wir aus der im Falle $[1, 2]$ gegebenen, wie die vorige aus der allgemeinen Form. Es muss hier jede Ebene des Büschels:

$$x_1 + \lambda x_4 = 0$$

in sich übergehen, also

$$\alpha_1 = \alpha_4$$

sein. Der *Charakteristikencomplex* (5) geht dadurch über in

$$p_{14} = 0 ;$$

da ich die Bewegung aber auch als Grenzfall von $[\infty, 2]$ auffassen kann, so müssen die Charakteristiken der Punkte und Ebenen auch

*) Mit Ausnahme der ihr angehörigen einen Schaar von Erzeugenden der Fundamentalfläche.

hier eine lineare Congruenz bilden; und in der That erhalte ich diese, da die Coordinaten p_{13} und p_{42} einer solchen Charakteristik hier durch

$$\varrho p_{13} = a_3 x_1 x_4 \qquad \varrho p_{42} = a_2 x_1 x_4$$

gegeben sind, und diese Geraden also auch dem Complexe angehören:

$$(11) \qquad a_2 p_{13} - a_3 p_{42} = 0 \,.$$

Alle Punkte einer Geraden der Congruenz bleiben daher, wie im vorigen Falle bei der Bewegung auf dieser Geraden, alle durch sie gehenden Ebenen werden um sie gedreht. Der Complex (11) ist identisch mit dem Complexe:

$$a_{42} p_{42} + a_{13} p_{13} = 0 \,,$$

welcher die Schaar der festen Erzeugenden enthält, seine Gleichung fällt mit dieser wegen der Identität (3) zusammen.

Die beiden letzten Arten der Bewegung, bei denen alle Punkte des Raumes auf Geraden fortschreiten, können wir gewissermassen als Uebergang zu der gewöhnlichen Translationsbewegung auffassen, während dieser Uebergang andererseits, insofern die letztere als Drehung um eine unendlich ferne Gerade zu betrachten ist, durch den Fall [1, 1] vermittelt wird. Ueberhaupt ist es für die Natur der allgemeineren Massbestimmung charakteristisch, dass die Uebergänge gestaltlicher Gebilde zu specielleren Formen, wie sie durch ihr Verhältniss zu den unendlich fernen Elementen bedingt werden, reichhaltiger und mannigfacher sind, während wir bei specieller Massbestimmuug mehrere, sonst verschiedene Schritte gleichzeitig ausführen.

§ 11.

Ueber Begriff und Mass der Kraft.

Wenn wir den Begriff der Kraft für unsere allgemeine Massbestimmung genau feststellen wollen, kommt es darauf an, das ihm bei der gebräuchlichen Vorstellung nur in Folge der speciellen Natur unserer Massgeometrie Anhaftende von ihm zu trennen und so *die* Seiten des Kraftbegriffes zu kennzeichnen, welche unabhängig davon bestehen bleiben, eine Aufgabe, deren Lösung uns die bisher gewonnenen Anschauungen über unendlich kleine Bewegungen ermöglichen werden.

Wir stellen uns die Kräfte in der Regel geometrisch durch Strecken von endlicher Länge dar, welche an eine bestimmte Gerade geknüpft sind, auf ihr aber beliebig verschoben werden können. Es ist dies besonders von Nutzen, um die Regeln für die Zusammensetzung derselben durch einfache Constructionen veranschaulichen zu können, zu-

mal, um der Theilung des Winkels von zwei convergirenden Kraftrichtungen in dem Satze vom Parallelogramme der Kräfte einen einfachen Ausdruck zu geben; dieser bildet dann weiterhin, als Axiom an die Spitze gestellt, die Grundlage für die Lehren der Statik. Nach demselben Gesetze aber geschieht auch die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen um sich schneidende Axen, und es ist dadurch jene Analogie zwischen der Theorie der Kräfte und der der Elementarrotationen begründet, die schon in der Einleitung hervorgehoben wurde.

Da nun alle auf Drehungen oder überhaupt auf Winkelrelationen bezüglichen Sätze bei unserer Verallgemeinerung der Massbestimmung wenig oder gar nicht geändert werden, so bestimmen wir auch bei dieser die Resultante verschiedener Kräfte ebenso wie die verschiedener Elementarrotationen. Schneiden sich insbesondere die *Directricen* zweier Kräfte, d. h. die Geraden, nach denen sie wirken, so werden wir demnach den von ihnen gebildeten Winkel in demselben Verhältnisse theilen, wie dies bei specieller Massbestimmung geschieht; denn diese Beziehung blieb ja auch für unendlich kleine Rotationen bestehen. Wir dürfen diese Theilung jedoch nicht mit Hülfe der Construction des Parallelogramms ausführen; eine solche ist vielmehr nur noch für unendlich kleine Streckenelemente erlaubt. Demgemäss werden wir *uns eine Kraft geometrisch auch nur durch eine unendlich kleine, ihr proportionale und auf ihrer Directrix vom Angriffspunkte aus abgetragene Strecke darstellen,* die wieder, wie wir unten sehen werden, beliebig auf der Directrix verschoben werden kann. Bei dieser Vorstellung stellen wir nunmehr obiges Princip der Analogie in folgender Form auch für unsere Betrachtungen als Grundsatz an die Spitze:

Die Zusammensetzung der Kräfte geschieht nach denselben Gesetzen wie die der unendlich kleinen Rotationen. Die letzteren sind bei allgemeiner Massbestimmung dieselben, wie die für unendlich kleine Translationen, was in der thatsächlich gegebenen Geometrie nicht der Fall ist; sondern in ihr besteht ein wesentlicher Unterschied, indem z. B. zwei Translationen nach beliebigen Geraden im Raume immer wieder eine neue Translation hervorrufen. Es liegt dies daran, dass bei einer solchen alle Punkte des Raumes sich gleichzeitig auf parallelen Geraden bewegen, und wir von diesen eine jede als Directrix der Bewegung betrachten können. Dadurch steht die Translation dem *Kräftepaare* ebenso coordinirt gegenüber, wie die unendlich kleine Rotation der einzelnen Kraft. In der That schliesst der Begriff des Kräftepaares gleich dem der Translation ein gewisses Mass der Beweglichkeit ein, indem die Ebene des Paares beliebig parallel zu sich selbst verschoben werden kann, ohne die Wirkung desselben zu ändern. Denn diese besteht ja in dem Streben, eine Drehung um eine zu

dieser Ebene senkrechte Axe hervorzurufen, wobei jedoch keine aller dieser Parallellinien als Drehaxe vor den übrigen ausgezeichnet ist. Bei allgemeiner Massbestimmung dagegen tritt ebenso eine bestimmte Directrix der Translation auf, wie eine Axe der Rotation, und demgemäss werden wir auch den der Translation coordinirten Begriff des Kräftepaares fallen lassen und dafür *den einer Dreh- oder Rotations-Kraft einführen, welcher nunmehr eine bestimmte Axe zukommt**); ihr gegenüber werden wir die bei spec. Massbestimmung allein auftretenden Kräfte, welche nach einer Geraden wirken, als *Translationskräfte* unterscheiden. Diese wirken auf einen Punkt ihrer Directrix; *als Angriffsobject einer Drehkraft haben wir dagegen eine durch ihre Axe gehende Ebene aufzufassen*, die wir im Folgenden als *Angriffsebene***) bezeichnen werden. Eine Drehkraft steht einer Translationskraft dann ebenso dualistisch gegenüber, wie eine Rotation einer Translation, und dem entsprechend gilt der Satz: *Eine um eine Axe wirkende Rotationskraft ist identisch mit einer nach der absoluten Polare dieser Axe wirkenden Translationskraft.*

In Folge dessen ist die Zusammensetzung für beide Arten von Kräften genau dieselbe, und wir können unseren Fundamentalsatz nunmehr auch allgemeiner folgendermassen aussprechen:

Rotations- und Translationskräfte setzen sich zusammen wie unendlich kleine Translationen oder Rotationen.

Ebenso wie die Translationskräfte durch Streckenelemente, werden wir uns *die Rotationskräfte durch ihnen proportionale, unendlich kleine, um ihre Axen gemessene Winkel geometrisch darstellen*; und diese geometrische Repräsentation giebt uns dann ein Mass für die *Intensität* einer Kraft, sobald wir eine bestimmte Kraft als Einheit zu Grunde gelegt haben; diese Intensität selbst ist natürlich stets eine endliche

---

*) Vgl. Klein: Zur Mechanik starrer Körper; Math. Ann. Bd. IV, p. 403.

**) Für spec. Massb. fällt dieser Begriff durch die Unbestimmtheit der Axe des Kräftepaares vollkommen fort; ein solches wirkt nicht unmittelbar auf ein einzelnes Raumelement, wie die einzelne Kraft auf einen Punkt, sondern kann nur in seiner Wirkung auf einen festen Körper, oder wenigstens 2 mit einander fest verbundene Punkte gedacht werden. Mit Recht vermisst daher Hr. Dühring (Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1873, p. 424 ff.) eine unmittelbar anschauliche, völlig klare Vorstellung von der Bewegungswirkung eines Paares in dem Poinsot'schen Systeme; aber man darf bei der Beurtheilung desselben auch nicht vergessen, dass in der Begründung und Veranschaulichung der Theorie der Kräftepaare wegen des undualistischen Charakters unserer Massbest. nicht mehr gefordert werden kann, als Poinsot und Möbius (Crelle's J. Bd. VII, p. 205 und Statik I, Cap. 2) gegeben haben. Das Kräftepaar soll eben nur, *soweit es möglich ist*, den nothwendig fehlenden, an ein bestimmteres Object gebundenen Begriff der Drehkraft ersetzen.

Grösse und nur *proportional* jenen unendlich kleinen Winkeln und Strecken, gleichwie auch die Intensität einer unendlich kleinen Bewegung als eine endliche aufgefasst werden konnte, sobald eine bestimmte Bewegung der Art als Einheit gewählt war.

Der weitere Ausbau der Theorie der Kräfte geschieht nunmehr, indem wir unser Princip der Analogie weiter verfolgen. Demnach werden wir *eine Kraft bestimmen durch die 6 Coordinaten* (P_{ik} *resp.* Q_{ik}) *ihrer Directrix resp. Axe*, welche wir dann als *Coordinaten der Kraft**) bezeichnen, und denen wir absolute Werthe beilegen. Wir messen *die Intensität einer Translationskraft* P durch ein auf ihr vom Angriffspunkte x aus abgetragenes Streckenelement, d. h. es ist (vgl. § 9.):

$$P^2 = \frac{\Phi_{PP}}{\Omega_{xx}^2},$$

und entsprechend messen wir die *Intensität einer Rotationskraft* Q durch einen um sie von der Angriffsebene u aus angetragenen unendlich kleinen Winkel, d. h. es ist:

$$Q^2 = \frac{\Phi_{QQ} \cdot \Delta}{\Omega'^2_{uu}}.$$

Verschieben wir das betreffende Linienelement auf der Directrix, so geschieht dies durch eine Transformation der Fundamentalfläche in sich selbst; und gegen eine solche zeigt der Ausdruck für P einen absolut invarianten Charakter, also (da Analoges für Q gilt):

Die Wirkung einer Kraft ist unabhängig von der Lage ihres Angriffspunktes auf der durch ihre Directrix gegebenen Punktreihe, resp. von der Lage ihrer Angriffsebene in dem durch ihre Axe bestimmten Ebenenbüschel.

Der Umstand, dass in obigen Ausdrücken für P und Q stets die Coordinaten des Angriffspunktes, resp. der Angriffsebene der Kraft vorkommen, zeigt, dass die Zusammensetzung der Kräfte ihrer Grösse nach nur einfach lösbar ist, wenn ihre Directricen gegen einen Punkt convergiren, resp. ihre Axen in einer Ebene liegen. Dem entspricht das Verfahren von Poinsot, wenn er die allgemeine Zusammensetzung von Kräften ermöglicht, indem er sie sich selbst parallel in denselben Angriffspunkt verlegt und die dadurch entstandene Aenderung im Kraftsysteme durch Hinzufügung von Kräfte-

---

*) Vgl. für spec. Massbest. Plücker: Phil. Transact. 1866; Battaglini: Sulla composizione delle forze. Rendiconti della r. accademia delle scienze fis. e mat. di Napoli. Febr. 1869. Die bez. Arbeit von Cayley (On the six coordinates of a line. Cambridge Transactions. Vol. XI. 1868) war mir nicht zugänglich. — Ueber die Bedeutung der einzelnen Coordinaten vgl. § 13.

paaren wieder aufhebt. Die Einfachheit dieses Verfahrens beruht aber nur in dem grösseren Masse von Beweglichkeit, welches dem Begriffe eines Kräftepaares eigenthümlich ist, indem es dadurch möglich wird, zu beliebig vielen, beliebig gegebenen Kräftepaaren stets ein resultirendes Paar zu finden. Es gelingt jedoch bei unseren oben angenommenen Drehkräften*) ebensowenig, wie bei den thatsächlich vorhandenen Translationskräften, stets eine einzige resultirende Kraft anzugeben, und deshalb können wir die Methode von Poinsot in unseren folgenden Untersuchungen nicht anwenden.

§ 12.

Kraftsysteme. Theorie der Momente.

Nachdem wir die Kräfte durch ihre Coordinaten definirt haben, können wir unser Pincip der Analogie auch in folgender Gestalt aussprechen:

Kräfte setzen sich zusammen, indem sich ihre Coordinaten addiren, wobei natürlich nur Coordinaten gleichartiger Kräfte mit einander vereinigt werden dürfen; und insbesondere haben wir:

Kräfte, welche an demselben Punkte (derselben Ebene) angreifen,

---

*) Poinsot weist auf die Möglichkeit hin, die Kraft nicht „als Ursache einer Translation, sondern als die einer Rotation" aufzufassen und so die Statik in neuer Form aufzubauen (vgl. seine Théorie nouvelle de la rotation des corps, chap. I.), ähnlich wie es ihm gelungen war, von der Drehung als selbständigem Begriffe ausgehend, die Theorie der Rotationen zuerst in einfacher Weise darzustellen. Die wirkliche Durchführung dieses Gedankens aber war nach den im Texte gegebenen Erörterungen nicht möglich; und aus diesem Grunde leiden auch die Betrachtungen Plücker's an einer gewissen Unklarheit (vgl. den Schluss der Abhandlung: On a new geometrie of space, Phil. Transact. 1865; Fundamental views regarding mechanics, ib. 1868; Neue Geometrie etc., Leipzig 1868, 69, n. 25. Vgl. auch hierüber Klein Math. Ann. Bd. IV, p. 403). Ausgehend von Vorstellungen der neueren Geometrie, setzt er allenthalben vollkommene Dualität voraus und kommt so naturgemäss zum Begriffe einer Drehkraft, die an einer Ebene angreift. Er zerstört diesen aber wieder, indem er eine solche Kraft mittelst einer Translationskraft, welche an einem Hebelarme mit festem Punkte wirkt, zu definiren sucht. Andererseits nähert er sich den Forderungen unserer allgemeinen Massbest., indem er für Drehkräfte eine Massbest. voraussetzt, die auf den Kegel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

bezüglich ist, und so die Intensität derselben durch einen Ausdruck

$$\sqrt{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2}$$

misst, also in einer solchen Massbest. durch eine Winkelgrösse, wie auch wir es im Texte thaten.

haben eine durch diesen Punkt gehende (in dieser Ebene liegende) Resultante. Bei zwei Kräften P und P' ist dieselbe gegeben durch:

$$R^2 = P^2 + P'^2 - 2\,PP' \cos(P, P'), \tag{1}$$

und es gilt die Relation:

$$\frac{\sin(P, P')}{R} = \frac{\sin(R, P)}{P'} = \frac{\sin(P', R)}{P}. \tag{2}$$

Diese Gleichungen gelten ebensowohl für Translations- wie für Rotationskräfte. — Sind die Directricen, resp. Axen der Kräfte beliebig im Raume vertheilt, so können wir, indem wir eine Rotationskraft durch eine Translationskraft nach der absoluten Polare ihrer Axe ersetzen, alles auf Translationskräfte allein zurückführen, und die *Addition ihrer Coordinaten* ergiebt dann 6 Grössen, welche wir als *Coordinaten des Kraftsystems* bezeichnen wollen, und die wir als Coordinaten eines linearen Complexes auffassen können. *Das Kraftsystem ist dann äquivalent mit zwei Translationskräften, welche nach zwei in Bezug auf den Complex conjugirten Geraden wirken, oder, was dasselbe ist, mit zwei Rotationskräften um zwei in Bezug auf den absolut conjugirten Complex einander zugeordnete Gerade.* Auf den letzteren linearen Complex werden wir unmittelbar geführt, wenn das Kraftsystem durch lauter Rotationskräfte gegeben ist; wir werden ihn *den dem Kraftsysteme zugehörigen Rotationscomplex* und den andern *den ihm zugehörigen Translationscomplex**) nennen und wieder die Coordinaten des ersteren durch Q_{ik}, die des letzteren durch P_{ik} bezeichnen. Allen Kraftsystemen, deren Coordinaten sich nur um einen gemeinsamen Factor unterscheiden, gehören hiernach dieselben linearen Complexe zu. *Sind dieselben specielle, so ist das Kraftsystem ersetzbar durch eine einzelne Kraft.*

Da die Coordinaten eines Kraftsystems durch Addition der Coordinaten einzelner Kräfte gewonnen sind, so gilt auch der Satz:

Kraftsysteme setzen sich zusammen, indem sich ihre Coordinaten addiren.

Auch für die Grössenverhältnisse zweier einem solchen Systeme äquivalenter Kräfte gelten analoge Sätze, wie für unendlich kleine Bewegungen; also: *Das Product des Momentes zweier conjugirter Kraft-Directricen oder -Axen in die Intensitäten der bez. Kräfte ist constant, und gleich dem Producte der um eine Hauptaxe des Complexes wirkenden Drehkraft in die nach ihr wirkenden Translationskraft,* wenn man

---

*) Bei spec. Massbest. kann natürlich nur der letztere auftreten. — Insofern dieser dann zur Repräsentation des Kraftsystems dient, wird er auch als *Dyname* bezeichnet; vgl. Plücker a. a. O. und Battaglini: Sulle dinamo in involuzione, Atti della r. accad. di Napoli, vol. IV, 1869.

diese beiden Kräfte, was ja stets möglich ist, ebenfalls dem Systeme äquivalent nimmt*).

Je nach der Lage der den beiden linearen Complexen gemeinsamen Hauptaxen haben wir ebensoviele *specielle Arten von Kraftsystemen* zu unterscheiden, wie oben von unendlich kleinen Bewegungen (vgl. § 10.): die Hauptaxen können in eine Erzeugende der Fundamentalfläche zusammenfallen (Fall I), die Fläche beide in demselben Punkte berühren (II) (wo dann die Complexe specielle sind), oder endlich unbestimmt werden (III und IV). Während wir also bei spec. Massbestimmung nur zwischen Kraft (resp. Kräftepaar) und Kraftsystem zu unterscheiden hatten, ist uns hier eine Reihe von Uebergangsfällen gegeben; ähnlich wie wir oben (§ 10.) die Fälle [1, 1], [∞, 2] und [∞, 1] als Uebergang zur gewöhnlichen Translation auffassen konnten. Ein Beispiel für die Verwerthung solcher besonderer Kraftsysteme wird uns sogleich die *Theorie der Momente* bieten, welche gleichzeitig die statische Bedeutung der den beiden zugehörigen Complexen angehörenden Geraden erkennen lassen wird.

Als *Drehmoment einer Kraft in Bezug auf eine Axe* definiren wir gewöhnlich die Grösse, um welche die Kraft den Körper, an dem sie angebracht ist, um die Axe, wenn diese festgehalten wird, zu drehen strebt. Vollkommen dualistisch entsprechend müssen wir nun auch ein *Verschiebungsmoment einer Kraft in Bezug auf einen Strahl* einführen; dies drückt dann die Grösse aus, um welche die Kraft den bez. Körper nach dem Strahle zu verschieben strebt, wenn er festgehalten wird. Das Verschiebungsmoment einer Translationskraft in Bezug auf eine Gerade tritt demnach an Stelle der *Projection der Kraft* auf diese bei specieller Massbestimmung. Um einen analytischen Ausdruck für die Grösse dieses Momentes zu gewinnen, führen wir zunächst die entsprechenden Betrachtungen für unendlich kleine Bewegungen durch; von da ist es uns dann erlaubt, unmittelbar wieder zu den Kräften zurückzukehren**).

---

*) Für spec. Massbest. geg. von Chasles: Bulletin des sciences de Férussac, Sept. 1828, p. 187, und comptes rend. 1843. Vgl. auch Möbius: Crelle's J. Bd. IV, 1829.

**) Ebenso hätten wir schon oben Verschiebungs- und Drehmomente von unendlich kleinen Rotationen oder Translationen betrachten und alle die folgenden Sätze für diese aufstellen können, wie es Möbius für spec. Massbest. gethan hat (vgl. Crelle's J. Bd. XVIII, p. 189). Ich glaubte diese Begriffe aber besser erst hier bei den Kräften einführen zu sollen, um mich der gebräuchlichen Darstellungsweise möglichst anzuschliessen. Im Folgenden können wir nunmehr mit den absolut bestimmten Coordinaten eines linearen Complexes gleichmässig den Begriff eines Kraftsystems oder den einer unendlich kleinen Bewegung verbinden.

Die Projection einer Translation auf eine Gerade π kann man bei specieller Massbestimmung folgendermassen definiren. Man ersetze die Translation durch zwei andere, von denen die eine (p') parallel, die andere senkrecht zu der gegebenen Geraden π geschieht. Dann ist die fragliche Projection durch die Intensität der ersten Theilbewegung dargestellt. Diese Construction beruht wesentlich darauf, dass man eine Translation angeben kann, welche die parallelen Linien p' und π gleichzeitig in sich übergehen lässt. Ebenso müssen wir bei allgemeiner Massbestimmung die gegebene Translation P, um eine der Projection entsprechende Function zu erhalten, in zwei Bewegungen zerlegen, der Art, dass die Directrix der einen gleichzeitig mit dem gegebenen Strahle π in sich verschoben werden kann, während die der anderen zu dieser senkrecht steht. Die beiden Directricen derselben müssen sich dann in einem Punkte der Directrix p der gegebenen Translation schneiden. Eine Bewegung, welche zwei Gerade zugleich in sich verschiebt, ist nun aber nicht eine Translation, sondern eine solche Bewegung, wie sie im Falle $[2, \infty]$ in § 10 *) behandelt wurde, bei der also 2 Erzeugende der Fundamentalfläche ungeändert bleiben, und welche durch eine Translation nach einer Geraden der durch die 2 Erzeugenden bestimmten Congruenz und eine gleichzeitige Rotation um diese ersetzt werden kann. Wir machen daher die folgende Construction: der Strahl π schneidet die Fundamentalfläche in 2 Punkten; unter den 4 durch diese bestimmten Erzeugenden wählen wir 2 derselben Schaar angehörige aus**) und ziehen durch einen beliebigen***) Punkt der Directrix von P die Linie p', welche jene beiden Erzeugenden schneidet. Wir können dann stets eine unendlich kleine Bewegung (mit den Coordinaten Π_{ik}) von der Art $[2, \infty]$ angeben, welche die Linien p' und π zugleich in sich übergehen lässt. Die Torsion, welche dabei jede dieser Geraden in sich erleidet, brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da es uns hier nur auf die Bewegung der mit ihnen gleichbedeutenden Punktreihen in sich ankommt. Fügen wir der translatorischen Componente P' dieser Bewegung Π eine Translation nach einer zu p' senkrechten Linie π', welche in der Ebene von p und p' liegt hinzu, so wird aus beiden wieder die Bewegung P resultiren. — Zerlegen wir daher umkehrt P in eine Translation P'

---

*) Der Fall $[1, \infty]$ ist ein Specialfall hiervon und würde anwendbar sein, wenn die Directrix P die Fundamentalfläche berührt.

**) Würden wir die beiden anderen wählen, so würde das resultirende Verschiebungsmoment nur entgegengesetztes Vorzeichen erhalten, da die fest bleibende Schaar von Erzeugenden den Sinn der Bewegung bestimmt.

***) Die Wirkung einer Translationskraft ist ja unabhängig von der Lage des Angriffspunktes auf der Directrix.

nach p' und in eine andere nach π', so stellt uns die Grösse P' das gesuchte Verschiebungsmoment dar; denn wir können dieselbe als translatorische Componente einer Bewegung Π von der Art $[2, \infty]$ nach p' und π auffassen. Die Intensität von P' folgt aus § 9. (7) und (8); sie wird:

$$P' = P \cdot \cos(p, p') . \tag{1}$$

Wenden wir nun für den Augenblick die in § 10. gegebene kanonische Form an, seien also die beiden ausgezeichneten Erzeugenden durch

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0 \text{ und } x_3 = 0, \ x_4 = 0$$

gegeben; die Linie p' falle mit der Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zusammen und ihre absolute Polare mit $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so dass die Gleichungen gelten:

$$p_{14} = 0$$
$$\pi_{12} = 0 , \quad \pi_{34} = 0 .$$

Hierdurch erhält man dann:

$$\cos(p, p') = \frac{\Phi_{pp'}}{\sqrt{\Phi_{pp} \cdot \Phi_{p'p'}}} = \frac{p_{23}}{\sqrt{\Phi_{pp}}}$$

$$\cos(p, \pi) = \frac{\Phi_{p\pi}}{\sqrt{\Phi_{pp} \cdot \Phi_{\pi\pi}}} = \frac{p_{23}}{\sqrt{\Phi_{pp}}} = \cos(p, p') , \tag{2}$$

d. h. *Alle Geraden, welche dieselben beiden Erzeugenden desselben Systems der Fundamentalfläche schneiden, haben gegen eine beliebige andere Gerade dieselbe Neigung.*

P' ist nun aber zugleich das gesuchte Verschiebungsmoment $V(P, \pi)$, denn es ist die translatorische Componente, welche mit einer gleich grossen rotatorischen zusammen die Bewegung Π hervorbringt, welche π und p' gleichzeitig in sich überführt*), also:

$$V(P, \pi) = P \cdot \cos(P, p') = \frac{\Phi_{Pp'}}{\Omega_{x'x'} \sqrt{\Phi_{p'p'}}} ,$$

wo x' irgend einen Punkt auf p' bedeutet**); da wir diese Grösse aber auch ebensowohl auf π messen können, so ist wegen (2), wenn wir den Begriff der Bewegung wieder durch den der Kraft ersetzen,

---

*) Aehnliches findet auch bei specieller Massbestimmung statt, denn die Projection von P auf π wird erst äquivalent mit der Componente von P nach p', wenn man ein Kräftepaar hinzufügt. Es ist dieses aber nicht eine directe Specialisirung des im Texte erwähnten Vorganges.

**) Zunächst würde der Schnittpunkt von p und p' zu wählen sein; dieser kann aber wieder beliebig auf p' verschoben werden. Deutlicher werden wir diese Unabhängigkeit vom Angriffspunkte noch in § 13. erkennen.

das gesuchte Verschiebungsmoment einer Translationskraft P *nach einem Strahle* π:

$$V(P, \pi) = P \cdot \cos(P, \pi) = \frac{\Phi_{P\pi}}{\Omega_{xx} \sqrt{\Phi_{\pi\pi}}}, \tag{3}$$

wo nun x einen Punkt der Geraden π bezeichnet. Offenbar ist $V(P, \pi)$ gleich dem Drehmomente der Kraft in Bezug auf die absolute Polare π' der gegebenen Geraden, also wird wegen:

$$\frac{\Phi_{P\pi}}{\sqrt{\Phi_{\pi\pi}}} = \frac{\sqrt{\Delta}\,(P, \pi')}{\sqrt{\Phi_{\pi'\pi'}}} \qquad (\text{vgl. § 1.})$$

das Drehmoment einer Translationskraft P *um eine Axe* π' *) gegeben durch:

$$D(P, \pi') = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot (P, \pi')}{\Omega_{xx} \sqrt{\Phi_{\pi'\pi'}}}, \tag{4}$$

wo x ein Punkt der absoluten Polare von π' ist. *Das Drehmoment einer Translationskraft um eine Axe ist also gleich dem geometrischen Momente derselben gegen die Directrix der Kraft, multiplicirt mit der Intensität der letzteren.* Der Ausdruck (4) entspricht nach den Ausführungen in § 1. auch vollkommen dem bei specieller Massbestimmung gebräuchlichen. — Ganz analog werden die entsprechenden Grössen für eine *Rotationskraft* gebildet: es ist das *Drehmoment einer solchen* um die Axe q:

$$D(Q, q) = Q \cdot \cos(Q, q) = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot \Phi_{Qq}}{\Omega'_{uu} \sqrt{\Phi_{qq}}}, \tag{5}$$

wo u eine durch q gehende Ebene bedeutet, und das Verschiebungsmoment nach q:

$$V(Q, q) = \frac{\Delta \cdot (Q, q)}{\Omega'_{uu} \sqrt{\Phi_{qq}}}. \tag{6}$$

Ist insbesondere die durch die Coordinaten Q_{ik} dargestellte Kraft identisch mit der durch die P_{ik} gegebenen, d. h. ist:

$$2\sqrt{\Delta} \cdot Q_{ik} = (a_i b_k - b_i a_k)\, \Sigma\, (a_r b_s - b_r a_s)\, P_{rs},$$

so werden die Ausdrücke (3), (4) und (6), (5) respective einander gleich.

Wenn mehrere Kräfte gleichzeitig wirken, so addiren sich ihre Drehmomente in Bezug auf dieselbe Gerade nach der Definition der-

---

*) Vgl. Battaglini: Sulla teorica dei momenti; Rendiconti, Mai 1869, wo die folgenden Sätze für die gewöhnliche Statik in homogenen Liniencoordinaten entwickelt sind. — An die hieraus folgende Bedeutung der Kraftcoordinaten lässt sich eine Definition der Liniencoordinaten knüpfen, vgl. Zeuthen: Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. Math. Ann. Bd. I. p. 432.

selben, und da sich die Coordinaten der Kräfte ebenfalls addiren, so können wir den Ausdruck (4) als das *Drehmoment eines Kraftsystems um eine Axe* π' auffassen, sobald wir unter den P_{ik} nicht die Coordinaten einer einzelnen Kraft, sondern die eines Kraftsystems verstehen*). Lassen wir diesen Ausdruck verschwinden, so haben wir den Satz:

*Das Drehmoment eines Kraftsystems verschwindet für alle Geraden des zugehörigen Translationscomplexes***).	*Das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems verschwindet für alle Geraden des zugehörigen Rotationscomplexes.*

Es ist dies auch evident, da alle Geraden, welche 2 Directricen von Kräften, die das System ersetzen können, schneiden, dem Translationscomplexe angehören, und 2 solche Kräfte um diese Geraden kein Drehmoment haben können.

Kennen wir das Moment des Systems P in Bezug auf eine Normale p' zu einer Geraden p des Translationscomplexes, so können wir daraus die Momente für alle Linien π des durch diese beiden bestimmten Strahlbüschels berechnen.

Es ist nämlich:

$$(P, p) = 0\,, \quad \Phi_{pp'} = 0$$

$$\varrho\pi_{ik} = p'_{ik} + \lambda p_{ik},$$

also

$$D(P, \pi) = \frac{\sqrt{\Delta}\,(P, p')}{\sqrt{\Phi_{p'p'} + \lambda^2\Phi_{pp}}} = D(P, p')\cdot\cos(\pi, p')\,, \tag{6}$$

denn es ist:

$$\cos(\pi, p') = \frac{\Phi_{p'p'} + \lambda\Phi_{pp'}}{\sqrt{\Phi_{p'p'}\cdot\Phi_{\pi\pi}}} = \frac{\sqrt{\Phi_{p'p'}}}{\sqrt{\Phi_{p'p'} + \lambda^2\Phi_{pp}}}.$$

Von allen durch einen Punkt gehenden Geraden liegen nun diejenigen, für welche das Moment verschwindet, in einer Ebene, und es ist also das Drehmoment des Kraftsystems für irgend eine durch den Punkt gehende Gerade gleich dem Momente in Bezug auf die Normale dieser Ebene in dem Punkte, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels der Geraden gegen diese Normale; in Bezug auf letztere hat demnach das Moment des Systems den grössten Werth gegenüber den andern durch den Punkt gehenden Linien***). Diese Normalen bil-

---

*) Wir gehen im Folgenden immer von Translationskräften aus, und können dann die entsprechenden Sätze für Rotationskräfte ohne Beweis aussprechen.

**) Für spec. Massbest. machte Möbius auf die Bedeutung dieses Complexes aufmerksam: Crelle's J. Bd. X, p. 317. 1833.

***) Vgl. für spec. Massbest. Poinsot: Mémoire sur la composition des moments et des aires dans la mécanique, 1804, auch als Anhang zu den neueren Ausgaben der Eléments de statique; und Möbius: Statik, Th. I, p. 126 ff.

deten aber bei einer unendlich kleinen Bewegung den Complex der Charakteristiken; alle für die Charakteristiken gefundenen Sätze können wir demnach auf die Linien der Maximalmomente übertragen. Wir haben somit:

Jedem Punkte ist eine durch ihn gehende Gerade zugeordnet, für welche das Drehmoment des Kraftsystems grösser ist als für jede andere durch den Punkt gehende Gerade; und in jeder Ebene liegt eine Gerade, für welche das Verschiebungsmoment des Systems grösser ist, wie in Bezug auf jede andere in der Ebene liegende Gerade. Alle diese Linien bilden einen Tetraëdralcomplex, von dessen Fundamentaltetraëder 2 Paare von gegenüberliegenden Kanten auf der Fundamentalfläche liegen. Durch Uebertragung der anderen Sätze würden wir z. B. erhalten:

Die Punkte, für welche die Geraden eines Complexkegels dieses Tetraëdralcomplexes Linien grösster Drehmomente sind, liegen auf einer Raumcurve 3. Ordnung; längs ihr berührt der Kegel eine Fläche 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten, zu deren Punkten Linien grösster Drehmomente gehören, welche gleichzeitig Linien grösster Verschiebungsmomente für die durch die Spitze des Kegels gehenden Ebenen sind.

Das Product des Drehmomentes eines Kraftsystems in Bezug auf eine Gerade des Tetraëdralcomplexes in das Verschiebungsmoment bezüglich derselben Geraden ist constant. U. s. w.*)

Je nach der speciellen Natur des Kraftsystems, d. h. nach der Lage der zugehörigen linearen Complexe gegen die Fundamentalfläche wird auch der Complex der Linien grösster Momente einen speciellen Charakter zeigen, wie es für unendlich kleine Bewegungen in § 10. ausgeführt wurde.

§ 13.

Intensität eines Kraftsystems. Verallgemeinerung des Vorhergehenden.

Wir haben nur für die Intensität einer *einzelnen* Kraft einen Ausdruck aufgestellt, entsprechend dem, wie er gewöhnlich in der

---

*) Beim Uebergange zur spec. Massbest. bleiben die Sätze über die Linien grösster Drehmomente im Wesentlichen bestehen; die Linie des grössten Verschiebungsmomentes in einer Ebene wird dagegen diejenige Gerade in ihr, für welche die *Projection des Kraftsystems*, d. h. die Summe der Projectionen der einzelnen Kräfte auf die Gerade, den grössten Werth annimmt. Diese Projection wird dann:

$$= \frac{Xp_{12} + Yp_{13} + Zp_{14}}{\sqrt{p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2}},$$

wo die p_{ik} wie in § 1. bestimmt sind. Für die *Linien der grössten Projectionen* gelten dann analoge Sätze, wie für die Charakteristiken von Ebenen bei unendlich kleinen Bewegungen.

Statik auftritt; in ihm war der Nenner von dem Angriffspunkte resp. der Angriffsebene der Kraft abhängig, und dieser Umstand erschwerte wiederholt den Gang unserer Untersuchungen, während wir andererseits erkannten, dass dieser Punkt noch beliebig auf der Directrix der Kraft verschoben, resp. die Ebene beliebig um ihre Axe gedreht werden kann. Eine schon oben (§ 9.) bei der Berechnung der Grössen ε und ω gemachte Bemerkung wird uns nunmehr dazu dienen, die Intensität allein in ihrer Abhängigkeit von den Coordinaten der Kraft darzustellen. Indem wir dann diese von einander unabhängig annehmen, d. h. sie als die Coordinaten eines Kraftsystems ansehen, ergeben sich unter Anwendung der in § 1. eingeführten Begriffe der gegenseitigen Neigung von linearen Complexen hieraus weitere Verallgemeinerungen. Wir gehen zunächst von unendlich kleinen Bewegungen aus.

In dem Ausdrucke für ε trat im Nenner die linke Seite des der Bewegung zugeordneten Translationscomplexes auf, wenn wir in Ω_{xx} die x als Function der Coordinaten der zugehörigen Charakteristik einsetzen. Um die dabei etwa auftretenden Factoren deutlich zu erkennen, leiten wir das Resultat in einer andern kanonischen Form ab, schlagen dabei aber den umgekehrten Weg ein. Es sei

$$\Sigma\, a_i x_i^2 = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche, oder in Liniencoordinaten

$$\Sigma\, a_i a_k p_{ik}^2 = 0\,,$$

so dass zwischen den Coordinaten P, Q der Bewegung die Gleichungen bestehen:

(1) $$\sqrt{\Delta}\, P_{\alpha\beta} = a_\gamma a_\delta Q_{\alpha\beta}\,,$$

wo nach § 4.:

(2) $$Q_{ik} = J(\beta_{ki} - \beta_{ik}) = J(a_k \alpha_{ki} - a_i \alpha_{ik})\,,$$

unter den α_{ik} die Coëfficienten der die unendlich kleine Transformation darstellenden Gleichungen verstanden. Zwischen diesen bestehen dann die Bedingungsgleichungen:

(3) $$\begin{cases} 0 = \beta_{ki} + \beta_{ik} = a_i \alpha_{ik} + a_k \alpha_{ki} \\ a_k = 2\,\beta_{kk}\, J\,. \end{cases}$$

Wenden wir nun die Substitution*)

$$2\, M p_{ik} = x_i dx_k - x_k dx_i = (x_i \Sigma \alpha_{kr} - x_k \Sigma \alpha_{ir})\, d\lambda$$

*) In ε waren die p_{ik} absolut bestimmt angenommen, da sie zur Messung eines Streckenelementes dienten; letzteres ist aber gleich dem Verschiebungsmomente von P in Bezug auf p; es ist deshalb im Texte der Proportionalitätsfactor so gewählt, dass rechts der Factor $J = \frac{d\lambda}{2M}$ (vgl. § 4.) auftritt.

auf die Gleichung des Translationscomplexes:

$$(P, p) = 0$$

an, so findet man unter Berücksichtigung der Gleichungen (1), (2), (3) in der That, dass die Coefficienten von $x_i x_k$ verschwinden, während die von x_i^2 proportional zu den a_i werden. Es wird z. B. der Coefficient von x_4^2:

$$\frac{a_4 \cdot J^2}{\sqrt{\Delta}} \left\{\alpha_{24} a_2 (a_3 \alpha_{31} - a_1 \alpha_{13}) - \alpha_{31} a_3 (a_2 \alpha_{21} - a_1 \alpha_{12}) - \alpha_{14} a_1 (a_3 \alpha_{32} - a_2 \alpha_{23})\right\},$$

oder wegen (2) und (3):

$$= \frac{a_4}{4\sqrt{\Delta}} (Q, Q) .$$

Wir haben demnach:

$$4\sqrt{\Delta}\,(P, p) = \Omega_{xx} \cdot (Q, Q) .$$

Der Ausdruck für die Grösse der Verschiebung eines Punktes x auf seiner Charakteristik p wird daher

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\Phi_{pp}}}{4\sqrt{\Delta}\,(P, p)} (Q, Q) .$$

Verschwindet hier (Q, Q), so besteht die Bewegung in einer Rotation um eine Axe mit den Coordinaten Q_{ik}, alsdann gehört aber die Linie p nach § 10. dem Translationscomplexe an, auch (P, p) verschwindet identisch, und ε behält einen endlichen Werth. Besteht die Bewegung dagegen in einer Translation, deren Directrix p ist, so werden die p_{ik} zu den P_{ik} proportional; ferner ist (§ 4.):

$$(P, P) = (Q, Q) = 0 ,$$

und folglich haben wir für *die Intensität einer unendlich kleinen Translation mit den Coordinaten* P_{ik}, *also auch für die einer Translationskraft mit denselben Coordinaten:*

$$P = \frac{\sqrt{\Phi_{PP}}}{4\sqrt{\Delta}} ,$$

und ebenso für *die Intensität einer Rotationskraft:*

$$Q = \frac{\sqrt{\Phi_{QQ}}}{4\sqrt{\Delta}} ,$$

wo $Q = P$ wird, wenn die Q_{ik} und P_{ik} den Gleichungen (7) in § 4. genügen. Beide Ausdrücke sind unabhängig von dem Angriffspunkte bez. von der Angriffsebene, und beide sind absolut invariant gegen eine Transformation der Fundamentalfläche in sich.

Mit Hülfe derselben können wir unsere früheren Untersuchungen

leicht umformen; wir erhalten die gewonnenen Resultate aber in noch allgemeinerer Form, wenn wir nunmehr auch als *Intensität eines Kraftsystems mit den Coordinaten P_{ik} resp. Q_{ik} den Ausdruck:*

$$(4) \qquad R = \frac{\sqrt{\Phi_{PP}}}{4\sqrt{\Delta}} = \frac{\sqrt{\Phi_{QQ}}}{4\sqrt{\Delta}} \;{}^{*)}$$

definiren; und in der That ist dieser zu der in § 4. benutzten Grösse J proportional.

Für die Grösse einer unendlich kleinen Bewegung erschienen uns oben die Ausdrücke e und v besonders charakteristisch, d. h. die Grösse der Verschiebung einer Hauptaxe der Bewegung in sich und die der Drehung des Raumes um sie; zu diesen Grössen steht in der That auch die durch (4) als Intensität definirte Function in enger Beziehung. Sind nämlich p_{ik} und π_{ik} die Coordinaten der beiden Hauptaxen, so dass

$$\varrho\, \pi_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,(a_\gamma b_\delta - b_\gamma a_\delta)\; \Sigma\, (a_i b_k - b_i a_k)\, p_{ik}\,;$$

so können wir diesen Grössen derartig absolute Werthe beilegen, dass sie die Coordinaten zweier einzelnen Translationskräfte bedeuten, welche mit dem gegebenen System äquivalent sind, d. h. dass:

$$P_{ik} = p_{ik} + \pi_{ik}\,.$$

Setzen wir diese Werthe in (4) ein, so erhalten wir wegen

$$\Phi_{p\pi} = 0$$

die Relation:

$$(5) \qquad R^2 = \frac{\Phi_{pp}}{16\sqrt{\Delta}} + \frac{\Phi_{\pi\pi}}{16\sqrt{\Delta}} = e^2 + v^2\,;$$

es ist also *das Quadrat der Intensität eines Kraftsystems gleich der Summe der Quadrate der beiden mit ihm äquivalenten, nach den Hauptaxen, resp. um sie wirkenden Kräfte* (vgl. eine Anmerkung zu § 9.).

Betrachten wir hier e als die Grösse der nach p wirkenden Translationskraft, so ist v die der um p wirkenden Drehkraft, also eine Winkelgrösse, und beide sind nur bei unserer allgemeinen Massbestimmung direct mit einander vergleichbar, während sie bei specieller Massbestimmung einen wesentlich verschiedenen Charakter tragen. In der

*) Ein Kraftsystem hat also keine Intensität, wenn sein Translationscomplex mit dem absolut conjugirten, d. h. mit dem Rotationscomplexe in Involution liegt, denn die Bedingung hierfür ist eben:

$$\Phi_{PP} = 0\,.$$

Wir behalten im Texte den Factor $\frac{1}{4}$ bei, damit diese Definition mit unserer obigen für eine einzelne Kraft völlig übereinstimmt.

That müssen wir hier die Grössen e und v trennen und nur die eine (v) als Intensität bezeichnen, so dass allen Systemen mit demselben v dieselbe Intensität zukommt. Die Grösse e wird nämlich beim Uebergange von allgemeiner zu specieller Massbestimmung im Vergleiche zu v unendlich klein. Es findet dieser Umstand auch seinen Ausdruck in der Form, in welcher die Gleichung des imaginären Kugelkreises auftritt; denn diese hat zur Folge, dass man durch Einsetzen der Coordinaten des Kraftsystems in sie einen von den nach den Coordinatenaxen wirkenden Kraftcomponenten allein abhängigen Ausdruck:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

erhält, während die Drehmomente L, M, N um die Axen darin nicht verwerthet sind. Es lassen sich deshalb auch die folgenden Erörterungen nicht unmittelbar auf unsere specielle Massbestimmung übertragen (wenigstens würde dazu eine Umsetzung derselben erforderlich sein), während sie geeignet sind, die allgemeine Gestaltung mechanischer Probleme bei der von uns concipirten Massgeometrie zu kennzeichnen.

Mit Einführung obiger Function R haben wir das Kraftsystem ebenso als einheitliches Ganze hingestellt, wie bisher eine einzelne Kraft; wir werden dadurch genöthigt, auch den jenes darstellenden linearen Complex ebenso als Raumelement aufzufassen, wie die Gerade, an welche der Begriff der Kraft geknüpft ist. Demgemäss werden wir die Beziehungen des Systems zu den zugehörigen oder anderen linearen Complexen ebenso untersuchen, wie oben die einer Kraft zu ihrer Axe, resp. Directrix, oder zu anderen Geraden.

Wir stellen zu dem Zwecke zunächst nach Analogie des Vorhergehenden die folgenden Definitionen auf, deren Bedeutung sogleich hervortreten wird:

Als Verschiebungsmoment eines Kraftsystems in Bezug auf einen linearen Complex P' bezeichnen wir das Product der Intensität des Systems in den Cosinus der Neigung des gegebenen Complexes gegen den dem Kraftsysteme zugehörigen Translationscomplex oder in das Moment desselben gegen den zugehörigen Rotationscomplex, d. h. es ist:

$$(6) \qquad V(P, P') = \frac{\Phi_{PP'}}{4\sqrt{\Delta}\sqrt{\Phi_{P'P'}}} = \frac{\Sigma\, Q_{ik} P'_{ik}}{4\sqrt{\Phi_{P'P'}}}.$$

Reciprok entsprechend sei das Drehmoment eines Kraftsystems in Bezug auf einen linearen Complex gleich der Intensität multiplicirt in das Moment des Translationscomplexes gegen denselben oder in den Cosinus der Neigung des Rotationscomplexes gegen ihn; d. h. es ist

$$(7)\qquad D(P, P') = \frac{(P, P')}{4\sqrt{\Phi_{P'P'}}} = \frac{\frac{1}{2}\Sigma\,\frac{\partial \Phi_{QQ}}{\partial Q_{\alpha\beta}}\,P'_{\gamma\delta}}{4\sqrt{\Delta}\,\sqrt{\Phi_{P'P'}}}.$$

Sind hier die P'_{ik} Coordinaten einer einzelnen Geraden, so gehen die Ausdrücke (6), (7) in die entsprechenden in § 12. über. Lassen wir in diesem Falle alle Coordinaten P'_{ik} bis auf eine verschwinden, so wird das Verschiebungsmoment des Systems in Bezug auf die Kante

$$x_\alpha = 0\,,\quad x_\beta = 0$$

des Coordinatentetraëders:

$$= \frac{Q_{\gamma\delta}}{4\sqrt{a_{\gamma\gamma}a_{\delta\delta} - a_{\gamma\delta}^2}},$$

wo die α, β, γ, δ die Werthe 1, 2, 3, 4 in cyklischer Vertauschung annehmen können; und das Drehmoment in Bezug auf dieselbe Kante wird

$$= \frac{P_{\alpha\beta}}{4\sqrt{a_{\gamma\gamma}a_{\delta\delta} - a_{\gamma\delta}^2}}.$$

Die Coordinaten eines Kraftsystems sind also bis auf gewisse constante Factoren als Coordinaten des Rotationscomplexes die Verschiebungsmomente nach den Kanten des Coordinatentetraëders, als solche des Translationscomplexes gleich den Drehmomenten um diese Kanten, eine Definition, welche ebenso für unendlich kleine Bewegungen gilt (vgl. § 4.).

Die Gleichungen (6) und (7) ergeben nun sofort die Sätze:

Es giebt vierfach unendlich viele lineare Complexe, in Bezug auf welche das Drehmoment eines Kraftsystems verschwindet; dieselben liegen in Involution mit dem Translationscomplexe des Systems, d. h. sind normal zum Rotationscomplexe.

Es giebt vierfach unendlich viele lineare Complexe, in Bezug auf welche das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems verschwindet; dieselben liegen in Involution mit dem Rotationscomplexe des Systems, d. h. sind normal zum Translationscomplexe.

Von der mechanischen Bedeutung der hier eingeführten Ausdrücke können wir uns eine Vorstellung machen, wenn wir von den Hauptaxen des betreffenden Complexes P' ausgehen. Sind nämlich p'_{ik} und π'_{ik} die Coordinaten dieser beiden Axen, so dass wieder

$$\varrho\pi'_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,(a_\gamma b_\delta - b_\gamma a_\delta)\;\Sigma\,(a_i b_k - b_i a_k)\,p'_{ik},$$

so können wir die Coordinaten des Complexes mittelst derselben ausdrücken durch die Gleichungen:

$$P'_{ik} = p'_{ik} + \lambda\varrho\pi'_{ik}\,,$$

und es wird:

(8) $$V(P, P') = \frac{\Phi_{Pp'} + \lambda\varrho\Phi_{P\pi'}}{4\sqrt{\Delta}\sqrt{\Phi_{p'p'} + 2\lambda\varrho\Phi_{p'\pi'} + \lambda^2\varrho^2\Phi_{\pi'\pi'}}}.$$

Berücksichtigen wir ferner die Relationen (vgl. § 1.):

$$\Phi_{p'\pi'} = 0 \qquad \varrho\Phi_{P\pi'} = \Delta(P, p')$$
$$\varrho^2\Phi_{\pi'\pi'} = \Delta\Phi_{p'p'} \qquad \varrho(p', \pi') = \Phi_{p'p'},$$

so erhalten wir für Neigung und Moment des Complexes gegen seine Hauptaxen die Werthe:

$$\cos(P', p') = \cos(P', \pi') = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2\Delta}}$$

$$M(P', p') = M(P', \pi') = \frac{\lambda\sqrt{\Delta}}{\sqrt{1 + \lambda^2\Delta}}.$$

Hieraus folgt aber:

(9) $$\cos^2(P', p') + M^2(P', p') = 1,$$

d. h.: *Das geometrische Moment eines linearen Complexes gegen eine seiner Hauptaxen ist gleich dem Sinus seiner Neigung gegen diese Axe.*

Wenden wir diese Gleichung auf (8) an, so wird endlich:

(10) $$V(P, P') = \frac{\Phi_{Pp'}}{4\sqrt{\Delta\cdot\Phi_{p'p'}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2\Delta}} + \frac{(P, p')}{4\sqrt{\Phi_{p'p'}}}\cdot\frac{\lambda\sqrt{\Delta}}{\sqrt{1 + \lambda^2\Delta}}$$
$$= V(P, p')\cos(P', p') + D(P, p')\sin(P', p')\ ^{*)},$$

also: *Das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems in Bezug auf einen linearen Complex ist gleich dem Verschiebungsmomente nach einer Hauptaxe desselben multiplicirt in den Cosinus der Neigung derselben gegen den betreffenden Complex, vermehrt um das Product des Drehmomentes um diese Axe in den Sinus jener Neigung*; ein Satz, den man unter Benutzung der auf die Fundamentalfläche gegründeten Polarität noch in verschiedenen anderen Formen aussprechen kann. Reciprokes gilt für die Drehmomente; es ist:

(11) $$D(P, P') = D(P, p')\cos(P', p') + V(P, p')\sin(P', p').$$

---

*) Das Verschwinden dieses Ausdruckes giebt eine lineare Gleichung in λ; es giebt also bei gegebenem Hauptaxenpaare (wie überhaupt in einer zweigliedrigen Gruppe) nur einen linearen Complex, welcher mit einem bestimmten anderen in Involution liegt. — Indem man auf beiden Seiten der Gleichung durch $\sqrt{\Phi_{PP}}$ dividirt, erhält man $\cos(P, P')$ *ausgedrückt durch Neigung und Moment der Hauptaxen* (p *und* p') *gegen einander und gegen ihre zugehörigen Complexe*; es ist:

$$\cos(P, P') = \cos(P, p')\cos(P', p') + M(P, p')\sin(P', p'),$$

wo nun weiter:

$$\cos(P, p') = \cos(p, p')\cos(P, p) + M(p, p')\sin(P, p).$$

Für alle Complexe mit demselben Hauptaxenpaare sind also diese Momente nur durch Neigung, resp. Moment des Complexes gegen die Axen bestimmt. Gehört die Axe p' insbesondere dem Translationscomplexe an, so verschwindet $D(P, p')$; das Verschiebungsmoment in Bezug auf den Complex wird gleich dem in Bezug auf diese Hauptaxe, multiplicirt in $\cos(P', p')$; und es folgt:

$$V(P, P')^2 + D(P, P')^2 = V(P, p')^2 = D(P, \pi')^2,$$

d. h.: *In Bezug auf alle Complexe mit gemeinsamem Axenpaare ist, wenn eine der Hauptaxen dem Translations- (resp. Rotations-)Complexe angehört, die Summe der Quadrate von Verschiebungs- und Drehmoment gleich dem Quadrate des Verschiebungs- (resp. Dreh-)Moments in Bezug auf diese Axe.*

Besonders ausgezeichnet sind diejenigen linearen Complexe, in Bezug auf welche Verschiebungs- und Drehmoment gleichzeitig verschwinden; die Gleichungen (10) und (11) zeigen, dass die Hauptaxen derselben diejenigen des Kraftsystems treffen, denn $\cos(P', p')$ und $\sin(P', p')$ können im Allgemeinen nicht verschwinden*); es muss also gleichzeitig sein

$$V(P, p') = 0 \text{ und } D(P, p') = 0,$$

d. h. p' der durch die beiden dem System zugehörigen Complexe bestimmten Congruenz angehören. In ähnlicher Weise lassen sich auch andere Sätze über die Momente übertragen; so ergeben die Gleichungen (6) in § 12. z. B.:

Kennt man das Drehmoment eines Kraftsystems in Bezug auf einen linearen Complex, welcher normal zu einem mit dem Translationscomplexe in Involution liegenden Complexe ist, so kann man daraus das Moment für jeden Complex der durch diese beiden bestimmten zweigliedrigen Gruppe berechnen. —

Bilden wir insbesondere noch die Momente des Systems in Bezug auf den zugehörigen Translations- und Rotationscomplex, so erhalten wir: *Das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems in Bezug auf seinen Translationscomplex ist gleich der Intensität des Systems; das Drehmoment in Bezug auf denselben Complex ist gleich dem Momente des Complexes in Bezug auf sich selbst, multiplicirt in die Intensität des Systems.*

Für die Zusammensetzung verschiedener Kraftsysteme, die ja durch Addition der Coordinaten geschieht, gelten in Bezug auf die *Intensität des resultirenden Systems* nunmehr ähnliche Sätze, wie für einzelne convergirende Kräfte; es ist dieselbe z. B. für das aus zwei Systemen P' und P'' resultirende System bestimmt durch

---

*) Dies könnte nur eintreten, wenn p' dem Complexe P' selbst angehörte, d. h. mit der andern Axe π' in eine Erzeugende der Fundamentalfläche zusammenfiele (vgl. den Fall [1, ∞] in § 10.).

$$R^2 = P'^2 + P''^2 + 2P'P'' \cos(P, P'),$$

und zwar ist diese Gleichung unabhängig von der gegenseitigen Lage der Complexe P und P', während die entsprechende Gleichung nur für sich schneidende Gerade bewiesen war.

Das System R ist geometrisch vollständig bestimmt, wenn wir die Lage seiner Hauptaxen kennen, da es dann nur noch einen Complex giebt, welcher der durch die Complexe P'_{ik} und P''_{ik} bestimmten zweigliedrigen Gruppe angehört; wir werden daher zunächst den Ort der Hauptaxen aller Complexe dieser Gruppe bestimmen. Die Coordinaten P_{ik} eines solchen können wir, wenn p'_{ik}, p''_{ik} die der Directricen der betreffenden Congruenz sind, in der Form darstellen:

(12) $$\varrho P_{ik} = p'_{ik} + \lambda p''_{ik}.$$

Sind ferner p_{ik} und π_{ik} die Coordinaten der Hauptaxen des Complexes P, so ist auch

(13) $$\varrho P_{ik} = p_{ik} + \mu \pi_{ik},$$

wo zwischen den p_{ik} und π_{ik} wieder obige Gleichungen bestehen; aus diesen beiden Gleichungen haben wir ϱ, μ und λ zu eliminiren, zu welchem Zwecke wir das Coordinatensystem passend wählen. Es gilt nämlich der Satz:

In jeder Congruenz einer zweigliedrigen Gruppe von linearen Complexen giebt es zwei bestimmte einander absolut conjugirte Gerade, „das Axenpaar der Congruenz", welche von den Hauptaxen sämmtlicher Complexe der Gruppe getroffen werden).*

Die vier Linien der Hauptaxenpaare von irgend zwei Complexen der Gruppe bestimmen nämlich zwei gemeinsame Transversalen, welche einander absolut conjugirt sind, da sie je zwei in dieser Beziehung stehende Gerade schneiden, und welche der Congruenz angehören, da eine jede zwei in Bezug auf den einen und zwei in Bezug auf den andern Complex conjugirte Gerade trifft. Als Linien der Congruenz werden sie aber auch von den Directricen derselben geschnitten, und als einander absolut conjugirte Gerade von den absoluten Polaren der letzteren. Da diese beiden Linien also nur von den Directricen der Congruenz abhängen, so ist unser Satz bewiesen, und *das Axenpaar einer linearen Congruenz besteht aus den gemeinschaftlichen Transversalen der Directricen und der absoluten Polaren derselben.* Sei nun dies Axenpaar gegeben durch die Kanten

$$x_1 = 0,\ x_4 = 0 \text{ und } x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

des Coordinatentetraeders, dessen übrige Kanten auf der Fundamentalfläche liegen mögen, so ist für alle Complexe der Gruppe:

---

*) Vgl. für spec. Massbest. Plücker: Neue Geometrie etc. n. 54 und 58.

$$P_{14} = 0, \qquad P_{23} = 0,$$

und für alle ihre Hauptaxen:

(14) $$p_{14} = 0, \qquad p_{23} = 0.$$

Ist ferner wieder

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche, so bestehen zwischen den Coordinaten zweier absoluter Polaren die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \varrho p_{14} = \pi_{23} & \varrho p_{13} = \pi_{13} & \varrho p_{34} = -\pi_{34} \\ \varrho p_{23} = \pi_{14} & \varrho p_{42} = \pi_{42} & \varrho p_{12} = -\pi_{12}, \end{array}$$

und unter Berücksichtigung dieser Relationen ergiebt die Elimination von ϱ, μ, λ aus (12) und (13) die Bedingung:

(15) $$\begin{vmatrix} p_{12} & 0 & p_{12}' & p_{12}'' \\ 0 & p_{13} & p_{13}' & p_{13}'' \\ 0 & p_{42} & p_{42}' & p_{42}'' \\ p_{34} & 0 & p_{34}' & p_{34}'' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Hauptaxen gehören also noch einem Complexe zweiten Grades an; dieser ist sich selbst absolut conjugirt, was darin seinen Grund hat, dass jedes Hauptaxenpaar aus zwei absoluten Polaren besteht, und die beiden Linien des Axenpaares sind Doppellinien*) desselben. Da die Hauptaxen gleichzeitig der durch (14) bestimmten Congruenz angehören, *so müssen sie eine windschiefe Fläche 4. Ordnung bilden;* ihre Gleichung ergiebt sich, wenn wir in (15)

$$\sigma p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$$

setzen, wo dann wegen (14) x_1, x_4 zu y_1, y_4 und x_2, x_3 zu y_2, y_3 proportional sind. Die Gleichung wird somit:

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 & 0 & p_{12}' & p_{12}'' \\ 0 & x_1 x_3 & p_{13}' & p_{13}'' \\ 0 & x_2 x_4 & p_{42}' & p_{42}'' \\ -x_3 x_4 & 0 & p_{34}' & p_{34}'' \end{vmatrix} = 0,$$

sie stellt in der That eine geradlinige Fläche 4. Ordnung mit 2 Doppelgeraden**) dar; die letzteren bilden gleichzeitig das Axenpaar der

*) Vgl. Plücker: Neue Geometrie n. 300 und 313; und A. Weiler: Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades, Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, 1873.

**) Gattung XI nach der Eintheilung von Cremona: Sulle superficie gobbe di quarto grado, Memorie dell' Accad. di Bologna, t. VIII, serie 2. — Für spec. Massbestimmung zerfällt diese Fläche in die unendlich ferne Ebene und in eine windschiefe Fläche 3. Ordnung; vgl. Plücker: Neue Geometrie, n. 86. Herr

Congruenz; und die Fläche wird umhüllt von den absoluten Polarebenen ihrer Punkte. Durch diese Reciprocität entspricht jeder auf ihr liegenden Linie eine zweite; beide fallen insbesondere zusammen für die vier Erzeugenden, welche sie mit der Fundamentalfläche gemein hat; *es giebt daher in einer zweigliedrigen Gruppe von linearen Complexen vier, welchen Bewegungen, bez. Kraftsysteme von der Art* [1, 2] *entsprechen* (vgl. §. 10.).

Wollte man bei specieller Massbestimmung entsprechende Sätze aufstellen, so müsste man den Ausdruck

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

für die Intensität eines Kraftsystems zu Grunde legen. Das Verschiebungsmoment in Bezug auf einen Complex mit den Coordinaten $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}, \Lambda, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ würde alsdann

$$= \frac{X\Xi + Y\mathsf{H} + Z\mathsf{Z}}{\sqrt{\Xi^2 + \mathsf{H}^2 + \mathsf{Z}^2}},$$

also dasselbe für alle Complexe mit derselben Hauptaxe und gleich der Projection von R auf diese Axe. Das Drehmoment in Bezug auf den Complex würde

$$= \frac{1}{2} \frac{X\Lambda + Y\mathsf{M} + Z\mathsf{N} + L\Xi + M\mathsf{H} + N\mathsf{Z}}{\sqrt{\Xi^2 + \mathsf{H}^2 + \mathsf{Z}^2}}$$

$$= \frac{1}{2} R \left\{\Delta \sin \varphi + (K + K') \cos \varphi\right\} \text{*)},$$

d. h. gleich dem Drehmomente von R um die Hauptaxe des Complexes vermehrt um das Product der Projection von R auf dieselbe in die Summe der Parameter beider Complexe.

§ 14.

Bedingungen des Gleichgewichtes. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Aus der Definition des Momentes erhellt unmittelbar, dass, wenn Gleichgewicht Statt finden soll, sowohl das Drehmoment des Kraftsystems in Bezug auf jede beliebige Axe, als auch das Verschiebungsmoment desselben in Bezug auf jeden beliebigen Strahl verschwinden muss, und dass diese Bedingungen gleichzeitig nothwendig und hinreichend sind. Sie werden aber dargestellt (wegen (3) und (4) in

---

Ball benutzt die letztere zur Construction der Axe einer aus zwei gegebenen resultirenden Schraubenbewegung: The theorie of screws, Transactions of the R. Irish Acad., vol. XXV, 1872, p. 157. Es findet sich hier auch die Abbildung eines Modells der Fläche, welche er mit dem Namen *Cylindroid* belegt.

*) Es ist hier Δ die kürzeste Entfernung der beiden Axen, φ ihre gegenseitige Neigung; K und K' bedeuten die Parameter beider Complexe (vgl. § 1.).

§ 12.) durch die für specielle Massbestimmung bekannten 6 Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} P_{12}=0 & P_{13}=0 & P_{14}=0 \\ P_{34}=0 & P_{42}=0 & P_{23}=0\,, \end{cases}$$

oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} Q_{12}=0 & Q_{13}=0 & Q_{14}=0 \\ Q_{34}=0 & Q_{42}=0 & Q_{23}=0\,. \end{cases}$$

Zu einem allgemeineren Ausdrucke dieser Gleichgewichtsbedingungen, dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten, gelangen wir durch Betrachtung der *Elementararbeit*, welche eine Kraft bei einer unendlich kleinen Bewegung leistet, d. h. des Productes einer Translationskraft in das Verschiebungsmoment der Bewegung nach ihrer Directrix, resp. einer Rotationskraft in das Drehmoment der Bewegung um ihre Axe. Sind nämlich P_{ik} die Coordinaten einer einzelnen Translationskraft P, Π_{ik} die einer unendlich kleinen Verschiebung ihres Angriffspunktes x, so ist das Verschiebungsmoment der Bewegung Π nach der Directrix der Kraft P:

$$V(P, \Pi) = \Pi \cdot \cos(P, \Pi)\,,$$

und also die bei der Verschiebung von der Kraft geleistete Arbeit:

$$A = P \cdot \Pi \cdot \cos(P, \Pi)\,.$$

Wirken mehrere Kräfte P', P'', $\cdots$, gleichzeitig an einem festen Körper, und sind Π', Π'' $\cdots$ bez. die Verschiebungen ihrer Agriffspunkte, so muss die Summe aller von den Kräften bei den bezüglichen Bewegungen geleisteten Arbeiten rerschwinden, wenn das System von Kräften im Gleichgewichte sein soll, und zwar muss dies der Fall sein, wie auch die Verschiebungen Π gewählt sein mögen; d. h. *die Bedingungen des Gleichgewichtes* (1) *lassen sich in die eine Gleichung*

$$(3)\qquad \Sigma\Pi \cdot P \cdot \cos(\Pi, P) = 0$$

zusammenfassen, wenn man unter den Π *virtuelle Verschiebungen versteht*, und diese Gleichung stellt dann das *Princip der virtuellen Geschwindigkeiten* (zunächst nur für frei bewegliche, starre Körper) dar. Die Ueberlegungen, welche eine solche Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen als berechtigt erscheinen lassen, sind unabhängig von der Natur unserer thatsächlich gegebenen Massgeometrie und brauchen daher hier nicht wiederholt zu werden, es kommt mir hier vielmehr nur darauf an, unter Annahme des Princips die verschiedenen analytischen Formen aufzustellen, in denen es bei unserer allgemeinen Massbestimmung auftritt.

Unsere Gleichung (3) stimmt aber auch mit der gebräuchlichen

$$\Sigma P dp = 0$$

vollkommen überein, denn es wird für diese eben $V(P, \Pi) = dp$, gleich der Projection der Bewegung auf die Richtung der Kraft. — Ganz ähnliche Erörterungen gelten für Rotationskräfte, und wir können das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nun in den folgenden beiden äquivalenten Formen aussprechen:

Zum Gleichgewichte von Translationskräften an einem unveränderlichen, frei beweglichen Punktsysteme ist nöthig und hinreichend, dass für jeden virtuellen Bewegungszustand die Summe der Kräfte, jede multiplicirt mit dem Verschiebungsmomente der Verschiebung ihres Angriffspunktes nach der Directrix der Kraft, verschwinde.

Zum Gleichgewichte von Rotationskräften an einem unveränderlichen, frei beweglichen Ebenensysteme ist nöthig und hinreichend, dass für jeden virtuellen Bewegungszustand die Summe der Kräfte, jede multiplicirt in das Drehmoment der Drehung ihrer Angriffsebene in Bezug auf die Axe der Kraft, verschwinde.

Die von einem Kraftsysteme bei einer unendlich kleinen Bewegung geleistete Arbeit können wir noch in einer anderen Form schreiben, welche uns die Analogie zwischen Kräften und unendlich kleinen Translationen oder Rotationen als eine *dualistische* erkennen lassen wird. Zu dem Zwecke gehen wir zunächst von rechtwinkligen Coordinaten aus, d. h. wir wählen ein Polartetraëder in Bezug auf die Fundamentalfläche zum Coordinatentetraëder. Die Gleichung dieser Fläche sei also durch

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0$$

gegeben; dann ist sie in Liniencoordinaten dargestellt durch:

$$\Sigma \alpha_i \alpha_k p_{ik}^2 = 0 .$$

Sind nun P_{ik} resp. Q_{ik} die Coordinaten eines Kraftsystems, P'_{ik} resp. Q'_{ik} die einer unendlich kleinen Bewegung, wo sich die P, P' auf den zugehörigen Translations-, die Q, Q' auf den zugehörigen Rotationscomplex beziehen, so ist nach (7) § 13. das Drehmoment des Kraftsystems in Bezug auf die Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$.

$$= \frac{P_{14}}{4\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}}$$

und das der unendlich kleinen Bewegung in Bezug auf dieselbe Kante:

$$= \frac{P_{14}'}{4\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}} .$$

Also wird die von der um diese Geraden wirkenden Componente des Systems geleistete Arbeit

$$= \frac{P_{14} P_{14}'}{16\, \alpha_2 \alpha_3} ;$$

ebenso drücken sich die von den andern Componenten geleisteten Arbeiten aus, und es wird daher die Gesammtarbeit*)

$$A = \frac{1}{16\,\Delta}\,\Sigma\,\alpha_i\alpha_k P_{ik} P'_{ik} = \frac{\Phi_{PP'}}{16\,\Delta}$$

und dies ist ein invarianter Ausdruck. Gehen wir nunmehr wieder zu einem allgemeinen Coordinatentetraëder zurück, so wird daher auch hier

$$A = \frac{\Phi_{PP'}}{16\,\Delta} = \frac{1}{32\,\Delta}\,\Sigma\,\frac{\partial\Phi}{\partial P_{ik}}\,P'_{ik}. \tag{4}$$

Nach § 1. und § 4. ist aber

$$\Phi_{PP'} = \sqrt{\Delta}\,\Sigma\,P_{ik}Q'_{ik} = \sqrt{\Delta}\,\Sigma\,P'_{ik}Q_{ik};$$

und daher können wir *die von dem Kraftsysteme P bei der unendlich kleinen Bewegung P' geleistete Arbeit* auch in folgenden beiden Formen schreiben:

$$A = \frac{1}{16\sqrt{\Delta}}\cdot\Sigma\,Q_{ik}P'_{ik}, \tag{5}$$

$$A = \frac{1}{16\sqrt{\Delta}}\cdot\Sigma\,P_{ik}Q'_{ik}, \tag{6}$$

und endlich erhalten wir, wegen

$$\Phi_{PP'} = \Phi_{QQ'}$$

noch eine vierte Form für dieselbe, nämlich

$$A = \frac{\Phi_{QQ'}}{16\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{32\sqrt{\Delta}}\,\frac{\partial\Phi_{QQ}}{\partial Q_{ik}}\,Q'_{ik}, \tag{7}$$

wo Φ_{QQ} aus Φ_{PP} entsteht, indem man $Q_{\alpha\beta}$ statt $P_{\gamma\delta}$ setzt. Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den in § 13. aufgestellten ergiebt dann:

*Die bei einer unendlich kleinen Bewegung von einem Kraftsysteme geleistete Arbeit ist gleich der Intensität der Bewegung multiplicirt in das Verschiebungsmoment des Systems in Bezug auf den der Bewegung zugeordneten Translationscomplex, oder in das Drehmoment des Systems in Bezug auf den der Bewegung zugeordneten Rotationscomplex***); ein Satz, den man auch in anderer Form aussprechen kann, wenn man die Worte: Kraftsystem und unendlich kleine Bewegung vertauscht.

---

*) Da nämlich eine jede Kante normal zu den übrigen ist, so verschwindet die von der um sie wirkenden Kraftcomponente bei den Drehmomenten der Bewegung um die anderen Kanten geleistete Arbeit; deshalb wurden auch rechtwinklige Coordinaten gewählt

**) Dies Letztere würde auch noch für spec. Massbest. gelten, wenn man den am Schlusse von § 13. aufgestellten Ausdruck als Drehmoment des Systems betrachtet und die Intensität der Bewegung

$$= \sqrt{\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2}$$

setzt.

Ist nun das Kraftsystem im Gleichgewichte, so muss die Grösse A verschwinden, sobald die Bewegung als virtuelle gedacht wird, und *wir erhalten alsdann in den Gleichungen* (4), (5), (6), (7) *vier verschiedene, gleich berechtigte Ausdrücke für das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten*, aus denen sofort wieder die Gleichungen (1) und (2) folgen. Von besonderem Interesse sind hier jedoch die Gleichungen (5) und (6), sie sagen nämlich durch ihr Verschwinden aus:

*Für eine gegebene unendlich kleine Bewegung giebt es vierfach unendlich viele Kraftsysteme, welche bei Eintritt derselben keine Arbeit leisten**). *Den letzteren sind dann diejenigen vierfach unendlich vielen linearen Complexe als Translationscomplexe zugeordnet, welche mit dem Rotationscomplexe der gegebenen Bewegung in Involution liegen***), *und als Rotationscomplexe diejenigen vierfach unendlich vielen linearen Complexe, welche mit dem Translationscomplexe der Bewegung in Involution liegen.*

Durch diese Verhältnisse ist nun *die Analogie zwischen unendlich kleinen Bewegungen und Kraftsystemen als eine dualistische* gekennzeichnet; wir können diese Dualität folgendermassen aussprechen:

Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines Kraftsystems ist eine unendlich kleine Bewegung dargestellt, und zwar stehen sich dabei die Rotations- und Translationscoordinaten beider kreuzweise gegenüber. (Bei specieller Massbestimmung existiren, wenn man von Kräftepaaren und Translationen absieht, nur noch die Translations-Coordinaten der Kräfte und die Rotations-Coordinaten der Bewegung.) Aehnliche Bemerkungen gelten natürlich auch, wenn man umgekehrt ein Kraftsystem als gegeben annimmt und die vierfach unendlich vielen unendlich kleinen Bewegungen betrachtet, bei deren Eintritt das Kraftsystem keine Arbeit leistet***).

Ist das betrachtete Punkt- resp. Ebenen-System nicht frei, so treten gewisse Bedingungsgleichungen hinzu, und man wird das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ebenso, wie in der gewöhnlichen Mechanik, auch auf diese Fälle ausdehnen; es wird aber dafür ebensowenig ein strenger Beweis erbracht werden können†). Ist das gegebene Punkt- oder Ebenen-System nicht unveränderlich, so hat man noch die negative virtuelle Arbeit der innern Kräfte der der äussern hinzu-

---

*) Diejenigen als identisch betrachtet, deren Coordinaten sich nur hinsichtlich ihrer absoluten Werthe unterscheiden.

**) Soweit gilt der Satz auch für spec. Massbest. und wurde für diese von Herrn Klein gegeben: Math. Annalen, Bd. IV, p. 413.

***) Es würde sich so für spec. Massbest. ein *Princip der virtuellen Rotationen* ergeben, wie es Chasles aufgestellt hat: Aperçu historique, note 34.

†) Vgl. Jakobi: Vorlesungen über Dynamik, p. 15.

zufügen; es würde jedoch über den Zweck der vorliegenden Arbeit hinausgehen, wenn wir diese Verhältnisse hier im Einzelnen näher besprechen wollten.

Es möge nur noch angedeutet werden, wie die Untersuchungen von Möbius*) über die gegenseitige Lage von Linien, wenn sich Kräfte sollen angeben lassen, die, nach ihnen wirkend, im Gleichgewichte sind, sich durch unsere liniengeometrische Betrachtungsweise auf das Einfachste erledigen. Es seien z. B. drei Kraftsysteme mit den Coordinaten P'_{ik}, P''_{ik}, P'''_{ik} gegeben; man soll ein viertes (P_{ik}) bestimmen, das mit ihnen im Gleichgewichte ist; d. h. es sollen die 6 Gleichungen bestehen:

$$P'_{ik} + P''_{ik} + P'''_{ik} + P_{ik} = 0 .$$

Denken wir uns die P_{ik} als Coordinaten des zugehörigen Translationscomplexes; alsdann können wir immer einen Complex mit den Coordinaten Π_{ik} bestimmen, so dass

$$(P', \Pi) = 0, \quad (P'', \Pi) = 0, \quad (P''', \Pi) = 0;$$

dann ist aber auch wegen der gestellten Bedingungsgleichungen

$$(P, \Pi) = 0;$$

also: Soll ein Kraftsystem mit drei anderen im Gleichgewichte sein, so muss jeder lineare Complex, welcher mit den für diese 3 Systeme charakteristischen Complexen in Involution liegt, auch mit dem zum vierten Systeme gehörigen in Involution liegen, oder, was dasselbe ist, *die vier linearen Complexe müssen die eine Schaar von Erzeugenden einer Fläche 2. Ordnung mit einander gemein haben.* Sind 3 einzelne Kräfte gegeben, so erhalten wir daraus den Satz:

Halten sich vier Kräfte das Gleichgewicht, so gehören ihre Directricen derselben Schaar von Erzeugenden einer Fläche 2. Ordnung an.

Analog ergeben sich die folgenden Sätze**):

Sollen 5 Kraftsysteme im Gleichgewichte sein, so müssen die zugehörigen linearen Complexe dieselben zwei Geraden gemein haben.

Sollen 6 Kraftsysteme im Gleichgewichte sein, so müssen die zugehörigen linearen Complexe mit demselben siebenten Complexe in Involution liegen.

Sind die Kraftsysteme durch einzelne Kräfte ersetzbar, so haben wir:

Halten sich 5 Kräfte das Gleichgewicht, so werden ihre Directricen von denselben 2 Geraden geschnitten.

---

*) Möbius: Lehrbuch der Statik, Th. I, p. 181 ff.

**) Ganz analoge Sätze gelten natürlich, wenn man von den Rotationscomplexen ausgeht; sowie auch für unendlich kleine Bewegungen, die sich gegenseitig aufheben. Vgl. für spec. Massbest.: Ball, the theory of screws, Transactions of the R. Irish academy, vol. XXV, 1872, p. 183.

Halten sich 6 Kräfte das Gleichgewicht, so gehören ihre Directricen demselben linearen Complexe an).*

Sind dagegen 6 Kraftsysteme gegeben, so lässt sich stets ein siebentes finden, das mit ihnen im Gleichgewichte ist, vorausgesetzt, dass keines der 6 Systeme aus einigen unter ihnen resultirt, ein Satz, der einem oben über unendlich kleine Bewegungen gegebenen entspricht (vgl. § 4.)**).

Erlangen, im Juli 1873.

---

*) Vgl. für spec. Massbest. Sylvester: Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considerées comme des axes de rotation. Comptes rend. t. 52, 1861, p. 741; Cayley: Note relative aux droites en involution de M. Sylvester, ib. p. 1039 und Chasles: Sur les six droites, qui peuvent être les directions de six forces en équilibre, ib. p. 1094.

**) Dieser Satz wurde oben durch eine allgemeinere Coordinatenbestimmung gewonnen, welche wir nunmehr so aussprechen können, dass statt der Momente der Bewegung resp. des Kraftsystems in Bezug auf die Kanten eines Tetraeders die in Bezug auf sechs lineare Complexe als Coordinaten angenommen werden. Eine solche Coordinatenbestimmung würde im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmen, welche Herr Ball einer brieflichen Mittheilung zufolge benutzt.

Nachschrift.

Erst nach Vollendung dieses Aufsatzes wurde ich mit den gleichzeitigen Arbeiten des Herrn Ball bekannt, welche, an die Voraussetzungen der speciellen Massbestimmung anknüpfend, sich auf ähnliche Verallgemeinerungen statischer Sätze beziehen, wie ich sie in § 13. und 14. angedeutet habe. Ich konnte daher nur noch einzelne auf sie bezügliche Bemerkungen hinzufügen. Diese Verallgemeinerungen beruhen im Wesentlichen darauf, dass man statt der geraden Linie den linearen Complex als Raumelement zu Grunde legt, sei es, dass man mit ihm zunächst die geometrische Vorstellung eines Liniengebildes, oder direct die mechanische einer unendlich kleinen Bewegung, resp. eines Kraftsystems verbindet. Vgl. eine Mittheilung des Herrn Ball in den Proceedings of the R. Society, No. 145, 1873. Ausführlicher soll dieselbe demnächst in den Phil. Transactions der R. Society erscheinen.

Erlangen, im November 1873.

Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades.

Von Adolf Weiler in Stäfa bei Zürich.

Bei einem Complex sind die zugehörige Singularitätenfläche und die Congruenz seiner singulären Linien von ganz besonderem Interesse. Bekanntlich sind für die Complexe zweiten Grades beide von der vierten Ordnung und vierten Classe.

Der allgemeinste Complex zweiten Grades, sowie eine Reihe von Ausartungen desselben, sind bereits eingehend untersucht. Ein bekanntes Beispiel ist der Tetraëdral-Complex, dessen Gerade ein Tetraeder unter einem bestimmten Doppelverhältniss schneiden. Als Punktgebilde besteht seine Singularitätenfläche aus den vier Tetraëderebenen, als Ebenengebilde aus den vier Tetraëderecken. Die Congruenz der singulären Linien hat sich aufgelöst in eine Congruenz vierter Ordnung, nullter Classe und in eine nullter Ordnung, vierter Classe. Erstere umfasst alle durch die Tetraëderecken gehenden Geraden; letztere besteht aus allen Geraden in den Tetraëderebenen.

Eine Reihe anderweitiger Complexe zweiten Grades betrachtet Lie gelegentlich seiner Untersuchung über die Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum (diese Annalen Bd. V. S. 233); es sind alle diejenigen, welche in einer bestimmten Gleichungsform mit 17 Constanten enthalten sind; ihre Singularitätenflächen sind Linienflächen.

Bis jetzt indess sind diese specielleren Complexe noch nicht *systematisch* untersucht worden, wie diess im Folgenden geschehen soll. Indem ich von der Discussion der allgemeinsten Gleichung ausgehe, bei der im Ganzen 58 verschiedene Fälle zu unterscheiden sind, erhalte ich eine allmähliche und doch übersichtliche Abstufung.

Die meisten Flächen, die als Singularitätenflächen auftreten, sind allgemein bekannt. In vielen Fällen ist aber ihr Verhalten als Ordnungsfläche, Classenfläche und Brennfläche der singulären Linien sehr interessant.

Die Grundlagen und Hülfsmittel der Arbeit finden sich im ersten Theil eingehend auseinandergesetzt. Ich wende mich sodann (II—XII)

zur näheren Betrachtung der einzelnen Fälle in der Reihenfolge, wie sie sich aus dem im ersten Theile entwickelten algebraischen Eintheilungsprincipe ergeben. Sodann gebe ich noch im letzten Theile (XIII.) neben einigen allgemeinen Sätzen tabellarische Zusammenstellungen der Complexe nach verschiedenen Gesichtspunkten. Die eine, welche nach den auftretenden Singularitätenflächen ordnet, ist besonders eingehend ausgeführt.

I.

Grundlage der Arbeit, insbesondere die Eintheilung der Complexe.

Allgemeine Uebersicht.

In der Plücker-Cayley'schen Coordinatenbestimmung der Raumgerade wird diese als die Verbindungslinie zweier ihrer Punkte, resp. als die Schnittlinie zweier durch sie gehender Ebenen aufgefasst. Wenn in homogenen Coordinaten $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ und $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ zwei Punkte darstellen, so werden der durch sie bestimmten Geraden die folgenden sechs (homogenen) Coordinaten ertheilt:

$$p_{12} = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad p_{13} = y_1 z_3 - y_3 z_1, \quad p_{14} = y_1 z_4 - y_4 z_1,$$
$$p_{34} = y_3 z_4 - y_4 z_3, \quad p_{42} = y_4 z_2 - y_2 z_4, \quad p_{23} = y_2 z_3 - y_3 z_2.$$

Der folgende Ausdruck:

$$P \equiv p_{12} \cdot p_{34} + p_{13} \cdot p_{42} + p_{14} \cdot p_{23}$$

ist identisch Null, wenn für die p die oben stehenden Werthe eingeführt werden.

Diese Coordinatenbestimmung bietet oft grosse Vortheile, doch tritt in ihr nicht hervor, dass die Gerade als Raumelement angesehen wird. Das letztere erreichen wir sofort, wenn wir von den Gleichungen ganz absehen, welche die p mit den Punktcoordinaten verbinden. In diesem Falle ertheilen wir der Geraden sechs solche Grössen p, welche die Gleichung $P = 0$ erfüllen, als Coordinaten. — Das Gebiet der Grössen p ist ein fünffach unendliches, die Bedingungsgleichung $P = 0$ sondert aus demselben eine (quadratische) vierfach unendliche Mannigfaltigkeit aus, die geometrisch durch die Gesammtheit der Raumgeraden dargestellt ist.

Ein Complex wird dann bestimmt durch eine weitere (zu $P = 0$ hinzutretende) Gleichung in den p:

$$\Omega = 0.$$

Er besteht aus dreifach unendlich vielen Geraden.

Ist nun Ω in den p insbesondere vom zweiten Grad, so nennen wir den dadurch definirten Complex ebenfalls vom zweiten Grad. Da dieser der Gegenstand unserer Untersuchung ist, so haben wir zunächst von zwei simultanen homogenen und quadratischen Gleichungen $P = 0$,

$\Omega = 0$ zwischen sechs Variabeln auszugehen. Da wir uns durchaus auf projectivischem Standpunkt befinden, so dürfen wir die Coordinaten p beliebig so linear transformiren, dass die Form P in ein Multiplum ihrer selbst übergeht. Denn in seiner Inauguraldissertation*), fernerhin auch im zweiten Band dieser Annalen (S. 203 u. f.) hat Klein gezeigt, dass eine solche Transformation einer Collineation resp. einer dualistischen Umformung des Raumes entspricht (und umgekehrt). Wird diese Transformation auf alle möglichen Formen P, Ω angewandt gedacht, so ergiebt sich eine natürliche Eintheilung der Complexe. Wir werden weiter unten hierauf zurückkommen und merken uns einstweilen nur, dass Klein die Discussion der in der allgemeinen Gleichung $\Omega = 0$ enthaltenen Complexe auf ein algebraisches Problem zurückgeführt hat: *Es sollen zwei Formen zweiten Grades, homogen in sechs Variabeln, gleichzeitig auf eine kanonische Form gebracht werden.* Dieses Problem ist für den allgemeinsten Fall schon sehr frühe gelöst, zuerst wohl von Jacobi (im 2. Band von Crelle's Journal). Durch lineare Transformation bringt derselbe beide Formen auf *rein* quadratische; die Möglichkeit dessen setzt aber eben den allgemeinsten Fall voraus.

Sylvester**) geht von zwei *beliebigen* quadratischen Formen aus und betrachtet mit ihnen die Lagenbeziehungen der damit zusammenhängenden Orte zweiten Grades. Eine Determinantenbetrachtung führt ihn zu einer erschöpfenden Eintheilung, bei beliebiger Zahl von Variabeln. In dem allgemeinsten Fall hat man die von Jacobi entwickelte kanonische Form; in den speciellen Fällen gewinnt er sie dadurch geometrisch, dass er das Coordinatensystem passend wählt; für das binäre, ternäre und quaternäre Gebiet giebt er alle an. Für mehr Dimensionen giebt er nur noch die Anzahl der möglichen Fälle; dieselbe ist indess nur noch bei fünf Dimensionen richtig, bei mehr Dimensionen ist sie zu klein***). — Die Ableitung der kanonischen Formen in diesen Fällen wäre wohl nach seiner Methode nicht einfach.

Weierstrass†) löst das Problem in voller Allgemeinheit. Er geht von zwei bilinearen Formen mit n Variabeln aus und giebt für alle Fälle die kanonische Form. Die Gesetze wendet er dann auf die quadratischen Formen an. Er führt die Determinantenbetrachtungen von Sylvester weiter durch.

---

*) „*Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine kanonische Form.*" Bonn, 1868.

**) Phil. magazine 1851 pag. 119, 295, 415

***) Vrgl. a. a. O. pag. 139. Auch Lüroth hat in einer Arbeit, die wir noch weiter nennen werden (S. 153), einen Fall nicht aufgezählt.

†) Berliner Monatsberichte 1858, 1868.

Klein erörtert in seiner Inauguraldissertation, unter Zusammenfassung der Hauptresultate, insbesondere den Fall von sechs homogenen Variabeln und verwerthet ihn für die Eintheilung der Complexe zweiten Grades. Er betrachtet sodann ausführlicher den allgemeinsten Fall.

Bevor wir näher auf diese Eintheilung eingehen, sei noch Etwas erwähnt, was den geometrischen Vorgang der Transformation anbetrifft. — Unser altes Coordinatensystem, in der Coordinatenbestimmung der p, besteht aus den sechs speciellen Complexen $p = 0$, deren Directricen die Kanten eines „Fundamental-Tetraeders" bilden. Da eine lineare Verbindung von speciellen linearen Complexen aber in der Regel einen allgemeinen linearen erzeugt, so wird nach der Coordinatentransformation das Coordinatensystem aus sechs linearen Complexen bestehen, die nicht ausschliesslich specielle sein werden. Diese sechs Complexe, welche das Coordinatensystem bilden, wollen wir mit Klein die *„Fundamentalcomplexe"* nennen*).

Ueber die Transformation und die Eintheilung.

Werden die neuen Variabeln mit $x_1, x_2, \cdots x_6$ bezeichnet, so seien die Formen P und Ω in die folgenden übergegangen:

$$P_1 = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \qquad \Omega_1 = \Sigma b_{ik} x_i x_k,$$

(wo $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$ sein möge). Die Determinante von $\Omega_1 + \lambda P_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} + \lambda a_{11} & \cdots & b_{16} + \lambda a_{16} \\ \vdots & . & \vdots \\ b_{61} + \lambda a_{61} & \cdots & b_{66} + \lambda a_{66} \end{vmatrix}$$

ist es nun, auf die es ankommt; sie ist eine Invariante des betreffenden Complexes. Δ ist eine ganze rationale Function sechsten Grades in λ, also identisch mit:

$$A \cdot (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} \cdots$$

wo A die Determinante von P, λ_i aber eine $\nu_i$fache Wurzel von λ in $\Delta = 0$ bedeutet, so dass $\Sigma \nu_i = 6$ ist.

Es ist nothwendig, auch die Unterdeterminanten von Δ zu betrachten. Mit Δ' wollen wir irgend eine erste (fünfreihige) Unterdeterminante, mit Δ'' eine zweite (vierreihige) etc. bezeichnen. Diese $\Delta', \Delta'' \cdots$ sind zwar keine Invarianten, dagegen ist das simultane Verschwinden aller Δ', aller Δ'' etc., etwas Invariantes.

Der Factor $\lambda - \lambda_i$ von Δ soll nun in allen Δ' ν_i'mal, in allen Δ'' ν_i''mal etc. enthalten sein. Für diese Grössen gilt das Gesetz:

**) Vgl.: Diese Annalen, Bd. II. a. a. O.

$$\nu_i > \nu_i' > \nu_i'' > \cdots$$

Die Differenzen dieser Grössen:

$$e_i = \nu_i - \nu_i', \quad e_i' = \nu_i' - \nu_i'', \quad e_i'' = \nu_i'' - \nu_i''', \cdots$$

sind für uns von ganz besonderer Wichtigkeit. Für dieselben gilt, wie Weierstrass zeigt, zunächst das Folgende:

$$e_i \geqq e_i' \geqq e_i'' \geqq \cdots;$$

sie sind in dieser Reihenfolge der Grösse nach geordnet. Insbesondere ist:

$$(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} = (\lambda - \lambda_i)^{e_i} \cdot (\lambda - \lambda_i)^{e'_i} \cdots$$

In der ganzen Determinante ist nun $\lambda - \lambda_i$ $\nu_i$mal enthalten, in den Δ' noch ν_i'mal etc. Beim Uebergang von Δ zu den Δ' geht von $(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}$ der Factor $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ verloren. Es ist das ein Factor, der in gewissem Sinne an der Determinante Δ haftet. Geht man weiterhin von den Δ' zu den Δ'', so löst sich der Factor $(\lambda - \lambda_i)^{e'}$ als etwas nur an den Δ' haftendes ab, etc. — Dieses ist eine natürliche Zerlegung des $(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}$ in Factoren, und diese Factoren nennt man nach Weierstrass *„Elementartheiler"*.

Die Bedeutung der Elementartheiler wird durch das Folgende klar gestellt: Sind zwei Formenpaare P_1, Ω_1 und P_2, Ω_2, das eine durch lineare Transformation aus dem andern abgeleitet —, oder, soll das eine linear in das andre transformirbar sein, so müssen in beiden Paaren die Elementartheiler übereinstimmen. In unserer projectivischen Auffassung stellen die Formenpaare P_1, Ω_1 und P_2, Ω_2 demnach denselben Complex vor (diese Formen gleich Null gesetzt gedacht), wenn in den Determinanten beider die Vertheilung der Wurzeln und Elementartheiler dieselbe ist, und die absoluten Invarianten, das heisst also die Verhältnisse der Wurzeln, übereinstimmen. — Oder, mit andern Worten: Wir erhalten eine erschöpfende Aufzählung aller Complexe zweiten Grades, wenn wir in der Determinante Δ die Vertheilung der Wurzeln, und weiterhin die der Elementartheiler, auf alle möglichen Weisen annehmen.

Es ist nun nach dem Vorangehenden offenbar gleichgültig, ob wir erst die Vertheilung der Wurzeln λ_i in $\Delta = 0$ und dann innerhalb dessen die der Elementartheiler auf alle möglichen Weisen vornehmen, — oder ob wir das Umgekehrte thun. In jedem der beiden Fälle wird dieselbe Eintheilung erzielt. Für die Darstellung des Folgenden ist das letztere vortheilhafter.

Wir fanden vorhin, dass $\Sigma \nu_i = 6$, ferner dass $e_i + e_i' + \cdots = \nu_i$ ist. Hieraus ergiebt sich sofort: $\Sigma e_i^{(k)} = 6$. Die Zahl 6 lässt sich aber auf 11 verschiedene Weisen in Summanden zerlegen, und wir haben demnach vorerst 11 Gruppen von Complexen, dargestellt durch:

[111111], [11112], [1113], [1122], [114], [123], [222],
[15], [24], [33], [6]*);

[123] z. B. will sagen, es sei ein einfacher, ein zweifacher und ein dreifacher Elementartheiler vorhanden.

Hierauf denken wir die Elementartheiler entweder als zu sämmtlich verschiedenen, oder als zu theilweise gleichen Wurzeln, oder endlich als zu einer einzigen (sechsfachen) Wurzel gehörig. Zur Unterscheidung dessen empfiehlt sich die folgende Bezeichnung: Wenn ein $m$facher, ein $n$facher etc. Elementartheiler zu derselben Wurzel gehören, so klammern wir die betreffenden Zahlen ein und schreiben: $(m, n \cdot \cdot)$. Der Fall [123] z. B. wird also die folgenden 5 Möglichkeiten enthalten:

[123], [(12)3], [2(13)], [1(23)], [(123)].

Der Fall [2(13)] z. B. sagt uns, die Determinante Δ habe zunächst einen Factor $(\lambda - \lambda_1)$ zweimal, ferner einen weiteren Factor $(\lambda - \lambda_2)$ viermal, die Unterdeterminanten Δ' aber $(\lambda - \lambda_1)$ nicht mehr, dagegen $(\lambda - \lambda_2)$ noch einmal, die Δ'' etc. schliesslich keinen von beiden mehr.

Wenden wir in allen den elf oben angegebenen Fällen das an dem Beispiel [123] gegebene Verfahren in gleicher Weise an, so erhält man 58 wesentlich verschiedene Fälle, d. h.: *Im Sinne der projectivischen Geometrie giebt es 58 wesentlich verschiedene Complexe zweiten Grades.*

Eine vollständige Gleichung zweiten Grades zwischen sechs Variabeln enthält 21 Glieder. Mit Hülfe von $P = 0$ kann man in der eigentlichen Complexgleichung im Allgemeinen nur ein Glied fortschaffen. Mit Hülfe der Coordinatentransformation erreicht man jedoch eine weit stärkere Reduction der Gliederzahl. Das Problem, solche kurze, also bequeme Gleichungsformen für jeden Fall zu finden, ist, wie bereits angegeben, allgemein von Weierstrass gelöst. Wir wollen im Folgenden die Resultate dieser Transformationen in eine *„kanonische Form"* kurz zusammenstellen.

Zunächst hängt die kanonische Form lediglich ab von der Vertheilung der Elementartheiler; es giebt also ihrer 11. Aus den 11 Fällen, bei denen die Elementartheiler sämmtlich zu verschiedenen Wurzeln gehören, leiten wir alle andern durch Gleichsetzen der Wurzeln ab. Um aber die kanonischen Formen P und Ω für die erstern Fälle zu erhalten, behandeln wir zunächst jeden einzelnen Elementartheiler für sich.

Die Transformation von P, Ω machen wir uns an der Determinante Δ von $\lambda P - \Omega$ deutlich; sie ist ersichtlich damit identisch, die Hori-

*) Vgl. Klein, S. 37 der Inauguraldissertation.

zontal- und Verticalreihen von Δ gleichzeitig vermöge derselben Multiplicatoren zusammenzufügen, wobei sich der Werth der Determinante höchstens um einen Factor ändert. Die kanonische Form spiegelt sich dann in einer kanonischen Form von Δ ab*). Wir wollen diese Verhältnisse an einem einfachen Beispiel beleuchten. Betrachten wir den Fall [321]. In der Determinante nehmen wir das Quadrat, dessen Glieder den ersten drei Horizontal- und den ersten drei Verticalreihen gemein sind, für den ersten Elementartheiler. Das Quadrat, gebildet aus den gemeinsamen Gliedern der vierten und fünften Horizontal- und Verticalreihen, theilen wir dem zweifachen Elementartheiler, und das letzte Glied der Diagonale dem einfachen zu. Dann füllen wir in der folgenden Weise aus:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc|c}
0 & -1 & \lambda-\lambda_1 & & & \\
-1 & \lambda-\lambda_1 & 0 & & & \\
\lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & & & \\
\hline
& & & 1 & \lambda-\lambda_2 & \\
& & & \lambda-\lambda_2 & 0 & \\
\hline
& & & & & \lambda-\lambda_3
\end{array}\right|$$

Alle nicht besonders hingeschriebenen Glieder sind durch Nullen zu ersetzen. — Wir haben hier die kanonische Form der Determinante von $\lambda P - \Omega$; sie repräsentirt die kanonische Darstellung:

$$P \equiv 2x_1x_3 + x_2^2 \quad + 2x_4x_5 \quad + x_6^2$$
$$\Omega \equiv \lambda_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2\lambda_2 x_4 x_5 + \lambda_3 x_6^2 + 2x_1x_2 + x_4^2.$$

Das Verfahren in jedem andern Fall ist dem hier eingeschlagenen ganz analog. Man theilt jedem $k$fachen Elementartheiler ein in der Diagonale von Δ stehendes, $k$reihiges Quadrat zu und füllt dasselbe stets in derselben Weise aus. Wir unterlassen jede weitere Ausführung, indem wir auf die spätern Theile verweisen.

Zur geometrischen Interpretation.

Die Form P giebt uns sofort das Coordinatensystem resp. die sechs Fundamentalcomplexe. Nach Klein besitzt nämlich ein linearer Complex $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ eine Invariante, die mit den α geränderte Determinante von P. Wird in einem unserer kanonischen Fälle diese Ränderung ausgeführt, so erhält man stets für unsere Invariante eine solche Function in den α_i, wie es P in den x_i ist, also hat die Invariante für uns den Werth $P(\alpha)$. Ist dieser Ausdruck insbesondere Null, so

*) Wir geben also hier eine einfache Lösung des „chess board"-Problems von Sylvester. Vgl. a. a. O. S. 140, Note. Die im Texte entwickelte Darstellung wurde mir von Klein mitgetheilt.

kann man die α_i, da sie $P=0$ genügen, als Coordinaten einer Geraden auffassen. Der Complex ist dann ein specieller, indem seine Geraden sämmtlich die Gerade α treffen. Dies giebt die Entscheidung, ob ein Fundamentalcomplex ein allgemeiner oder ein specieller ist; für $x_k=0$ sind alle α bis auf α_k Null. Da nun ein beliebiges der x in P, die kanonische Form vorausgesetzt, nur einmal, also entweder als Quadrat oder im Doppelproduct vorkommt, so hat man die Regel: *Die Fundamentalcomplexe, die in P in Doppelproducten stehen, sind specielle, die andern allgemeine.*

Die Bedingung der *involutorischen Lage* zweier linearer Complexe ist ebenfalls von P abhängig. Seien $\Sigma\alpha_i x_i=0$, $\Sigma\beta_i x_i=0$ zwei solche, so haben sie eine simultane Invariante und zwar die einerseits mit den α, anderseits mit den β geränderte Determinante von P. Verschwindet diese Invariante, so liegen die Complexe in Involution; insofern insbesondre beide specielle sind, schneiden sich ihre Directricen. Als Anwendung auf die *Fundamentalcomplexe* ergiebt sich, dass ein solcher, der in P im Quadrat vorkommt, mit allen andern in Involution liegt. Kommt er im Doppelproduct vor, ist er also ein specieller, so liegt er nur mit dem nicht in Involution, der mit ihm im Doppelproduct vereinigt ist, resp. seine Directrix gehört allen andern Fundamentalcomplexen, ausser diesem einen, an.

Die singulären Linien des Complexes $P=0$, $\Omega=0$ werden bekanntlich aus ihm durch einen Complex $\Omega'=0$, der ebenfalls vom zweiten Grad ist, ausgeschnitten. Diese Form, Ω', soll auch im allgemeinen Fall angegeben werden; sie hängt von Ω sowohl als auch von P ab und ist:

$$\Omega' \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1 \partial x_6} & \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_6 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_6 \partial x_6} & \frac{\partial P}{\partial x_6} \\ \frac{\partial P}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P}{\partial x_6} & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Bezeichnung als Ω' soll beibehalten werden. — Die Complexe $\Omega+\mu\Omega'=0$ bilden insbesondere ein Büschel; alle haben die Congruenz der singulären Linien gemein. Bei Untersuchungen über diese sind also alle von ihnen gleichwerthig; die Anwendung dessen ist überall von grossem Vortheil. — Klein hat weiterhin aus dem Complex $P=0$, $\Omega=0$ alle diejenigen abgeleitet*), die mit ihm dieselbe Singularitätenfläche und das nämliche Verhalten der singulären Linien zu dieser überhaupt besitzen. Aus seiner Darstellung geht aber hervor,

*) Vgl. diese Annalen Bd. II., S. 224 (9).

dass alle diese Complexe dieselbe Elementartheiler- und Wurzelvertheilung haben, was die Zweckmässigkeit der von uns eingehaltenen Eintheilung hervortreten lässt.

Ein Complex zweiten Grades wird durch zwei simultane quadratische Gleichungen, also als Schnitt von zwei quadratischen Mannigfaltigkeiten (in einem „Raum von fünf Dimensionen") dargestellt. Ein solcher lässt sich daher in gewissem Sinn mit einer Raumcurve vierter Ordnung des gewöhnlichen Punktraumes vergleichen. In der That ist auch die Terminologie so weit ausgebildet, dass man den Complex zweiten Grades als Schnitt von zwei Flächen zweiten Grades in einem Raum von fünf Dimensionen bezeichnen kann. Von diesem Standpunkte aus stellt sich diese Arbeit neben diejenige von Lüroth: „Ueber Schnittcurven und gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen zweiten Grades."*) An Stelle der dort betrachteten, den beiden Flächen gemeinsamen Polarquadrupel, tritt hier das System der sechs Fundamentalcomplexe auf.

Mit der vorliegenden Untersuchung kann man noch folgende Ueberlegung verknüpfen, welche die Uebersicht bedeutend erleichtert. Kommen nämlich höhere als einfache Elementartheiler vor, so treten mit ihnen vielfache Complexgerade und vielfache Linien der Singularitätenfläche auf. Dasselbe tritt ein, wenn mehrere Elementartheiler zu einer Wurzel gehören. Dieselben höhern Elementartheiler und dieselben Verbindungen einfacher oder höherer ziehen aber in jedem Fall dieselben Folgerungen nach sich. Es entspringt hieraus eine wichtige, berechtigte Schlussweise, die an einem Beispiel erläutert werden soll. In dem Fall [1111(11)] werden zwei Doppelgerade, die sich nicht schneiden, auftreten. Dann hat man im Fall [11(11)(11)] nothwendig zwei Paare von Doppelgeraden, im Fall [(11)(11)(11)] drei solcher etc. Im zweiten Fall hat man ein windschiefes Vierseit, also im dritten Fall die sechs Kanten eines Tetraeders.

Diese Schlussweise wird durch den folgenden Satz vervollkommnet: *Eine mehrfache Complexgerade rechnet stets mehrfach als Axe und Strahl auf der Singularitätenfläche.* Nach Plücker**) ist nämlich eine Doppellinie des Complexes eine solche singuläre Linie, deren Punkte und (hindurchgehende) Ebenen sämmtlich singulär sind. Eine solche Linie liegt also auf der Singularitätenfläche; wir nehmen an, als μ facher Strahl, ν fache Axe, ferner mögen zu ihr δ Doppelpunkte und τ stationäre Ebenen gehören. Der Grad der Singularitätenfläche ist 4, es ist also $\mu + \delta + \nu + \tau = 4$. Es ist aber auch $\mu = \nu$, $\delta = \tau$, wenn sich,

*) Schlömilch's Zeitschrift 1867. Vgl. auch L. Painvin: Nouv. Annales de Math. 1868 (p. 103) und Sylvester a. a. O.

**) Vgl. Neue Geometrie, II., n. 307.

was meist eintritt, die Punkte und Ebenen der Geraden zum Complexe genau gleich verhalten. Es giebt das die Möglichkeiten $\mu = \nu = 1$, $\delta = \tau = 1$ und $\mu = \nu = 2$, $\delta = \tau = 0$ (oder umgekehrt). Man vergl. hierzu die einzelnen Fälle.

In den Coordinaten x kann man den zu einem Raumpunkt gehörigen Complexkegel nicht direct ausdrücken, wir erreichen dies durch Coordinatentransformation. Geht man nämlich zu den p_{ik}, also zu speciellen Fundamentalcomplexen zurück, so erhält man statt

$$\Omega_x = 0 : \Omega_p^* \equiv \Omega^*(y_i z_k - y_k z_i) = 0$$

wo y, z Punktcoordinaten sind. Hält man insbesondere den Punkt y fest, so giebt $\Omega^* = 0$ eine quadratische Gleichung in z, geometrisch einen Kegel 2. Ordnung vom Mittelpunkt y. Es ist dies der zu y gehörige Complexkegel. Zerfällt derselbe, so liegt y auf der Singularitätenfläche, und man erhält also die Punkte dieser Fläche durch Uebergang zu den p. Dieser Uebergang ist aber für alle, in einer kanonischen Form enthaltenen Fälle der nämliche. Er ist später für jede kanonische Form angegeben.

Bezüglich der angewandten Bezeichnung diene das Folgende. Die x bedeuten stets Liniencoordinaten, wenn nicht ausdrücklich eine andere Definition beigegeben ist. Die y und z werden stets Punktcoordinaten darstellen; die Ecken des zugehörigen Fundamentaltetraeders sind A_1, A_2, A_3, A_4, die Gegenseiten $y_1 = 0$ etc. Es ist dann $A_1 A_2$ eine Kante, die auch $y_3 = y_4 = 0$ genannt werden kann und welche Directrix des speciellen Complexes $p_{34} = 0$ ist.

II.

Erste kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0.$$

Die Elementartheiler sind alle gleich und zwar einfach. — In der oben stehenden Form von Ω gehören sie zu sämmtlich verschiedenen Wurzeln. Es ist das der Fall [111111] nach der angenommenen Bezeichnung, also der allgemeinste Complex zweiten Grades überhaupt. Seine Singularitätenfläche ist bekanntlich die „*Kummer'sche Fläche*" mit 16 Knotenpunkten und 16 Doppelebenen. Dieser Complex ist, besonders durch Klein, genau untersucht; wir gehen hier nicht weiter auf ihn ein*).

*) Zu diesem allgemeinen Fall gehört auch der Complex, dessen Singularitätenfläche eine Fresnel'sche Wellenfläche (Tetraedroid) bildet. Er hat keine Doppelgerade, während alle unsere Fälle solche besitzen. Für diesen Complex vgl. Battaglini: Giorn. di Mat. 1866, Aschieri: ebenda 1868, L. Painvin: Nouvelles Annales 1872. Er ist nach Klein dadurch charakterisirt, dass die 6 Wurzeln λ eine Involution bilden.

Indem die λ auf alle möglichen Weisen einander gleichgesetzt werden, erhält man alle die weiteren Fälle dieser Form. Die folgenden führen jedoch auf solche Complexe, die in zwei lineare zerfallen: [11(1111)], [1(11111)], [(11)(1111)], [(111111)], und zerfallende Complexe schliessen wir ein für allemal aus. Für den letzten Fall ist sogar $\Omega \equiv \lambda_1 P$, es ist also gar kein eigentlicher Complex.

Nach Ausschluss dieser fünf Complexe bleiben noch die folgenden *sechs:*

[1111(11)], [111(111)], [11(11)(11)], [1(11)(111)], [(11)(11)(11)], [(111)(111)].

Sie sollen in ebendieser Reihenfolge behandelt werden. — Die Form P geht offenbar in ein vielfaches der früheren in den Coordinaten p über bei folgender Substitution, wo $i = \sqrt{-1}$:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}, \qquad x_3 = p_{13} + p_{42}, \qquad x_5 = p_{14} + p_{23},$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \quad x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42}). \quad x_6 = \frac{1}{i}(p_{14} - p_{23}).$$

Diese Transformation, resp. die Auswahl eines solchen Coordinatentetraeders, ist auf 15 verschiedene Arten möglich. Eine genaue Darstellung giebt Klein*).

1. Den Fall *[1111(11)]* erhalten wir aus dem allgemeinsten dadurch, dass wir zwei der λ gleich setzen, z. B. $\lambda_2 = \lambda_1$. P hat immer noch die obige Form, dagegen ist jetzt:

$$\Omega \equiv \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0.$$

Da nun die Complexe $\Omega + \mu \cdot P = 0$ mit $\Omega = 0$ identisch sind, so können wir auch aus diesen, nur formal verschiedenen Complexen denjenigen herausgreifen, für welchen $\mu = -\lambda_1$. Wir haben dann die einfachere Darstellung:

$$\Omega \equiv \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0.$$

wo die λ gleich den um λ_1 verringerten, früheren λ sind.

Vier lineare Complexe haben bekanntlich im Allgemeinen zwei sich nicht schneidende Gerade gemein. So haben $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ die Geraden gemein, für welche $x_1 = 1$, $x_2 = \pm i$ ist**). Es sind das die Leitgeraden der Complexgruppe $x_1 \pm i x_2 = 0$, resp. von $p_{34} = 0$, $p_{12} = 0$. Diese beiden Geraden sind, wie die Form von Ω zeigt, doppelte Complexgeraden, nnd überhaupt ergiebt sich: *Zur Verbindung von zwei einfachen Elementartheilern gehören stets zwei sich nicht schneidende doppelte Complexgerade, die der Congruenz der singulären Linien vierfach zählend angehören.*

---

*) Vgl. insbesondere: Diese Annalen, Bd. II, S. 206.

**) Vgl. Klein, a. a. O., S. 206.

Das Verhalten einer solchen Doppelgeraden zum Complex ersieht man wohl am deutlichsten, wenn man die Complexfläche bildet, welche sie als Leitgerade hat. Wir fassen diese auf als gebildet durch alle Complexkegelschnitte in den Ebenen durch diese Gerade. Jeder dieser Kegelschnitte zerfällt nach Plücker in ein Punktepaar auf der Geraden. Für vier der Ebenen wird sich ein Doppelpunkt ergeben und diese vier Punkte geben die Complexfläche als Klassenfläche. Die vier, in gleicher Weise auftretenden Doppelebenen geben die Fläche als Punktgebilde*).

Die singulären Linien befriedigen neben $\Omega = 0$ auch noch die folgende Gleichung:

$$\Omega' \equiv \lambda_3^2 x_3^2 + \lambda_4^2 x_4^2 + \lambda_5^2 x_5^2 + \lambda_6^2 x_6^2 = 0.$$

Wir machen von ihr erst in späteren Fällen Gebrauch. Die Congruenz der singulären Linien zerfällt hier nicht.

Es handelt sich nun um die Singularitätenfläche. Dieselbe enthält zwei Doppelgerade, doch ist das Verhalten derselben zur Fläche nicht ohne Weiteres vorauszusagen, sondern es muss die Gleichung der Fläche abgeleitet werden. — Indem man zu den p_{ik} zurückgeht, wird aus $\Omega = 0$:

$$\lambda_3(p_{13}+p_{42})^2 - \lambda_4(p_{13}-p_{42})^2 + \lambda_5(p_{14}+p_{23})^2 - \lambda_6(p_{14}-p_{23})^2 = 0.$$

Fasst man die p_{ik} auf als $y_i z_k - y_k z_i$, so giebt diese Gleichung sofort den Complexkegel vom Punkte y in laufenden (Punkt-) Coordinaten z. Für den gesuchten Ort zerfällt dieser Kegel, also auch jeder ebene Querschnitt desselben. Als Schnittebene sei $z_1 = 0$ benutzt, die Coefficienten der Gleichung dieses Schnittes setzen sich quadratisch aus den y zusammen. Seine Discriminante ist also eine Function vom sechsten Grad in y, d. h.: Unser Ort ist eine Fläche sechsten Grades. — Der Complexkegel zerfällt für die Punkte der Ebene $z_1 = 0$ im Allgemeinen nicht. Doch besteht der betreffende Schnitt aus einem Geradenpaar. Diese Ebene ist desshalb von der oben angegebenen Fläche sechsten Grades auszuschliessen, und zwar doppelt zählend. In der That hat die oben bestimmte Gleichung den Factor y_1^2**). — Dieser Factor wird auch später immer wieder auftreten bei analoger Bestimmung des Ortes der singulären Punkte. — Indem wir ihn herausziehen, erhalten wir die eigentliche Singularitätenfläche:

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_3-\lambda_4)(y_1^2y_3^2+y_4^2y_2^2) + \lambda_3\lambda_4(\lambda_5-\lambda_6)(y_1^2y_4^2+y_2^2y_3^2)$$
$$+2\{\lambda_5\lambda_6(\lambda_3+\lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_5+\lambda_6)\}\,y_1y_2y_3y_4 = 0.$$

*) Neben Plücker vgl. die Habilitationsschrift von Pasch.

**) Vgl. Plücker a. a. O. n. 315, 186.

Das Coordinatensystem ist so gewählt, dass zwei seiner Kanten, $y_1 = y_2 = 0$ und $y_3 = y_4 = 0$ in die Doppelgeraden fallen. — Es ergiebt sich aus dieser Gleichung: *Die Singularitätenfläche ist die XI^te Gattung von Cremona's Linienflächen vierten Grades**). — Es ist leicht zu zeigen, dass sie auch die allgemeine Fläche dieser Art ist. — Auf jeder Doppelgeraden hat die Fläche vier Cuspidalpunkte, sie liegen hier paarweise harmonisch zu den Coordinatenecken. Durch solche vier Cuspidalpunkte sind drei Involutionen bestimmt, also ist diese Wahl des Coordinatensystems auf dreierlei Weise möglich. (Die vier Cuspidalpunkte der einen Doppelgeraden und die vier der andern sind einander auf bestimmte Weise zugeordnet, so dass die Wahl der Involution auf der einen Geraden auch die auf der andern nach sich zieht.) Und in der That kann man auch die vier Grössen x_3, x_4, x_5, x_6 dreimal in analoger Weise durch die p ausdrücken, wie es eben geschah. — Zu jeder Doppelgeraden gehören sowohl vier Cuspidalpunkte, als auch vier Cuspidalebenen. Die Doppelverhältnisse aus beiden sind für beide Doppelgeraden gleich. Insbesondere ist dies Doppelverhältniss gleich dem charakteristischen Doppelverhältniss jeder ebenen Curve dritter Ordnung der Fläche. Sie repräsentirt eine absolute Invariante der Singularitätenfläche und des Complexes überhaupt.

In jedem Punkt einer Doppelgeraden hat man zwei Büschel von Complexgeraden, die mit den dort stattfindenden Tangentenebenen der Fläche im Allgemeinen nicht übereinstimmen. Für jede Doppelgerade wird es viermal eintreten, dass eine der Tangentenebenen mit einer der Büschelebenen zusammenfällt. — Es giebt also unter den Erzeugenden der Fläche keine singulären Linien.

Beim Uebergang von der Kummer'schen Fläche zu dieser speciellen rücken die 16 Doppelebenen der ersteren paarweise in die Cuspidalebenen der letzteren, da die Cuspidalebenen die einzigen, nach (zerfallenden) Kegelschnitten berührenden Ebenen sind. Ebenso vereinigen sich je zwei Doppelpunkte der Kummer'schen Fläche hier in einen Cuspidalpunkt**).

Der allgemeinste Complex zweiten Grades hat *19 Constante*, dieser aber nur noch *17*, seine Singularitätenfläche 16. Dieser Fall geht also aus dem allgemeinsten durch zweifache Particularisation hervor.

Wenn man hier die Constanten λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 so verändert, dass

*) Man vergleiche hierzu die bekannte Abhandlung: „*Sulle superficie gobbe di quarto grado*", memorie dell' Accademia delle scienze, tomo VIII (serie 2ª).

**) Es mag hier ein für alle Mal auf die Arbeit von Kummer: „*Ueber die algebraischen Strahlensysteme etc.*", Abh. d. Berl. Akad., hingewiesen werden. Hier vgl. man insbesondere S. 71.

nie zwei einander gleich, und nie eine gleich Null wird, so erhält man stets Complexe, die zu [1111(11)] gehören. Die absolute Invariante von vorhin wird sich verändern. Ist z. B.

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_3+\lambda_4)=\lambda_3\lambda_4(\lambda_5+\lambda_6),$$

so fällt das Glied mit $y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot y_4\cdot$ weg. Bei der Singularitätenfläche fallen für jede Doppelgerade zwei Cuspidalstellen zusammen. Diese Fläche ist bestimmt durch die folgenden Linien als Leitlinien: Zwei Gerade und eine ebene Curve dritter Ordnung (ohne Doppelpunkt), die von den beiden Geraden in zweien ihrer Wendepunkte getroffen wird*).

2. Indem wir uns dem Fall *[111(111)]* zuwenden, setzen wir im vorigen Fall am einfachsten eines der λ, z. B. λ_3, Null. Es ergiebt sich dann:

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv \lambda_4x_4^2+\lambda_5x_5^2+\lambda_6x_6^2=0\\ \Omega' &\equiv \lambda_4^2x_4^2+\lambda_5^2x_5^2+\lambda_6^2x_6^2=0.\end{aligned}$$

Wir haben hier eine Regelschaar $x_4=x_5=x_6=0$ von doppelten Complexlinien. Jede derselben ist Doppellinie der Singularitätenfläche. Wir finden damit das Resultat: *Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zählende Fläche zweiter Ordnung, deren eine Erzeugung aus doppelten Complexgeraden resp. vierfachen singulären Linien besteht.*

Das Verhalten der *singulären Linien* ist in diesem Fall ein sehr eigenthümliches. *Die von ihnen gebildete Congruenz zerfällt in vier lineare.* Aus $\Omega=0$, $\Omega'=0$ ergeben sich nämlich die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{x_4^2}{x_5^2}=\frac{\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6)}{\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4)},\quad \frac{x_5^2}{x_6^2}=\frac{\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4)}{\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)},\quad \frac{x_6^2}{x_4^2}=\frac{\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)}{\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6)}.$$

Indem wir die Bezeichnung einführen:

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6):\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4):\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)=\alpha^2:\beta^2:\gamma^2,$$

erhalten wir:

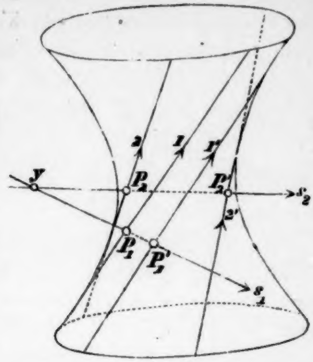
$$\frac{x_4}{\pm\alpha}=\frac{x_5}{\pm\beta}=\frac{x_6}{\pm\gamma}.$$

Es treten vier wesentlich verschiedene Zeichencombinationen auf, welche unsere vier Congruenzen ergeben.

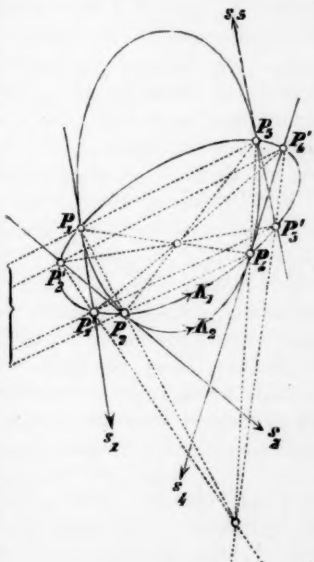
Die zu einer linearen Congruenz gehörigen, zweifach unendlich vielen Linien treffen stets zwei bestimmte Raumgerade, welche man die Directricen der Congruenz nennt. (Diese Directricen können auch unendlich nahe zu einander sein, oder sich schneiden.) In unserm Fall erhalten wir 8 Directricen, die paarweise eine Congruenz ergeben; insbesondere aber liegen sie sämmtlich auf der Singularitätenfläche,

*) Vgl. Cremona, a. a. O. § 12.

gehören jedoch nicht der Erzeugung an, die aus doppelten Complexgeraden besteht. Von ihnen fallen keine zwei zusammen. 1, 1′ seien die Directricen der ersten; 2, 2′; 3, 3′; 4, 4′ die der übrigen Congruenzen. Durch einen beliebigen Raumpunkt y geht an 11′ etc. je eine Transversale, es sind das die vier singulären Linien des Punktes y. Die Directricen 1, 2, 3, 4 sollen von diesen singulären Linien in den Punkten P_1, P_2; P_3, P_4 getroffen werden, die vier andern in P_1', P_2', P_3', P_4'. Von den Punkten P_1, P_1' etc. ist je einer der singuläre, es seien dies P_1, P_2, P_3, P_4. Dann sind die Ebenen durch diese singulären Linien und die Directricen 1′, 2′, 3′, 4′ die zugehörigen singulären Ebenen. Diese Trennung der 8 Directricen ist für alle Raumpunkte dieselbe. Wir sehen also, dass die *Brennfläche der singulären Linien sich in 8 Gerade aufgelöst hat, wovon vier erfüllt sind von singulären Punkten, die andern vier aber umhüllt von singulären Ebenen.*



In der obenstehenden Figur sind zwei Directricenpaare und die zugehörigen singulären Linien für den Punkt y verzeichnet. — In P_1 wird die singuläre Linie der ersten Congruenz die Singularitätenfläche berühren; die Fläche zweiten Grades wird dort durchsetzt (da sie aber doppelt zu zählen ist, kann man dies doch als Berührung auffassen). — Liegt der Punkt y insbesondere auf der Singularitätenfläche, so fallen die vier singulären Linien in eine zusammen. Wir sehen jetzt deutlich, dass die eine Erzeugung der Fläche aus vierfachen singulären Linien besteht*).



*) Vgl. die Habilitationsschrift von Pasch, insbesondere § 5. In unserm Fall würde die Fläche zweiter Ordnung, welche Singularitätenfläche ist, doppelt zählend als Brennfläche der (gesammten) singulären Linien auftreten.

In einer beliebigen Ebene habe man die vier singulären Linien s_1, s_2, s_3, s_4, diese Ebene treffe die 8 Directricen in P_1, P_2, P_3, P_4; P_1', P_2', P_3', P_4'; s_1 ist dann die Verbindungslinie von P_1 mit P_1', P_1 ihr singulärer Punkt. Der Kegelschnitt der 8 Punkte P: K_1 ist der Schnitt unserer Ebene mit der Singularitätenfläche; der Complexkegelschnitt K_2 derselben Ebene geht dann durch P_1, P_2, P_3, P_4 und tangirt in ihnen die Linien s. (Vgl. die Figur auf der vorstehenden Seite.) Die 8 Punkte P gruppiren sich in zwei Vierecke $P_1 P_2 P_3 P_4$ und P_1', P_2', P_3', P_4', welche dasselbe Diagonaldreieck haben. (Umgekehrt bilden stets die acht Ecken von zwei Vierecken mit gemeinsamem Diagonaldreieck eine dem entsprechende Figur.)

Wie für den Complexkegelschnitt erhält man auch für einen Complexkegel acht Elemente. Der Mittelpunkt sei y, so sind vier Erzeugende des Kegels die Transversalen σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 an die Directricenpaare 1 1′, 2 2′, 3 3′, 4 4′. Die Tangentialebenen längs diesen vier Erzeugenden (den vier singulären Geraden des Complexkegels) gehen ausserdem durch die Directricen 1′, 2′, 3′, 4′.

Dieser Complex ist durch dreifach unendlich viele Raumtransformationen in sich selbst überführbar. Jede solche Transformation muss die Singularitätenfläche (zweiten Grades) in sich überführen, insbesondere aber diejenige Erzeugung ganz unverändert lassen, welcher die acht Directricen angehören. Die Geraden der zweiten Erzeugung (die vierfach singulären Linien) schieben sich so fort, dass die von ihnen gebildete Erzeugung als Ganzes bestehen bleibt. Und das ist eben auf dreifach unendlich viele Weisen zu erreichen: je drei Geraden der Erzeugung können drei beliebige andere zugeordnet werden, und dann ist allemal eine Transformation völlig bestimmt. — Dass aber hiebei der Complex durchaus nicht verändert wird, folgt ganz einfach daraus, dass nach wie vor die Complexkegelschnitte und die Complexkegel für alle Ebenen, bez. Punkte des Raumes auf dieselbe Weise construirt werden, also identisch sind. — Der Complex hat *14 Constante.* Zwei von ihnen sind *absolute Invarianten*, da der Complex dreifach unendlich viele Transformationen in sich hat. Dieses sind die beiden absoluten Invarianten, welche den fünf Erzeugenden zukommen, die den Complex bestimmen.

3. Werden im ersten Fall (S. 155) irgend zwei der Grössen λ gleichgesetzt, so erhält man den durch *[11(11)(11)]* dargestellten Fall. Es sei $\lambda_4 = \lambda_3$ gewählt, so hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_3 (x_3^2 + x_4^2) + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0\,.$$

$$\Omega' \equiv \lambda_3^2 (x_3^2 + x_4^2) + \lambda_5^2 x_5^2 + \lambda_6^2 x_6^2 = 0\,.$$

Der Vergleich mit dem Fall [1111(11)] (S. 155) zeigt, dass zwei

Paare von sich nicht schneidenden Doppelgeraden auftreten. Die Geraden des ersten Paares werden jedoch die des zweiten treffen. Die Formeln ergeben nämlich durchgehends die Regel: *Ist p_i eine doppelte Complexgerade, herrührend von einer vielfachen Wurzel λ_i, p_k eine solche, die mit einer weiteren vielfachen Wurzel λ_k auftritt, so schneidet die Gerade p_i die Gerade p_k.*

Der Rückblick auf [1111(11)] sagt weiter, dass die Geraden unseres doppelten windschiefen Vierseits für die Singularitätenfläche gewöhnliche Doppelstrahlen und Doppelaxen sind. Dann hat man aber nothwendig das Folgende:

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiter Ordnung, die zwei Linien jeder Erzeugung (ein windschiefes Vierseit) gemein haben.

Unser Resultat wird bestätigt durch die Gleichung der Singularitätenfläche. Indem wir die Grösse $\frac{2\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3(\lambda_5+\lambda_6)}{\lambda_3(\lambda_5-\lambda_6)}$ mit C bezeichnen, ergiebt sich für dieselbe:

$$(1)\qquad \left(y_1y_4+(C+\sqrt{C^2-1})y_2y_3\right)\left(y_1y_4+(C-\sqrt{C^2-1})y_2y_3\right)=0.$$

Die beiden Flächen bezeichnen wir mit F_1 und F_2. Die ihrer Unterscheidung entsprechende Trennung der singulären Linien ergiebt sich folgendermassen. Aus den beiden Gleichungen

$$\Omega = 0, \qquad \Omega' = 0$$

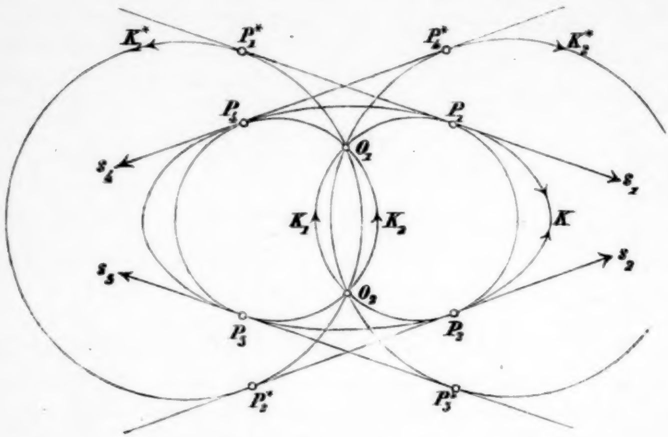
lässt sich insbesondere die zerfallende ableiten:

$$(2)\qquad \Omega' - \lambda_3\Omega \equiv (x_5 + \alpha x_6)(x_5 - \alpha x_6) = 0\,,$$

(wo $\alpha = i\sqrt{\frac{\lambda_6(\lambda_6-\lambda_3)}{\lambda_5(\lambda_5-\lambda_3)}}$). *Die singulären Linien bilden also zwei Congruenzen zweiten Grades.* — Es ist einleuchtend, dass die eine Congruenz den Tangenten von F_1, die andere denen von F_2 angehört.

Aber in diesem Falle können wir auch die *vollständige Brennfläche* der Congruenz der singulären Linien angeben, für welche die Singularitätenfläche nur einen Theil bildet. Ersichtlich besteht dieselbe überdiess noch aus denjenigen beiden Flächen zweiten Grades F_1^* und F_2^*, welche aus F_1 und F_2 durch die dualen Umformungen hervorgehen, welche durch die mit ihnen bez. zusammengehörigen linearen Complexe (2) gegeben sind. *Diese beiden Flächen enthalten ebenfalls die vier Doppelgeraden des zu untersuchenden Complexes; die Congruenz vierten Grades der singulären Linien besteht aus einem quadratischen Theile derjenigen Congruenz vierten Grades, welche F_1 und F_1^* umhüllt, und aus einem eben solchen Theile der Congruenz vierten Grades, welche F_2 und F_2^* umhüllt.*

Die nebenstehende Figur soll diese Verhältnisse durch einen ebenen Schnitt zur Anschauung bringen. K_1, K_2, K_1^*, K_2^* gehören F_1, F_2, F_1^*, F_2^* an. Die Grundpunkte des Büschels, dem diese vier Kegelschnitte angehören, sind O_1, O_2 und die Kreispunkte der Ebene; s_1, s_2, s_3, s_4 sind die singulären Geraden der Ebene, K der Complex-

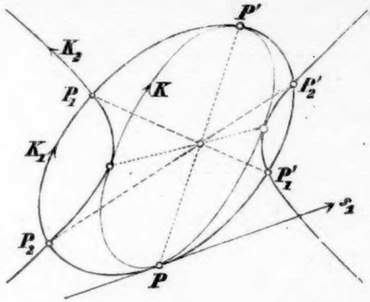


kegelschnitt. Die andern Tangenten, die K_1 und K_1^* gemein sind, gehören der quadratischen Congruenz ($F_1\ F_1^*$) an, die hier nicht in Frage kommt etc. — Die Figur zeigt deutlich, wie K_1 und K_2 vor K_1^*, K_2^* bevorzugt sind und zwar dadurch, dass sie vom Complexkegelschnitt berührt werden. *Ebenso sind die Flächen F_1 und F_2 dadurch vor F_1^* und F_2^* bevorzugt, dass nur sie von den Complexkegelschnitten berührt werden.*

Wie der vorige Complex kann auch dieser auf eine ganz einfache Weise erzeugt werden. — Die Singularitätenfläche F_1, F_2 bestimmt den Complex nicht, sondern erst einfach unendlich viele Complexe. Nimmt man eine beliebige Raumgerade als Complexgerade hinzu, so erhält man noch vier Complexe. Denn in einer beliebigen Ebene durch diese Gerade giebt es noch vier Kegelschnitte, welche sie und den Schnitt mit F_1 und F_2 je zweimal berühren. Wählt man einen von ihnen als Complexkegelschnitt aus, so finden sich weitere Complexkegelschnitte eindeutig durch Drehung um eine seiner Tangenten, resp. um eine der schon bekannten Complexlinien.

Ist insbesondere eine singuläre Complexgerade s_1 gegeben, die F_1 berühren mag, so ist der Complex eindeutig bestimmt und seine Construction viel einfacher. Man lege wieder durch s_1 eine Ebene (vgl. neben-

stehende Figur), sie schneide F_1 in K_1, F_2 in K_2. Die Schnittpunkte von K_1 mit K_2: P_1, P_1', P_2, P_2' sind die Schnittpunkte der Ebene mit dem Vierseit, das F_1 und F_2 gemein ist. (Dabei seien P_1 und P_1' die Schnittpunkte mit zwei Gegenseiten dieses Vierseits, ebenso P_2 und P_2'.) Es giebt zunächst drei Kegelschnitte, welche K_1 im Berührungspunkt P mit s_1 und einem weitern Punkt, ebenso K_2 in zwei Punkten berühren; von ihnen ist jedoch nur einer als Complexkegelschnitt der Ebene zulässig. Verbinde ich nämlich P mit einem Diagonalpunkt des Vierecks $P_1\,P_1'\,P_2\,P_2'$ und schneide K_1 mit dieser Linie, so giebt es je einen Kegelschnitt, welcher K_1 in P und in diesem Schnittpunkt,



so wie auch K_2 zweimal berührt. Aber es ist einer der Diagonalpunkte ausgezeichnet, nämlich der Schnittpunkt der Geraden $\overline{P_1\,P_1'}$, $\overline{P_2\,P_2'}$ (weil P_1, P_1' die Schnittpunkte mit dem einen, P_2, P_2' die mit dem andern Gegenseitenpaar des windschiefen Vierecks sind). Wird er bei der Construction verwandt, so erhält man den Complexkegelschnitt. — Durch Drehung der Ebene um alle Tangenten dieses eben construirten Kegelschnittes erhält man durch diese, resp. die vorige Construction alle Complexgeraden.

Es lässt dieser Complex einfach unendlich viele Transformationen in sich selbst zu. Eine Abzählung würde in der That ergeben, dass er *15 Constante* hat, aus denen sich eine absolute Invariante zusammensetzen lässt. Diese Transformationen sind besonders einfach und geben eine directe Anschauung von den singulären Linien.

Für den allgemeinen Complex zweiten Grades hat Klein*) die Aufgabe gelöst, in der Congruenz der singulären Linien je einfach unendlich viele (consecutive) zu Developpabeln zusammenzufassen. Jede singuläre Gerade wird nämlich von zwei andern, unendlich nahen, geschnitten**). Geht man also von einer beliebigen aus, so erhält

*) Diese Annalen Bd. V, S. 296.

**) Vgl. die schon erwähnten Arbeiten von Kummer und Pasch.

man diese Developpabeln durch Aneinandersetzung solcher sich schneidender, consecutiver. Um die endliche Gleichung herzustellen, ist eine Differentialgleichung zu integriren, die auf hyperelliptische Integrale führt. — In diesem speciellen Fall gestaltet sich diese Sache etwas anders, jedenfalls aber bedeutend einfacher. Den Uebergang von einer solchen singulären Linie zur nächsten können wir nämlich als eine unendlich kleine Raumtransformation*) auffassen resp. darstellen, welche den ganzen Complex in sich selbst überführt. Die auftretenden Integrationen sind besonders einfach.

Um später die Gleichung der Developpabeln, resp. deren Rückkehrgeraden, in Punktcoordinaten schreiben zu können, soll zunächst unser Problem in den Coordinaten p_{ik} gelöst werden. (Klein benutzt n seiner Arbeit andere Coordinaten, die wir weiterhin ebenfalls anwenden wollen.) — Für die singulären Linien haben wir die Gleichungen (2) abgeleitet. Die dort auftretenden linearen Complexe schreiben wir in der Form:

$$(3) \qquad a p_{14} + b p_{23} = 0$$

(wo $a = 1 \pm \frac{\alpha}{i}$, $b = 1 \mp \frac{\alpha}{i}$). In der Annahme dieser Form liegt enthalten, dass wir uns nur mit der einen und nicht gleichzeitig mit beiden Congruenzen zweiten Grades beschäftigen. Es ist das erlaubt, da sich beide genau gleich verhalten. — Ausser der Gleichung (3) genügen die singulären Linien auch noch $\Omega = 0$, oder $\Omega' + \lambda\Omega = 0$. Indem man zu den p_{ik} übergeht und λ in der richtigen Weise wählt, erhält man insbesondere die Gleichung:

$$2\lambda_5\lambda_6 p_{12}p_{34} + (2\lambda_5\lambda_6 + \lambda_3(\lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_3))p_{13}p_{42} = 0$$

oder

$$\alpha p_{12}p_{34} + \beta p_{13}p_{42} = 0.$$

Dieser Complex ist ein *tetraedraler*; er ist auf S. 169 behandelt als Fall [(11)(11)(11)]. — Für die singulären Linien (für die eine Congruenz) haben wir also:

$$(4) \qquad a p_{14} + b p_{23} = 0, \quad \alpha p_{12} \cdot p_{34} + \beta p_{13} \cdot p_{42} = 0.$$

Sei y ein Punkt der Singularitätenfläche, so geht durch ihn eine bestimmte singuläre Linie. Dieselbe verbindet ihn mit dem ihm unendlich nahen Punkte $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$, der in der Tangentialebene der Singularitätenfläche liegt und dessen Coordinaten die Werthe haben:

$$\varrho z_1 = y_1, \quad \varrho z_2 = y_2(1 + \sqrt{\beta}\,d\sigma), \quad \varrho z_3 = y_3(1 - \sqrt{\alpha}\,d\sigma),$$
$$\varrho z_4 = y_4(1 + (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})\,d\sigma),$$

*) Ueber solche unendlich kleine Transformationen von Gebilden in sich selbst vergleiche man *„sur une certaine famille de courbes et de surfaces"* par Klein et Lie, Comptes rendus, 1870; sowie diese Annalen t. IV, S. 50 ff.

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor, $d\sigma$ eine unendlich kleine Strecke. — Die Zunahmen der Coordinaten sind also bezüglich:

$$dy_1 = 0\,, \quad dy_2 = \sqrt{\beta}\,d\sigma\,, \quad dy_3 = -\sqrt{\alpha}\,d\sigma\,, \quad dy_4 = (\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})\,d\sigma\,.$$

Durch sie gelangen wir zu z, von z gehen wir zu $z + dz$ etc. Die Zusammensetzung dieser Punkte giebt die continuirliche Curve:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A : B\lambda^{\sqrt{\beta}} : C\lambda^{-\sqrt{\alpha}} : D\lambda^{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\,,$$

deren sämmtliche Tangenten singuläre Complexgeraden sind. — Die Constanten $A : B : C : D$ unterliegen einer Bedingungsgleichung, welche aussagt, dass diese Curve auf der richtigen Fläche $y_1 y_4 + \mu\, y_2 y_3 = 0$ liege. (Am einfachsten setzt man dabei $\lambda = 1$, nimmt also den Punkt $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A : B : C : D$ als Anfangspunkt der Raumtransformationen, die alle die Flächen μ in sich transformiren.)

Ersichtlich ist die Art der Curven nur von α und β abhängig. Aendern sich dann noch die A, B, C, D, so erhält man nur zweifach unendlich viele, im Allgemeinen gleich beschaffene Curven, von denen durch jeden Raumpunkt eine geht. — Ist das Verhältniss

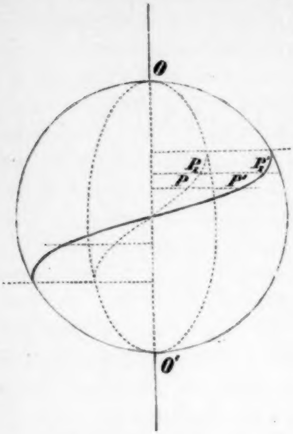
$$1 : \sqrt{\beta} : -\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$$

rational, so sind die Curven *algebraisch*. Ist das Verhältniss dagegen *incommensurabel*, so sind sie *transcendent*. So erhält man z. B. für $\beta = 1$, $\alpha = 4$ die Raumcurven dritter Ordnung, dargestellt durch $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A\lambda^2 : B\lambda^3 : C : D\lambda$.

Wenn eine gewisse metrische Specialisirung, welche der Allgemeinheit durchaus keinen Eintrag thut, angewandt wird, erhält man eine bequeme Anschauung der gemachten Transformationen, sowie der Curven. Für F_1 und F_2 nehmen wir nämlich zwei Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe und vereinigten Polen. (Dieselben mag man sich entstanden denken durch Rotation von zwei Kegelschnitten, die eine ihrer Axe vollständig, Grösse und Lage nach, vereinigt haben.) In den Polen O und O' gehen für beide Flächen die Erzeugenden nach den Kreispunkten der dort gemeinsamen Tangentialebenen. Die Flächen haben also vier gemeinsame Erzeugende, die sich paarweise in O, O' und in zwei Kreispunkten treffen.

Wir denken OO' vertical (vgl. die Figur), die eine Fläche als Ellipsoid, die andere als Kugel. Die Transformationen dieser Flächen in sich selbst setzen sich aus Rotationen um die gemeinsame Axe OO' und um deren in Bezug auf die Flächen conjugirte Gerade, die unendlich ferne Horizontale, zusammen. Im erstern Fall hat man, wenn man nur reelle Ebenen in's Auge fasst, weiter keine Einschränkung, jedoch im letztern. Diese verschieben nämlich alle

Horizontalebenen unter sich, dürfen aber unter ihnen die durch O und O' gehenden nicht verändern. Man überzeugt sich, dass hiebei auch das Vierseit der gemeinsamen Erzeugenden unverändert bleibt.



Ein Punkt P der innern Fläche sei fixirt. Dreht man seinen Meridian unendlich wenig, so bewegt er sich horizontal auf seinem Parallelkreis. Unsere Curvengleichung giebt dann für ihn eine Bewegung in dem neuen Meridian, so dass er nach P_1 kommen möge. Dann bewegen sich alle Raumpunkte analog. Jeder dreht sich um denselben Winkel horizontal wie P und stellt sich dann in dieselbe Verticalebene ein wie P_1 (ferner bleibt er in der Fläche des Büschels, die durch ihn bestimmt ist). Der Punkt P' z. B. auf der Kugel, der mit P in derselben Parallelkreis- und Meridianebene liegt, bewegt sich nach P_1', so dass diese Beziehung zu P_1 dieselbe ist wie vorhin die von P' zu P. Beschreibt P eine von den singulären Linien umhüllte Curve, so thut das auch P'; die Figur giebt hiervon ein Bild.

Sind unsere Curven algebraische Raumcurven von ungerader Ordnung, so werden sie in diesem Fall stets imaginär. Sind dieselben transcendent, so werden sie sich im Allgemeinen um die Punkte O und O' unendlich oft herumwinden. Ein bekanntes Beispiel einer solchen ist die Loxodrome auf der Kugel, welche überall die Meridiane unter constantem Winkel trifft (vgl. hier insbesondere die angeführte Arbeit von Klein und Lie, sowie auch Plücker, Neue Geometrie, S. 61. Note).

Sehr einfach stellen sich diese Loxodromen in Liniencoordinaten dar. Wir nehmen wieder die eine Congruenz der singulären Linien und schreiben sie in der Form:

$$p_{13} \cdot p_{42} = K p_{14} p_{23}$$
$$p_{14} = A p_{23}$$

(vgl. die Formeln (4)). Wir führen jedoch statt der p_{ik} andere Coordinaten ein. Es ist nämlich möglich, eine Gerade durch vier Parameter auszudrücken, die wir mit A, B, C, K bezeichnen mögen und welche zu den p_{ik} in der folgenden Beziehung stehen:

$$A = \frac{p_{14}}{p_{23}}, \quad B = \frac{p_{12}}{p_{34}}, \quad C = \frac{p_{13}}{p_{42}}, \quad K = \frac{p_{13} \cdot p_{42}}{p_{14} \cdot p_{23}}.$$

Ist eine Gerade p gegeben, so sind die Grössen A, B, C, K eindeutig bestimmt, dagegen ist das Umgekehrte nicht der Fall. Sind nämlich die Werthe der vier Parameter bekannt, so ist die gesuchte Gerade der Schnitt von drei linearen Complexen und einem tetraedralen, oder der Schnitt des tetraedralen mit der Erzeugung (A, B, C) einer Fläche zweiten Grades. Es werden also vier sich nicht schneidende Gerade dargestellt, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen.

Eine solche Coordinatenbestimmung wurde zuerst von Klein eingeführt*). Die einfach unendliche Complexschaar, die dazu verwandt wird, nennt man ein *Involutionssystem* (das unsrige ist nicht das allgemeine). Seine wesentlichen Eigenschaften sind die folgenden: Eine jede Raumgerade wird durch einen Parameter im vierten Grad bestimmt, so dass also durch sie vier Complexe der Schaar gehen. Diese vier liegen paarweise in Bezug auf die Gerade in Involution.

In unserm Fall sind nun A und K zwei constante Grössen, und die zweifach unendlich vielen Geraden der Congruenz sind durch zwei Parameter, B und C, dargestellt. — Es ist nothwendig, die p_{ik} durch die vier Parameter auszudrücken. Es ergiebt sich:

$$\begin{aligned} p_{12} &= \pm\sqrt{-AB(1+K)}\,, & p_{34} &= \pm\sqrt{-\frac{A}{K}(1+K)}\,, \\ p_{13} &= \pm\sqrt{AKC}\,, & p_{42} &= \pm\sqrt{\frac{A}{K}C}\,, \\ p_{14} &= A\,, & p_{23} &= 1\,. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen in p_{12} und p_{34} ändern sich zusammen, ebenso in p_{13} und p_{42}. — Es sind alle Linien singulär, für welche A und K die gegebenen Werthe haben. Wir sehen daher A und K fortan als constant an. — Zunächst ist die Bedingung, dass die Gerade p_{ik} und die unendlich nahe $p_{ik} + dp_{ik}$ sich schneiden, die folgende:

$$dp_{12} \cdot dp_{34} + dp_{13} \cdot dp_{42} + dp_{14} \cdot dp_{23} = 0\,.$$

Nun benutzen wir die obigen Formeln zwischen den p und den vier Parametern und drücken aus, dass die Geraden A, B, C, K und $A, B + dB, C + dC, K$ sich schneiden. Es ergiebt sich ohne Weiteres:

$$(1 + K)\left(\frac{dB}{B}\right)^2 - K\left(\frac{dC}{C}\right)^2 = 0\,.$$

Indem wir integriren, fassen wir unendlich viele singuläre Linien zusammen, die eine Developpable bilden. In unseren neuen Coordinaten hat diese die Gleichung:

---

*) Vgl. „*Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*" diese Annalen Bd. V, S. 272.

$$B = cC^{\pm\sqrt{\frac{\kappa}{1+\kappa}}},$$

wo c eine willkürliche Constante. Für jeden Werth c hat man eine Developpable dargestellt; man erhält sie alle, wenn man c von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändert.

4. In dem Falle [111(111)], S. 158, bestand die Singularitätenfläche doppelt zählend aus einer Fläche zweiten Grades, und die singulären Linien bildeten vier lineare Congruenzen etc. Wenn noch zwei einfache Elementartheiler zu einer Wurzel gehören, also für *[1(11)(111)]*, so treten noch zwei Doppelgerade auf. Es fallen dann je zwei Congruenzen in eine specielle zusammen, wie wir sehen werden*). — Wir haben zunächst:

$$\Omega \equiv \lambda_4 (x_4^2 + x_5^2) + \lambda_6 x_6^2 = 0,$$
$$\Omega' \equiv \lambda_4^2 (x_4^2 + x_5^2) + \lambda_6^2 x_6^2 = 0.$$

Die Regelschaar $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ besteht aus doppelten Complexgeraden, die vierfache singuläre Linien sind. — Die Congruenz singulärer Linien ist:

$$(x_4 + i x_5)(x_4 - i x_5) = x_6 = 0.$$

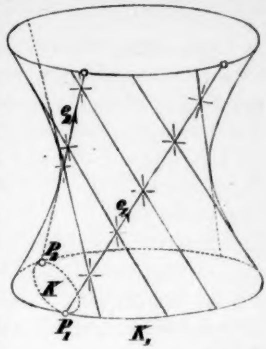
Die Complexe $x_4 + i x_5 = 0$ und $x_4 - i x_5 = 0$ sind aber specielle, nämlich: $p_{23} = 0$ und $p_{14} = 0$. Ihre Directricen schneiden die vorige Regelschaar von doppelten Complexgeraden. Mit $x_6 = 0$ ergeben diese Complexe offenbar zwei specielle lineare Congruenzen. Auf diese Weise finden wir: *Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zu zählende Fläche zweiter Ordnung. Ihre eine Erzeugung besteht aus vierfachen singulären Linien. Von der andern Erzeugung sind zwei: e_1, e_2, ausgezeichnet, indem alle Tangenten der Fläche, welche irgend eine von ihnen treffen, doppelte singuläre Linien sind.*

Die Fläche als Brennfläche der singulären Linien hat sich in zwei Erzeugende der Singularitätenfläche zusammengezogen. In denselben berühren Complexkegel und Complexkegelschnitte diese Fläche. In der Figur auf S. 169 sind diese einfachen Verhältnisse dargestellt. In einer Schnittebene ist K der Complexkegelschnitt, K_1 der Schnitt mit der Fläche zweiter Ordnung.

Sind die Singularitätenfläche F und die beiden Erzeugenden e_1 und e_2, welche die Directricen der beiden Congruenzen singulärer Linien sind, gegeben, so ist der Complex noch nicht bestimmt, sondern es sind noch unendlich viele möglich. Ich lege nämlich eine

*) Es ist sehr leicht, den Vergleich weiter zu führen, besonders an der Hand der Figuren auf S. 159. Man stelle sich vor, die Geraden s_1 und s_2 fallen zusammen, anderseits auch s_3 und s_4.

Schnittebene (vgl. die Figur), welche aus F den Kegelschnitt K, aus e_1 und e_2 die Punkte P_1 und P_2 schneidet. Dann habe ich in dieser Ebene ein Kegelschnittbüschel (mit den doppelten Grundpunkten P_1 und P_2); jeder Kegelschnitt desselben kann als Complexkegelschnitt gewählt werden. Die Wahl desselben entspricht der Festsetzung des Werthes einer absoluten Invariante des Complexes. Ist der Kegelschnitt gewählt, so ist *die Erzeugung des Complexes* sehr einfach. Ich drehe eine Ebene je um eine der Tangenten dieses Kegelschnittes und habe in jeder Ebene für den darin liegenden Complexkegelschnitt fünf Tangenten gegeben. Hierdurch wird auch eine gewisse Anschauung des Complexes erzielt. — Ferner ergiebt sich aus der Construction, dass der Complex 12 Constante hat, von denen eine absolute Invariante ist. Hieraus ergiebt sich, dass der Complex durch vierfach unendlich viele Transformationen in sich übergeht.



5. Für den Fall *[(11)(11)(11)]* kann man die Gestalt der Singularitätenfläche leicht übersehen. Im Vergleich mit früheren Fällen (n. 1. und 3.) zeigt es sich, dass sechs Doppelgerade vorhanden sind, nämlich die Kanten eines Tetraeders. *Dieses Tetraeder ist selbst die Singularitätenfläche* und dann folgt auch sofort: *Die Seitenflächen des Tetraeders sind gebildet von singulären Punkten und seine Ecken umhüllt von singulären Ebenen.* Es ist dies der bekannte *tetraedrale Complex**).

Die Ecken und Seitenflächen des Tetraeders sind Ausnahme-Punkte und Ebenen etc. — Die allgemeine Gleichung eines solchen Complexes in den Coordinaten p_{ik} ist:

$$\Omega \equiv a p_{12} \cdot p_{34} + b p_{13} \cdot p_{42} + c p_{14} \cdot p_{23} = 0\,.$$

Die Complexgeraden treffen das Tetraeder unter constantem Doppelverhältniss, welches eine absolute Invariante des Complexes ist. Das Tetraeder selbst hat 12 Constante, der Complex ist durch dasselbe und durch die absolute Invariante völlig bestimmt, hat also 13 Constante. Dreifach unendlich viele *Raumtransformationen führen den Complex in sich selbst über.* (In Punktcoordinaten sind diese Transformationen: $y_i' = a_i y_i$) **).

---

*) Vgl. Chasles, Reye, Müller, Lie.

**) Dieser Complex kann insbesondere (vgl. Lie in den Göttinger Nachrich-

6. Der letzte Fall in dieser kanonischen Form, den wir betrachten, ist *[(111)(111)]*. Er ist dargestellt durch:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_4 (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) = 0 .$$

Mit Hülfe von $P = 0$ kann man in $\Omega = 0$ das eine oder das andere Glied fortschaffen und sieht, dass von einer Fläche zweiten Grades beide Erzeugungen vierfache singuläre Linien sind. Diese Fläche bildet doppelt zählend die Singularitätenfläche. Jeder ihrer Punkte ist Doppelpunkt des Complexes; es gehören alle ihre Tangenten dem Complexe an: *Der Complex besteht aus allen Tangenten einer Fläche zweiten Grades*); er ist ein specieller. Die Erzeugenden sind doppelte Complexgeraden; er hat 9 Constante.*

Ein specieller Complex besteht immer aus den Geraden, die eine Fläche umhüllen**), wobei Curven und Developpable gleichmässig mit zu den Flächen gezählt werden müssen. Jede seiner Geraden ist singulär etc.

III.

Zweite kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\, x_5 x_6 = 0$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + 2\, \lambda_5 x_5 x_6 + x_5^2 = 0.$$

In dieser kanonischen Form kommen *vier einfache und ein zweifacher Elementartheiler* vor. Mit dem doppelten Elementartheiler tritt eine Doppelgerade auf. In dem allgemeinsten Fall [11112] ist sie die einzig vorhandene; dieser Complex steht von unsern 48 Complexen

---

ten 1870) auf folgende Weise erzeugt werden: Man wendet auf eine bestimmte Raumgerade dreifach unendlich viele lineare Raumtransformationen an, die unter sich vertauschbar sind und die ein vollständiges Tetraeder in sich überführen; der Ort der Geraden ist ein tetraedraler Complex. Dieser Process giebt auch dann noch irreducible Complexe zweiten Grades, wenn von den Tetraederebenen beliebig welche zusammenfallen. Wir erhalten auf diese Weise *vier directe Ausartungen des tetraedralen Complexes.* — Fallen *zwei* Ebenen zusammen, so hat man den Fall [(11)(22)], n. 29. Sind *drei* vereinigt, so wird [(33)], n. 47. erzeugt; bei *vier* zusammengefallenen [(123)], n. 38. Sind endlich die vier Ebenen *paarweise* identisch, so erscheint [(11)(112)], n. 14. Der erste Fall kommt in der That in der Mechanik als Ausartung des tetraedralen vor. — Das Tetraeder ist auch bei den ausgearteten Fällen immer noch die Singularitätenfläche.

Auf diese letzteren Complexe wurden Klein und Lie bei Gelegenheit von Untersuchungen über unendlich kleine Transformationen von Gebilden in sich selbst geführt, die sie im Auszuge in den Comptes rendus 1870 veröffentlicht haben. Von Herrn Klein erhielt ich auch die Gleichungen der betr. Complexe.

*) Vgl. Klein Math. Annalen II. S. 209.

**) Vgl. Pasch a. a. O. § 3.

dem allgemeinsten am nächsten. — Indem wir die 3 zerfallenden Complexe ausschliessen, kommen hier noch die folgenden *neun Fälle* vor:

[11112], [111(12)], [11(11)2], [11(112)], [1(11)(12)], [1(111)2], [(11)(11)2], [(11)(112)], [(111)(12)].

Von den Fundamentalcomplexen sind zwei, $x_5 = 0$ und $x_6 = 0$, speciell. Ihre Directricen gehören den andern an. — Beim Uebergang zu den p_{ik} benutzen wir die folgende Substitution:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = p_{13} + p_{42}\,, \qquad x_5 = p_{14}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42})\,, \qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

7. Der Complex *[11112]* ist dargestellt durch:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_3^2 x_3^2 + \lambda_4^2 x_4^2 = 0\,.$$

Die Doppelwurzel λ_5, die zum doppelten Elementartheiler gehört, ist als Null angenommen. — In dieser Darstellung ist ferner der Fundamentalcomplex $x_5 = 0$ vor dem ursprünglich gleichberechtigten $x_6 = 0$ ausgezeichnet. Seine Directrix gehört allen in Ω (und Ω') vorkommenden Fundamentalcomplexen an und ist in Folge dessen *Complex-Doppelgerade* (und vierfache singuläre Linie). Eine weitere Doppelgerade kommt nicht vor.

Die Singularitätenfläche hat die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)(y_1^4 + y_4^4) \\
&- 4\lambda_3\lambda_4(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_4)(y_1^2 y_3^2 + y_4^2 y_2^2) \\
&+ 2\{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) - 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4)\}\, y_1^2 y_4^2 \\
&+ 8\{\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2)\}\, y_1 y_2 y_3 y_4 = 0\,.
\end{aligned}$$

Es ist $y_1 = y_4 = 0$, die Directrix von $p_{14} = 0$, resp. $x_5 = 0$, Doppelgerade. Um die Fläche zu untersuchen, lege man durch dieselbe die Ebene $y_4 = \mu y_1$. Die Betrachtung der dabei auftretenden Kegelschnitte ergiebt die folgenden Resultate:

Jeder Kegelschnitt ergiebt für die Doppelgerade $(A_2 A_3)$ einen Pol, dessen Ort eine Gerade $(A_1 A_4$, Kante unsers Tetraeders) ist. Diese Gerade sei hier und im Folgenden als die *„adjungirte Gerade“* (zur Doppelgeraden) bezeichnet.

Unter den Kegelschnitten sind vier, die in Punktepaare zerfallen etc.

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Plücker'sche Complexfläche). — Der Complex hat 18 Constante.*

---

*) Kummer giebt diese Particularisation seiner allgemeinen Fläche selbst

Diese Fläche steht zwischen der Kummer'schen Fläche (111111) und der Singularitätenfläche von [1111(11)] in der Mitte. Sie geht aus der ersteren hervor, wenn in jener 8 Doppelpunkte paarweise in einer Geraden zusammen fallen. Diese Punkte sind die Cuspidalpunkte der Complexfläche. Fallen die übrigen 8 von den 16 Knotenpunkten der Kummer'schen Fläche ebenso paarweise in einer weiteren Geraden (in der adjungirten) zusammen, so hat man die Linienfläche des Falles [1111(11)] mit ihren 8 Cuspidalpunkten.

Das Coordinatensystem hat zu der Fläche eine möglichst einfache Lage. Eine Kante desselben ist die Doppelgerade, ihre gegenüberliegende die adjungirte. Auf beiden hat man die vier Schnittpunkte mit den einfachen Geraden der Fläche paarweise harmonisch zu den Coordinatenecken gelegen. Letztere sind also die Doppelpunkte je einer durch die resp. vier Punkte bestimmten Involution. Da sich aber die Punkte beider Geraden in bestimmter Weise (durch die einfachen Geraden) zugeordnet sind, so ist diese Wahl auf drei verschiedene Weisen möglich. Dem entsprechend kann man auch die Liniencoordinaten x in die p_{ik} auf drei wesentlich verschiedene Weisen so transformiren, wie es eben geschah.

8. In dem Fall *[111(12)]* gehören ein einfacher und der doppelte Elementartheiler zu derselben dreifachen Wurzel. — Wir wollen diesen Fall dadurch aus dem vorigen ableiten, dass wir λ_4 Null setzen. Wir erhalten insbesondere die folgende Singularitätenfläche:

$$\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)(y_1^4+y_4^4)-4\lambda_1\lambda_2\lambda_3(y_1y_3-y_4y_2)^2 \\ +2(\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)-2\lambda_1\lambda_2)y_1^2y_4^2=0.$$

An Stelle der früheren Doppelgeraden $y_1=y_4=0$ ist hier eine *Selbstberührungsgerade* der Fläche aufgetreten. Dieselbe hat (für den Complex) die Bedeutung von *zwei unendlich nahen Complexgeraden.* — Cayley betrachtete bei Linienflächen zuerst solche zwei unendlich nahe Doppelgerade, er nennt sie in der Regel „*doppelte Doppelgeraden*"*). Wir wollen uns nur merken, dass eine solche (für den Complex und die Singularitätenfläche) auftritt, wenn ein einfacher und ein doppelter Elementartheiler zu derselben Wurzel gehören.

Wir erhalten ein deutliches Bild von der Gestalt der Singularitätenfläche in der Nähe dieser Geraden, wenn wir die Fläche zweiter Ordnung hinzunehmen:

$$y_1y_3-y_4y_2=0.$$

---

an. Vgl. a. a. O. S. 70. — Eine eingehende Behandlung giebt Plücker in der „*Neuen Geometrie*".

*) Vgl. Cayley: „On skew surfaces, otherwise scrolls". Phil. Trans. 1863, 64.

Längs $y_1 = y_4 = 0$ fallen die Fortschreitungsrichtungen dieser Fläche und unserer Singularitätenfläche zusammen.

Dass unsere Gerade Selbstberührungsgerade und nicht etwa dreifache Gerade ist, erkennt man aus dem Vorhergehenden in Verbindung damit, dass eine Ebene durch sie aus der Fläche noch zwei Gerade ausschneidet. Wir erhalten auf diese Weise:

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierten Grades mit einer Cayley'schen doppelten Doppelgeraden, die Gattung XII von Cremona. Der Complex hat 16 Constante.

Es ist leicht zu beweisen, dass dies die allgemeine Fläche der genannten Cremona'schen Gattung ist. — Beim Uebergang von der allgemeinen Complexfläche zu dieser rückt die adjungirte Gerade an die Doppelgerade unendlich nahe heran. Die noch vorhandenen 8 Doppelpunkte rücken paarweise in Cuspidalpunkte zusammen.

9. Für die Verbindung *[11(11)2]* der Elementartheiler lässt sich die Gestalt der Singularitätenfläche sofort angeben. Neben der Doppelgeraden und ihrer adjungirten hat man hier noch zwei Doppelgerade, die von der ersteren geschnitten werden. — In dem Fall [1111(11)] hatte man eine Linienfläche mit zwei doppelten Leitgeraden, hier tritt ausserdem eine doppelte Erzeugende auf. Von Cremona XI kommen wir also zu V. Es ist jedoch besonders zu beweisen, dass wir hier die allgemeine Gattung V vor uns haben. Wir sehen hier nämlich, dass der Ort der Pole der Doppelerzeugenden in Bezug auf die Kegelschnitte der Fläche eine Gerade ist, welche die doppelten Leitgeraden trifft. Cayley und Cremona geben aber für ihre allgemeinen Flächen eine solche Eigenschaft nicht an.

In dem allgemeinsten Fall einer solchen Fläche hat man in jeder Ebene durch die Doppelerzeugende einen Kegelschnitt und seinen Pol P. Dieser Punkt P beschreibt eine Raumcurve bei der Drehung der Ebene des Kegelschnittes; es soll deren Ordnung bestimmt werden. Die Frage nach der Ordnung ist identisch mit der Frage nach der Anzahl der Punkte P, die auf der Doppelerzeugenden liegen. Liegen n darauf, so ist die Ordnung $n+1$. — In unserm allgemeinen Fall aber wird die Doppelerzeugende nie von einem Kegelschnitt berührt*) als im uneigentlichen Sinn von den beiden zerfallenden, den Doppelgeraden. Suchen wir also die Pole für diese zerfallenden Kegelschnitte. Indem wir uns ihnen als Gränzlage annähern, finden wir, dass das Paar der Cuspidalpunkte auf jeder Doppelgeraden die Scheitel des ausgearteten Kegelschnitt's vorstellt. Diese Cuspidalpunkte sind aber im allgemeinen Fall verschieden und keiner liegt auf der Doppelerzeugenden. Der Pol

*) Vgl. Cremona a. a. O. §§ 6., 7.

in dieser Ebene liegt also keinesfalls auf der Doppelerzeugenden. — Es ist also $n = 0$, die Ordnung unserer Curve 1, d. h. *der Ort der Pole ist auch im allgemeinen Fall eine Gerade, welche die doppelten Leitgeraden in zwei bekannten Punkten trifft**). — Wir finden überhaupt:

Der Complex hat drei Doppelgerade. Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Fläche der Gattung V von Cremona's Linienflächen. Der Complex hat 16 Constante.

10. Der nun zu behandelnde Fall *[11(112)]* ist ganz analog [111(111)] (S. 158) der ersten kanonischen Form. Wir haben:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + x_5^2 = 0 .$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 \qquad = 0 .$$

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt auch hier in die folgenden vier linearen:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \pm i \lambda_2 : \pm \lambda_1 : \pm \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} .$$

Wir werden unten die Directricen aufsuchen und uns jetzt zur Singularitätenfläche wenden. — Die Leitgerade von $x_5 = 0$ gehört $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ an, sie erleidet durch dieselben zwei projectivische Zuordnungen ihrer Punkte und Ebenen. Zweimal hat man für beide Fälle dieselbe Zuordnung von zwei Elementen. Wir erhalten auf diese Weise die beiden Büschel $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, bestehend aus *doppelten Complexgeraden*. Daraus folgt: *Der Complex hat zwei Büschel von Doppelgeraden, deren Mittelpunkte und Ebenen doppelt zählend die Singularitätenfläche bilden.*

Wie wir sehen werden, geht dieser Fall aus [111(111)] direct hervor, wenn die dort auftretende Fläche zweiten Grades in zwei Ebenen und zwei Punkte ihrer Schnittlinie zerfällt. Diese sind an unserm Coordinatentetraeder $y_1 = 0$, $y_4 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ (A_2, A_3). Als Erzeugende der zerfallenden Fläche sind die vier Büschel ($y_1 = 0$, $u_2 = 0$), ($y_1 = 0$, $u_3 = 0$) etc. aufzufassen. Zwei von ihnen, ($y_1 = 0$, $u_2 = 0$) und ($y_4 = 0$, $u_3 = 0$) bilden die *„eine Erzeugung“, die aus Doppelgeraden besteht*, die anderen beiden bilden die zweite Erzeugung der zerfallenen Fläche (die dem Complex nicht angehört).

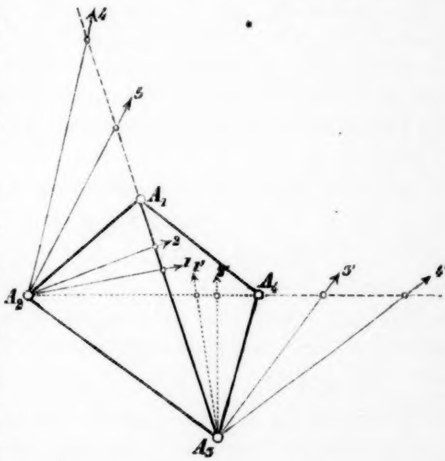
Die Directricen der vier Congruenzen singulärer Linien finden sich wieder beim Uebergang zu den p_{ik}. Sie seien bezeichnet mit 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4' (wo allemal k, k' zu derselben Congruenz gehören). Dann hat man für die Coordinaten die Tabelle:

---

*) In dem allgemeinsten Fall einer Doppelgeraden auf einer Fläche vierter Ordnung wäre dieser Ort eine *Raumcurve fünfter Ordnung* mit der Doppelgeraden als vierfacher Secante.

	p_{12}	p_{34}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
1	-2α	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
1′	0	-2α	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
2	$+2\alpha$	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
2′	0	$+2\alpha$	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
3	-2α	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
3′	0	-2α	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
4	$+2\alpha$	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
4′	0	$+2\alpha$	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$

Es ist dabei α eine der Grössen $\pm\sqrt{\lambda_4\lambda_2(\lambda_2-\lambda_4)}$. — Die nebenstehende Figur giebt ein Bild von der Lage dieser Directricen im Raume. 1234 liegen in $y_4 = 0$ und gehen darin durch A_2. Ferner liegen sie paarweise harmonisch zu A_2A_1 und A_2A_3. Analog verhalten sich 1′2′3′4′ in $y_1 = 0$ durch A_3.



Diese Directricen gehören also derjenigen Erzeugung der „Fläche zweiten Grades" an, die nicht aus doppelten Complexgeraden besteht, ganz wie bei [111(111)]. Die Construction des Complexes ist wie in jenem allgemeineren Fall. — Seien $iklm$ die Zahlen 1 2 3 4, so bedeuten $i, i', k, k', l, l', m, m'$ unsere Directricen. Wie bei [111(111)] sind von ihnen *vier erfüllt mit singulären Punkten, die andern vier mit singulären Ebenen. Erstere seien i, k, l', m', letztere sind dann i', k', l, m.* Wir werden später diese Bezeichnung oft anwenden. — In $ikl'm'$ durchsetzen die Complexkegelschnitte die Ebenen $y_1 = 0$ und $y_4 = 0$, und berühren dort die singulären Linien ihrer Ebenen; $i'k'lm$ geben

die Tangentialebenen der Complexkegel an den betreffenden singulären Geraden etc.

Die Brennfläche der singulären Geraden hat sich in 8 Strahlen zusammengezogen, von denen je vier in einer Ebene durch einen Punkt gehen. Vier von den 8 Geraden enthalten die singulären Punkte der singulären Linien, die andern vier die singulären Ebenen. Zwei Büschel von Geraden treffen alle Directricen, sie bestehen aus doppelten Complexgeraden. — Der Complex hat 13 Constante.

11. Die Complexe unter der Form *[1(11)(12)]* gestalten sich sehr einfach. Die Verbindung (12) veranlasst eine „doppelte Doppelgerade", ferner (11) zwei Doppelgerade, welche erstere treffen. *Der Complex hat vier Doppelgerade, die ein windschiefes Vierseit bilden, von denen zwei Gegenseiten benachbart sind. Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades, die sich nach einer Erzeugenden berühren, und die noch zwei verschiedene (der andern Erzeugung) gemein haben. Der Complex hat 14 Constante.*

Das übrige Verhalten des Complexes ist wie bei [11(11)(11)] (S. 160). Die Construction ist ganz so wie dort; dabei gelten die benachbarten Doppelgeraden als ein Gegenseitenpaar des Vierseits der Doppelgeraden, die nicht consecutiven bilden das andere. — Der frühere Complex hatte 15 Constante, darunter eine absolute Invariante; er erlaubte also einfach unendlich viele Transformationen in sich selbst. Hier hat man 14 Constante, wovon eine absolute Invariante ist; dieser Complex erlaubt also zweifach unendlich viele Transformationen in sich selbst.

12. Für *[1(111)2]* haben wir die Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + 2\,\lambda_5 x_5 x_6 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + 2\,\lambda_5 x_5\,(\lambda_5\,x_6 + x_5) = 0\,.$$

Es ist hier, im Gegensatz zu den vorigen Fällen, λ_5 nicht als Null angenommen, dafür aber die dreifache Wurzel λ_2. — Die singulären Linien erfüllen insbesondere die Gleichung $\Omega' - \lambda_1\,\Omega = 0$, also:

$$x_5\left\{2\,\lambda_5\,(\lambda_5 - \lambda_1)\,x_5 + (2\,\lambda_5 - \lambda_1)\,x_6\right\} = 0\,.$$

$x_5 = 0$ ist ein specieller Complex, dessen Directrix der Regelschaar $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ angehört. Die Regelschaar $x_1 = x_5 = x_6 = 0$, welche die eben genannte schneidet, besteht aus doppelten Complexgeraden und vierfachen singulären Linien, d. h.:

Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zu zählende Fläche zweiten Grades. Alle ihre Tangenten, welche eine bestimmte Erzeugende treffen, sind doppelte singuläre Linien. Die Erzeugung unserer Fläche, die sich unter dieser befindet, besteht aus doppelten Complexgeraden. Ausserdem hat man noch zwei allgemeine lineare Congruenzen singulärer

Linien, deren Directricen derselben Erzeugung angehören, wie die schon ausgezeichnete Erzeugende. — Der Complex hat 13 Constante.

Wir haben hier eine directe Degeneration des Falles [111(111)] (S. 158) vor uns. Vier von den 8 dort vorkommenden Directricen, z. B. 1, 1', 2, 2', fallen zusammen, also in der zweiten Figur auf S. 159, die Punkte P_1, P_1', P_2, P_2'. Die Kegelschnitte K_1 und K_2 berühren sich. Wie von jenem Complex, haben wir also auch von diesem eine directe Anschauung und wir können auch diesen einfach erzeugen. Sind nur die ausgezeichnete Erzeugende $e = (1\,1'\,2\,2')$ und drei der noch übrigen gegeben, so ist die Construction entweder durch Complexkegelschnitte (wenn gegeben sind e, 3, 3', 4) oder durch Complexkegel (wenn e, 3, 3', 4' gegeben) sehr einfach. (Dabei sollen auch hier 3 und 4 Reihen singulärer Punkte, 3' und 4' Axen singulärer Ebenen sein.) — Die Transformationen des Complexes in sich selbst sind noch wie bei [111(111)].

Unser Fall giebt als Degeneration den Fall [1(111)(11)] (S. 168), es fallen dann auch noch 3, 3', 4, 4' zusammen.

13. Bei der Verbindung *[(11)(11)2]* der Elementartheiler werden wir nebst der ursprünglichen Doppelgeraden noch vier weitere haben, welche diese schneiden. Die Geraden (11)(11) bilden ein windschiefes Vierseit, die Gerade 2 soll alle treffen, verbindet also 2 Ecken dieses Vierseits. Die Doppelgeraden haben demnach eine Gruppirung wie fünf Kanten eines Tetraeders. Wir finden das folgende Resultat:

Die Singularitätenfläche löst sich in eine Fläche zweiten Grades mit zweien ihrer Punkte und den Tangentialebenen in diesen auf. Die Punkte liegen nicht auf derselben Erzeugenden. Neben diesen Punkten und Ebenen hat man noch eine irreducible Congruenz zweiten Grades von singulären Linien, die aus den Tangenten unserer Fläche durch einen allgemeinen linearen Complex ausgeschnitten werden, welcher die Kanten des windschiefen Vierseits enthält.

Die irreducible Congruenz singulärer Linien kann auch als Schnitt eines allgemeinen linearen mit einem tetraedralen Complex dargestellt werden, dessen Tetraeder durch die fünf Doppelgeraden bezeichnet ist.

Der Complex erlaubt zweifach unendlich viele Transformationen in sich selbst, er ist durch *14 Constanten* bestimmt (unter denen eine absolute Invariante vorkommt).

Wir wollen diesen Complex noch mit [11(11)(11)] (S. 160) vergleichen. Eine der dort auftretenden Flächen zweiten Grades zerfällt in zwei Ebenen und zwei Punkte. Der Vergleich giebt ohne Weiteres die Construction dieses Complexes; auf S. 162 löst sich der Kegelschnitt K_2 in zwei Gerade auf. — Aus unserm Fall erhalten wir dagegen durch Specialisirung den tetraedralen. Es löst sich dann die vorhandene Fläche zweiten Grades auch noch in ein Ebenen- bez. Punktepaar auf.

14. Der Fall [(11)(112)] verhält sich analog mehreren schon betrachteten Fällen. Wir haben die Darstellung:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) + x_5^2 \equiv 4 \lambda_1 \, p_{12} \cdot p_{34} + p_{14}^2 = 0,$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 (x_1^2 + x_2^2) \qquad \equiv 4 \lambda_1^2 p_{12} \cdot p_{34} .$$

Für die singulären Linien hat man $p_{12} = p_{14} = 0$ und $p_{14} = p_{34} = 0$. Es sind das zwei doppeltzählende zerfallende Congruenzen. Ihnen sind zwei Büschel doppelter Complexgeraden gemeinsam.

Der Complex hat zwei Büschel doppelter Complexgeraden. Ihre Mittelpunkte und Ebenen (deren Axe durch die Mittelpunkte geht) bilden doppelt zählend die Singularitätenfläche; als Liniengebilde geben sie, ebenfalls doppelt zählend, die singulären Linien. Der Complex besitzt 11 Constante.

Dieser Complex geht aus [1(11)(111)] (S. 168) hervor, wenn die dort auftretende Fläche zweiten Grades in ein Ebenen- resp. Punktepaar sich auflöst. — Aus [11(112)] (S. 174) geht dieser Fall hervor, wenn i und k in $A_1 A_2$, $i' k'$ in $A_2 A_3$, l und m in $A_2 A_3$, l' und m' in $A_3 A_4$ hineinfallen. Die Construction des Complexes ändert sich dem entsprechend. — Einen ähnlichen Fall werden wir ferner später betrachten, nämlich [2(112)] (S. 187); die dort auftretenden Directricen fallen hier theilweise zusammen.

Die Singularitätenfläche kann auch hier als zerfallende Fläche zweiten Grades aufgefasst werden. Eine Erzeugung, in Gestalt von zwei Büscheln, besteht aus doppelten Complexgeraden. Die Complexkegelschnitte berühren die beiden Ebenen an zwei bestimmten Geraden (p_{12} und p_{34}) etc.

15. Der letzte Fall dieser kanonischen Form *[(111)(12)]* ist dargestellt durch die folgenden Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_4 (x_4^2 + 2 x_5 x_6) + x_5^2 = 0, \quad \Omega' \equiv \lambda_4^2 (x_4^2 + 2 x_5 x_6) + 2 \lambda_4 x_5^2 = 0.$$

Wir erhalten als Resultat:

Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades. Alle ihre Tangenten längs einer bestimmten Erzeugenden sind vierfache singuläre Linien. Die unter ihnen vorkommenden Erzeugenden zweiter Art, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, sind doppelte Complexgeraden. Der Complex hat 11 Constante.

In [111(111)] (S. 159) fallen alle Directricen 1, 1′ · · zusammen. Wir erhalten als Folge dessen: *Die Complexkegelschnitte osculiren die Singularitätenfläche vierpunktig an der ausgezeichneten Erzeugenden.* Ebenso verhalten sich die Complexkegel. — Sind die Fläche zweiten Grades und die ausgezeichnete Erzeugende gegeben, so kennt man für jeden Complexkegelschnitt vier Punkte; eine absolute Invariante be-

stimmt ihn. Wir sehen so, dass der Complex fünffach unendlich viel Transformationen in sich erlaubt. — Ich unterlasse es, an die Zwischenstufen von [111(111)] und diesem Fall zu erinnern.

IV.

Dritte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + 2\, x_4 x_6\,,$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 (x_5^2 + 2\, x_4 x_6) + 2\, x_4 x_5 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form hat man einen *dreifachen Elementartheiler*. — Bei einem zweifachen Elementartheiler trat eine Doppelgerade und eine adjungirte auf; hier fallen beide zusammen; man erhält eine *Rückkehrgerade.*

Von den 7 Fällen dieser kanonischen Form zerfällt einer und es bleiben die folgenden *sechs* zu untersuchen:

[1113], [11(13)], [1(11)3], [1(113)], [(11)(13)], [(111)3].

Als Uebergang von den Linien-Coordinaten x zu den p_{ik} hat man das Folgende:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42})\,, \qquad x_4 = p_{14}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_5 = p_{13} + p_{42}\,, \qquad x_6 = 2\, p_{23}\,.$$

16. Der erste Fall *[1113]* besitzt folgende Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1^4 + y_4^4) - \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1^3 y_2 - y_3 y_4^3) - 4\,\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (y_1 y_3 - y_4 y_2)^2$$
$$- 4(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 - 2\,\lambda_1 \lambda_2) y_1 y_4 (y_1 y_3 - y_4 y_2) + 2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\,\lambda_3) y_1^2 y_4^2 = 0.$$

Die dreifache Wurzel λ_4 ist dabei als Null angenommen. — Die Gerade $y_1 = y_4 = 0$ ist Rückkehrgerade, denn sie gehört dem Schnitt von $y_1 y_3 - y_4 y_2 = 0$ mit unsererer Fläche dreifach an. Diese Fläche zweiten Grades giebt die Zuordnung der Punkte und Tangentialebenen an der Rückkehrgeraden.

Eine nähere Betrachtung der Kegelschnitte der Fläche (welche die Doppelgerade berühren) ergiebt das Resultat, *dass die Fläche eine Complexfläche ist, deren Leitgerade eine Complexgerade ist**).

Es ist eine deutliche Abstufung von [111111], [11112] zu diesem Fall sichtbar. — Dieser Complex hat *17 Constante.*

17. Beim Uebergang zu [11(13)] wollen wir im vorigen Fall λ_3 Null setzen. Die Singularitätenfläche wird:

---

*) Vgl. Plücker, Neue Geometrie.

$$(\lambda_1-\lambda_2)(y_1^4+y_4^4)+8\lambda_1\lambda_2 y_1 y_4(y_1 y_3+y_4 y_2)+2(\lambda_1+\lambda_2)y_1^2 y_4^2=0.$$

$y_1=y_4=0$ ist hier *dreifach* auf der Fläche, diese also eine Linienfläche. — Die dreifache Gerade ist einfache Axe, hat aber zwei stationäre Tangentialebenen, ferner ist sie einfacher Strahl und hat zwei stationäre Punkte. Es sind also auf der einfachen Leitgeraden zwei Erzeugende zusammengefallen. Der dritte Mantel der Fläche an der Doppelgeraden, der nicht überall gleiche Richtung hat, ist wie vorhin bestimmt durch $y_1 y_3 - y_4 y_2 = 0$. — Wir haben:

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Gattung X von Cremona's Linienflächen). Der Complex hat 15 Constante.*

Die dreifache Linie der Fläche ist natürlich nicht dreifache Gerade des Complexes, sondern ist *als die Vereinigung von drei Doppelgeraden des Complexes* aufzufassen. Diese kann man kurz bezeichnen als die Leitgerade und die beiden singulären Erzeugenden der Linienfläche (die der ersteren unendlich nahe sind und sie schneiden).

Dieser Complex hat also drei Doppelgerade, die unendlich nahe sind und wo die eine von den beiden andern geschnitten wird.

Der Beweis dessen liegt darin, dass bei [(11)(13)] S. 182) dieselben Doppelgeraden auch auftreten, nebst solchen, die von (11) herrühren, welch letztere aber bekannt sind.

Unsere stationären Ebenen sind $y_1=0$ und $y_4=0$, sie sind verschieden, d. h. man hat hier die allgemeine Fläche X von Cremona.

18. Auch bei [1(11)3] tritt, wie man voraussehen kann, eine Linienfläche auf. Zwei Doppelgerade schneiden eine Rückkehrgerade, d. h.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche mit zwei doppelten Leitgeraden und einer Rückkehrerzeugenden, also ein Specialfall von Cremona's Gattung V. Der Complex besitzt 15 Constante.

Cremona giebt diesen Specialfall ebenfalls an. Es entsteht, wenn in seiner Construction der Fläche die doppelte Erzeugende den Leitkegelschnitt berührt. — Es mag hier noch auf [11(11)2] (S. 173) hingewiesen werden, dort hatte man die allgemeine Fläche V von Cremona.

19. Bei *[1(113)]* ist gegenüber dem ersten Fall $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_5=0$, was die Gleichungen ergiebt:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + 2x_4 x_5 = 0, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + x_4^2 = 0.$$

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt in $x_1 = x_4 = 0$ doppelt zählend, ferner in: $(\lambda_1 x_1 + i x_4)(\lambda_1 x_1 - i x_4) = 2\lambda_1 x_5 - x_4 = 0$. Die erste Congruenz ist speciell, die andern beiden sind allgemeine

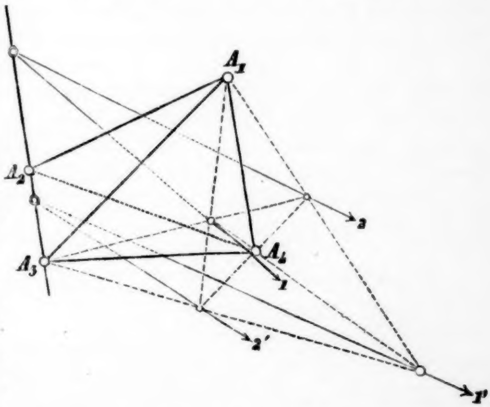
*) Carl Eichler behandelt in seiner Inauguraldissertation: „*Uebertragung eines Steiner'schen Problems von der Ebene auf den Raum*", Göttingen 1871, besonders die Abbildung dieser Fläche.

lineare. Ihre Directricen liegen in den Ebenen $y_1 + iy_4 = 0$, $y_1 - iy_4 = 0$ (welche doppelt zählend zur Singularitätenfläche gehören). Ferner verlaufen je die beiden, in derselben Ebene liegenden, durch einen und denselben Punkt der Schnittlinie beider Ebenen. Diese Punkte sind $u_2 + iu_3 = 0$, $u_2 - iu_3 = 0$.

Die untenstehende Figur veranschaulicht die Lage der Directricen und die nachfolgende Tabelle giebt ihre Coordinaten.

	p_{12}	p_{34}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
1	1	1	$+i$	$+i$	0	$\frac{3i}{2\lambda_1}$
1′	1	1	$-i$	$-i$	0	$\frac{i}{2\lambda_1}$
2	1	1	$+i$	$+i$	0	$-\frac{i}{2\lambda_1}$
2′	1	1	$-i$	$-i$	0	$-\frac{3i}{2\lambda_1}$

1, 1′ sind die Directricen der einen, 2, 2′ der andern Congruenz. Die Directrix der doppelten speciellen ist A_2A_3. Wir haben wieder i und k' erfüllt mit singulären Punkten, i' und k als Axen von singulären Ebenen etc.



Zwei Ebenen E_1, E_2 und zwei Punkte P_1, P_2 ihrer Schnittlinie bilden doppelt zählend die Singularitätenfläche. Die Congruenz singulärer Linien zerfällt in eine doppelt zählende, specielle lineare, deren Directrix die Linie $\overline{E_1 E_2}$ ist, ferner in zwei allgemeine lineare, deren Directricen durch P_1 und P_2 in E_1 und E_2 verlaufen.

Für die Construction des Complexes verweise ich auf [11(112)] (S. 174). Man lasse dort i, k, i', k' unverändert, lasse aber l, m, l', m' an A_2A_3 heran rücken. Dann hat man auch eine Anschauung der speciellen Congruenz A_2A_3. — Die Construction wird dadurch etwas modificirt, bleibt aber im Wesentlichen dieselbe. — Wir können auch hier die zwei Ebenen und Punkte als *zerfallene Fläche zweiten Grades auffassen, deren eine Erzeugung aus doppelten Complexgeraden*

besteht. — Diesen Fall erhält man ferner als eine directe Degeneration von [1(111)2] (S. 176).

Der Complex hat 12 Constante.

20. Den Fall *[(11)(13)]* haben wir schon bei [11(13)] erwähnt. Man hat hier an der Singularitätenfläche fünf Doppelgerade. Ein ebener Schnitt besteht aus einem Kegelschnitt und zwei Geraden, die sich auf demselben schneiden. Wir haben:

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Fläche zweiten Grades F_2 mit zweien ihrer Ebenen E_1 E_2, welche eine Erzeugende e gemein haben, und den Berührungspunkten P_1, P_2 dieser Ebenen. Neben den zerfallenden linearen Congruenzen singulärer Linien hat man noch eine irreducible Congruenz zweiten Grades, die aus den Tangenten von F_2 durch einen allgemeinen linearen Complex ausgeschieden wird. Der Complex hat 13 Constante.

Dass man hier *fünf doppelte Complexgerade* hat, ist evident. Die dreifache Gerade der Singularitätenfläche ist als drei unendlich nahe doppelte aufzufassen. Das sieht man sehr deutlich bei der Ableitung dieses Falles aus dem Fall [(11)(11)2] (S. 177). Dort hat man fünf Doppelgerade, von denen drei in unendliche Nähe rücken, wenn die dort auftretenden beiden Punkte der Singularitätenfläche in eine Erzeugende von F_2 rücken. Dieser Uebergang giebt auch deutlich die Gruppirung der drei unendlich nahen Doppelgeraden, ferner die Construction dieses Complexes. Man erhält z. B. das Resultat, *dass alle Complex-Kegelschnitte und Kegel die F_2 an der Erzeugenden e berühren* (und weiterhin natürlich in noch einem Punkt, die beiden Ebenen E_1 und E_2 aber nur noch uneigentlich).

21. Der Fall [*(111)3*] stellt sich zwischen [(111)12] und [(111)(12)] in die Mitte. Wir haben hier:

Die Singularitätenfläche ist eine Fläche zweiten Grades F_2, doppelt zählend. Alle ihre Tangenten, die eine bestimmte Erzeugende e treffen, sind dreifach singulär. Die Erzeugenden unter ihnen sind vierfache singuläre Linien und doppelte Complexgerade. Es kommt noch eine allgemeine lineare Congruenz singulärer Linien vor, die ebenfalls zwei Erzeugende von F_2, und zwar von derselben Schaar wie e, zu Directricen hat. Der Complex hat 12 Constante.

Gegenüber dem oft genannten Fall [111(111)] (S. 158) fallen hier drei Congruenzen zusammen, also z. B. die Directricen 11′, 22′, 33′. Wir sehen, *dass die Complexkegelschnitte und Complexkegel F_2 sämmtlich an e dreipunktig osculiren.* Für alles Weitere sei auf [111(111)] verwiesen.

V.

Vierte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3 x_4 + 2\,x_5 x_6 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,\lambda_3 x_3 x_4 + 2\,\lambda_5 x_5 x_6 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form haben wir *zwei einfache und zwei doppelte Elementartheiler.* In allen Fällen treten also zwei sich schneidende Doppelgerade auf, welche adjungirte Gerade besitzen. — Es kommen neun Fälle vor, einer zerfällt, es bleiben für die Behandlung die folgenden *acht:*

[1122], [11(22)], [12(12)], [(11)22], [(12)(12)], [(112)2], [1(122)], [(11)(22)].

Es sind hier nur noch zwei allgemeine Fundamentalcomplexe vorhanden. Die Directricen x_3, x_4, x_5, x_6 der speciellen bilden ein windschiefes Vierseit, von dem x_3 und x_4 das eine, x_5 und x_6 das andere Gegenseitenpaar sind. Die beiden Geraden, welche das Vierseit zum Tetraeder ergänzen, sind die Directricen der Complexe $x_1 + i x_2 = 0$, $x_1 - i x_2 = 0$. — Bei dem Uebergang von den x zu den p_{ik} wollen wir setzen:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = p_{13}\,, \qquad x_5 = p_{14}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_4 = 2\,p_{42}\,, \qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

22. In dem allgemeinen Fall [*1122*] hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,\lambda_3 x_4 x_5 + x_3^2 + x_5^2 = 0$$

und für die Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,y_1^4 - 4\,\lambda_3^2\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - 4\,\lambda_1 \lambda_2 y_1^2 y_3^2$$
$$+ 4\,(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2) y_1^2 y_4^2 - 8\,\lambda_3 \left\{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\lambda_1\lambda_2\right\} y_1 y_2 y_3 y_4 = 0.$$

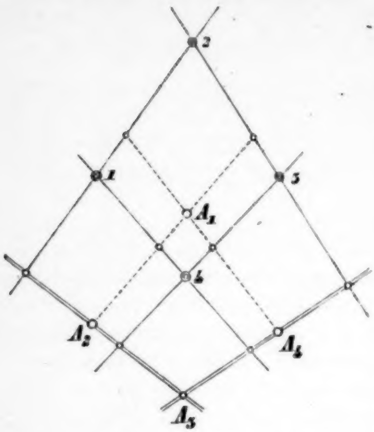
Die Kanten $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ sind Doppelgerade der Fläche, $A_1 A_2$ und $A_1 A_4$ deren adjungirte. Unter den durch eine Doppelgerade gelegten Ebenen enthalten, ausser $y_1 = 0$, noch je zwei zerfallende Kegelschnitte der Fläche. Sie bestehen aus Punktepaaren, resp. Doppelgeraden. Im Vergleich mit [11112] (S. 171) haben wir:

Die Singularitätenfläche besitzt vier (konische) Knoten und vier Doppelebenen. Vier Verbindungslinien der ersteren sind einfache Geraden der Fläche, sie besitzen stationäre Tangentialebenen. Zwei Doppelgerade der Fläche, die sich schneiden, treffen je ein Gegenseitenpaar des Vierseits der einfachen Geraden. Diese Doppelgeraden besitzen adjungirte Gerade etc.). Der Complex hat 17 Constante.*

---

*) Plücker nennt diese Fläche a. a. O. S. 339, II. Sie findet sich weiterhin bei Sturm, diese Annalen, Bd. IV, S. 269, n. *c*.

Die nebenstehende Figur soll hier der Anschauung zu Hülfe kommen. Es ist $A_1 A_2 A_3 A_4$ das Coordinatentetraeder. Die Doppelgeraden sind doppelt gezogen. Die Punkte 1234 sind Doppelpunkte, 12, 34, 14, 23 sind die Geraden der Fläche, welche constante Tangentialebenen haben, welch letztere insbesondere auch durch die Doppelgeraden gehen. Aus den harmonischen Punktgruppen der Figur sieht man sofort, dass die Geraden $A_2 A_3$, $A_1 A_4$, 14, 23 vier harmonische Erzeugende einer Fläche zweiten Grades sind. Dasselbe gilt für $A_3 A_4$, $A_1 A_2$, 34, 12, d. h. *alle Geraden der Fläche und auch die beiden adjungirten der Doppelgeraden sind auf einer Fläche zweiten Grades als zwei Gruppen von vier harmonisch liegenden Erzeugenden gelegen.*



Diese Fläche kann leicht aus der allgemeinen Complexfläche (S. 172) abgeleitet werden. Die letztere habe die Knotenpunkte 11', 22', 33', 44', wo allemal $\overline{ii'}$ die Doppelgerade und die adjungirte trifft und i, i' zu diesen Schnittpunkten harmonisch liegen. Man lasse 3 mit 4 und anderseits 3' mit 4' zusammenfallen in Punkte der Geraden 12, 1' 2', so dass die Verbindungslinie dieser beiden neuen Punkte die vorhandene Doppelgerade trifft. Auf diese Weise erhält man gerade das Singularitätensystem, welches bei unserer Fläche vorhanden ist. Um die Abstufung von der Kummer'schen Fläche zu der allgemeinen Complexfläche und zu diesem Fall noch deutlicher zu sehen, muss man auf die Gruppirung der 16 Knotenpunkte der erstgenannten Fläche zurückgehen, was indess nicht geschehen soll.

23. Der Fall [*11(22)*] ist der erste vorkommende einer Reihe von ganz eigenthümlichen Complexen. Wir haben die Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0 .$$
$$\Omega' \equiv (\lambda_1 x_1 + i\lambda_2 x_2)(\lambda_1 x_1 - i\lambda_2 x_2) = 0 .$$

Die singulären Linien bilden zwei nicht zerfallende Congruenzen zweiten Grades. Dem entsprechend treten zwei Flächen zweiten Grades als Singularitätenfläche auf. In Punktcoordinaten heissen sie:

$$y_1^2 \{(\lambda_1 - \lambda_2) y_1^2 - 4 \lambda_1 \lambda_2 (y_3^2 + y_4^2)\} = 0 .$$

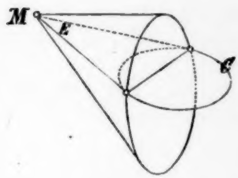
Es ist dies ein Kegel, dessen Mittelpunkt A_2 ist, und eine Ebene durch diesen, welche doppelt zählt.

Indem wir die Enveloppe der singulären Ebenen aufsuchen, finden wir:

$$v_2^2 \{(\lambda_1 - \lambda_2) v_2^2 - 4 \lambda_1 \lambda_2 (v_3^2 + v_4^2)\} = 0 .$$

Der erste Factor ergiebt den Kegel in Ebenencoordinaten, der zweite aber einen Kegelschnitt in der vorhin aufgetretenen Doppelebene. Wir finden so:

Die Singularitätenfläche ist ein Kegel K und ein Kegelschnitt C, dessen Ebene E durch den Mittelpunkt M von K geht. Der Kegelschnitt berührt die beiden Erzeugenden, die E aus K ausschneidet. Die nebenstehende Figur giebt ein Bild dieser Verhältnisse. — Kegel und Kegelschnitt haben zunächst zwei Erzeugende gemein, die für den Schnitt doppelt zu zählen sind. Doch sieht man aus der Gleichung des Complexes, dass man hier *ein ganzes Büschel von Complex-Doppelgeraden* hat. Dieses Büschel heisst in Liniencoordinaten: $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$; *es besteht aus den Geraden in der Ebene von C durch M.*



Die *Congruenz der singulären Linien* entsteht nun auf die folgende Weise. Zunächst ist dem Kegel K ein linearer Complex zugeordnet, der mit seinen Tangenten die eine quadratische Congruenz ergiebt. Ein weiterer linearer Complex, der mit dem vorigen in Involution liegt, schneidet aus den Treffgeraden von C die zweite Congruenz. — Die singulären Linien sind also nicht etwa die gleichzeitigen Tangenten an K und C (welche auch zwei irreducible quadratische Congruenzen bilden). Wir können sie vielmehr durch folgende Construction erzeugen: Zu K gehört in dem ersten linearen Complex ein Kegelschnitt in E durch M. Die Congruenz zweiten Grades seiner Treffgeraden, die K berühren, besteht aus singulären Linien. Die zweite Congruenz erhält man auf duale Weise aus C und einem (im zweiten Complexe zugeordneten) Kegel, dessen Mittelpunkt M ist*). — Diese Construction zeigt, wie die Geraden, die in E durch M verlaufen, aus vierfach singulären Linien bestehen (womit sie ohne Weiteres doppelte Complexgerade sind). — Man vergleiche auch diese Construction mit der des Falles [11(11)(11)] (S. 164); sie ist im Wesentlichen dieselbe. Eine beliebige Ebene trifft K in einem Kegelschnitt C' und C in den zwei

*) Vgl. Kummer a. a. O., Sätze XIII und XIV.

Punkten P_1, P_2. Die Complexkegelschnitte gehen durch P_1 und P_2 und berühren den Kegelschnitt C' zweimal etc.

Der Complex hat *14 Constante.*

24. In dem Fall [*12(12)*] treten drei Doppelgerade auf, wovon zwei, (12), unendlich nahe liegen, die dritte, 2, aber beide trifft. Wir kommen also hier wieder auf Linienflächen, und zwar auf Cremona's Gattung VI. Gegenüber dem Fall [111(12)] (S. 172) ist hier einfach eine doppelte Erzeugende aufgetreten. Wir finden zu ihr wieder eine adjungirte Gerade, welche beide doppelte Leitgeraden trifft. Es wäre also auch hier wieder der Beweis zu führen, dass man hier die allgemeine Gattung VI hat. Der Beweis ist aber ganz derselbe wie bei [11(11)2] (S. 173).

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Linienfläche, die Cremona als seine VI^te Gattung anführt. Sie hat eine Selbstberührungsgerade und eine doppelte Erzeugende. Der Complex hat 15 Constante.

25. Der Complex [*1(122)*] ist dargestellt durch die folgenden Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 = 0\,.$$

Die Congruenz der singulären Linien besteht augenscheinlich aus zwei doppelt zählenden speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen ($x_3 + ix_5$, $x_3 - ix_5$) sich schneiden. In Punktcoordinaten sind diese Directricen $y_1 = y_3 + iy_4 = 0$ und $y_1 = y_3 - iy_4 = 0$. — Wir haben hier die directe Degeneration des Falles [11(22)] (S. 184). Der Kegelschnitt C artet in den doppeltzählenden Punkt M, der Kegel K in die doppelte Ebene E aus.

Die singulären Linien bilden zwei doppelt zählende, specielle lineare Congruenzen, deren Directricen sich schneiden. Ihr Schnittpunkt ist vierfach zählend die Enveloppe der singulären Ebenen und die ihnen gemeinsame Ebene vierfach zählend die Fläche der singulären Punkte. Der Complex besitzt 12 Constante.

Dieser Fall kann auch als directe Specialisirung von [11(112)] (S. 174) angesehen werden. Man stelle sich vor, es fallen dort die beiden Ebenen der Directricen, $y_1 = 0$ und $y_4 = 0$, ebenso die Schnittpunkte A_2 und A_3 je unendlich nahe zusammen. In der einen Ebene seien ik, ferner lm je vereinigt, ebenso in der zweiten einerseits $i'k'$, anderseits $l'm'$. Diese Vereinigung geschieht so, dass (ik) und $(i'k')$ selbst unendlich nahe verlaufen etc. — Indem wir so die Grenzlage auffassen, können wir diese Singularitätenfläche wieder ansehen *als degenerirte Fläche zweiten Grades, von der eine Erzeugung aus Doppelgeraden des Complexes besteht.*

26. Der Fall [*(11)22*] ist durch die Gruppirung seiner vier Doppelgeraden bemerkenswerth. — Indem wir an Stelle der Gleichung $\Omega = 0$ nehmen: $\Omega - \lambda_1 P = 0$, erkennt man, dass die Geraden $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, also $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ Complexdoppelgerade sind. Ebenso führt $\Omega - \lambda_5 P = 0$ auf $A_2 A_3$, $\Omega - \lambda_3 P = 0$ auf $A_2 A_4$. *Die Doppelgeraden $A_3 A_4$, $A_4 A_2$, $A_2 A_3$ bilden ein Dreieck, $A_1 A_2$ geht durch eine seiner Ecken.* — Bis jetzt bildeten allemal vier Doppelgerade ein windschiefes Vierseit.

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt in eine lineare, deren Gerade eine Ebene und einen darin liegenden Punkt erfüllen, und eine vom dritten Grad. — Dem entsprechend löst sich die Singularitätenfläche auf in eine allgemeine Linienfläche dritten Grades mit einer ihrer Doppeltangentialebenen und dem in derselben liegenden Doppelpunkt. — Der Complex hat 15 Constante.

Beim Uebergang von [(11)112] zu diesem Fall mögen wir uns vorstellen, dass dort die Ebene der Doppelerzeugenden (der Cremona'schen Gattung V) mit der einen doppelten Leitgeraden und der Schnittpunkt der doppelten Erzeugenden mit der andern doppelten Leitgeraden sich als Fläche ersten Grades absondern.

27. In dem Fall [*(112)2*] wollen wir ausgehen von:

$$\Omega \equiv 2\,\lambda_3 x_3 x_4 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv 2\,\lambda_3 x_3\,(x_3 + \lambda_3 x_4) = 0\,.$$

Zunächst haben wir doppelt als singuläre Linien zählend die Congruenz $x_3 = x_5 = 0$, resp. $p_{13} = p_{14} = 0$. Diese bilden ein Strahlbündel und ein Strahlfeld. Eine weitere Congruenz zweiten Grades ist: $(x_5 + c\,x_4)\,(x_5 - c\,x_4) = x_3 + \lambda_3\,x_4 = 0$, also das Product von zwei speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen sich treffen. — Doppelte Complexgeraden sind $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Sie bilden zwei Büschel.

Der Complex besitzt eine doppelte Ausnahmeebene und einen in ihr liegenden doppelten Ausnahmepunkt. Beide bilden doppelt zählend einen Theil der Singularitätenfläche, ebenso doppelt zählend eine Congruenz zweiten Grades von singulären Linien. In der Ausnahmeebene durch den Ausnahmepunkt geht eine Gerade, welche sowohl die singulären Punkte, als auch die singulären Ebenen dieser singulären Geraden bestimmt. — In einer weiteren Ebene durch den Ausnahmepunkt hat man zwei Gerade, Directricen von zwei speciellen linearen Congruenzen singulärer Linien, die durch einen Punkt der Ausnahmeebene gehen. Dieser neue Punkt und diese neue Ebene gehören ebenfalls doppelt zählend zur Singularitätenfläche etc. Der Complex hat 12 Constante.

Die Complexkegelschnitte berühren die Ebene $(x_3 x_5)$ an x_3 und

durchsetzen $(x_1 x_5)$ an den beiden genannten Directricen. Man vergleiche diesen Fall mit [11(112)] (S. 174). Man lasse dort die Directricen i und k in $A_1 A_2$ hineinfallen, ferner i' und k' in $A_2 A_3$ rücken. Die andern bleiben ungeändert.

28. Eine einfache Abstufung ist: [11(11)(11)], [1(11)(12)], [*(12)(12)*]. Zuerst ist die Singularitätenfläche das Product von zwei Flächen zweiten Grades, die ein windschiefes Vierseit gemein haben. Dann rücken in diesem zwei Gegenseiten zusammen. Bei dem nun zu betrachtenden Complexe [(12)(12)] thun das beide Paare:

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades, die sich nach zwei sich schneidenden Erzeugenden berühren. Der Complex hat 13 Constante.

Die singulären Linien verhalten sich sehr einfach. Für sie finden wir das Folgende:

Die singulären Linien bilden zwei irreducible Congruenzen zweiten Grades. Die erste wird aus den Tangenten der einen F_2 durch einen speciellen linearen Complex ausgeschnitten, dessen Directrix durch den Schnittpunkt der beiden doppelten Doppelgeraden in deren Ebene verläuft. Die zu diesen drei Geraden harmonische ist ebenfalls Directrix eines speciellen Complexes, der mit den Tangenten der zweiten Fläche die zweite Congruenz ergiebt.

Man erkennt, dass beide Congruenzen ein Büschel gemein haben. Dasselbe hat als Mittelpunkt und Ebene den Schnittpunkt und die Ebene der beiden Erzeugenden, nach denen sich die F_2 berühren. Dasselbe ist *Büschel von doppelten singulären Linien, die einfache Complexgerade sind.*

29. In dem Fall [*(11)(22)*] hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_5^2 = 0\,, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Die singulären Linien werden aus den speciellen Complexen $x_3 + i x_5 = 0$, $x_3 - i x_5 = 0$, deren Directricen sich schneiden, durch $x_1 + i x_2 = 0$, $x_1 - i x_2 = 0$, die ebenfalls speciell sind, ausgeschnitten. Drei dieser Directricen liegen in einer Ebene und drei gehen durch einen Punkt etc. — *Wir erhalten eine doppelte und zwei einfache Ausnahmeebenen, ferner je damit vereinigt einen doppelten und zwei einfache Ausnahmepunkte.* — Damit hat man die singulären Linien und die Singularitätenfläche vollständig.

Man vergleiche mit [11(22)] (S. 184). Der dort genannte Kegelschnitt zerfällt hier in ein Punktepaar, der Kegel in ein Ebenenpaar. Der Complex ist wie jener zu construiren. Die Complexkegelschnitte berühren die doppelte Ausnahmeebene an einer bestimmten Geraden,

nämlich an der Verbindungslinie der beiden einfachen Ausnahmepunkte etc. *Der Complex hat 12 Constante. Das Büschel der Geraden in der Doppelebene durch den Doppelpunkt besteht auch hier aus doppelten Complexgeraden. Eine weitere doppelte Complexgerade in der doppelten Ausnahmeebene, die nicht durch den doppelten Ausnahmepunkt geht, ist die Verbindungslinie der einfachen Doppelpunkte. Ebenso gehört die Schnittlinie der einfachen Ausnahmeebenen doppelt dem Complexe an.*

Das Letztere ergiebt sich sofort, wenn man in Ω die zweifache Wurzel λ_1 gleich Null setzt und die vierfache λ_3 als von Null verschieden annimmt.

VI.

Fünfte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3 x_6 + 2\,x_4 x_5 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,x_3 x_5 + x_4^2 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form kommt ein *vierfacher Elementartheiler* vor. Die vierfache Wurzel, die zu ihm gehört, ist hier als Null angenommen.

Es kommen keine zerfallenden Complexe vor; wir haben die folgenden *vier* Möglichkeiten:

[114], [1(14)], [(11)4], [(114)].

Die Form P geht in die Bedingungsgleichung der Coordinaten p_{ik} über bei folgender Substitution:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = p_{13}\,, \qquad x_4 = 2\,p_{14}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_6 = 2\,p_{42}\,, \qquad x_5 = p_{23}\,.$$

30. In dem Fall *[114]* haben wir die Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) y_3^4 - 4\,y_3^2 y_1^2 + 8\,\lambda_1 \lambda_2 y_3^2 y_1 y_2 + 4\,(\lambda_1 + \lambda_2) y_3 y_1^2 y_4$$
$$- 8\,(\lambda_1 - \lambda_2) y_1^3 y_2 + 16\,\lambda_1 \lambda_2 y_1^2 y_4^2 = 0\,.$$

$y_1 = y_3 = 0$ ist Doppelgerade, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ dreifacher Punkt. Die Kegelschnitte berühren die Doppelgerade im dreifachen Punkte etc.

Die Singularitätenfläche ist die Complexfläche, deren Leitgerade (im allgemeinen Complex zweiten Grades) eine singuläre Complexgerade ist. Diese Gerade ist die einzige Doppelgerade des Complexes, der 16 Constante besitzt.

31. Für $\lambda_2 = 0$ erhält man aus dem vorigen Fall *[1(14)]*. Die Singularitätenfläche ist:

$$y_3^2(\lambda_1 y_3^2 - 4 y_1^2) + 8 \lambda_1 y_1^2 (y_3 y_4 - y_1 y_2) = 0 .$$

Die Gerade $y_1 = y_3 = 0$ ist dreifach geworden, die Fläche also eine Linienfläche. Es ergiebt sich:

Die Singularitätenfläche ist derjenige Specialfall von Cremona's Gattung X, bei dem die beiden stationären Tangentenebenen zusammenfallen. Der Complex hat 14 Constante.

Cremona erzeugt die allgemeine Gattung X durch eine ebene Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt und eine Gerade, welche durch den Doppelpunkt geht. In diesem Fall ist aus dem Doppelpunkt eine Spitze geworden.

Wie [11(13)] (S. 179) hat auch dieser Complex *drei unendlich nahe Doppelgerade.* Sie sind dargestellt wie bei [11(13)] durch die Leitgerade und die singulären Erzeugenden der Linienfläche. (Nur die gegenseitige Lage ist anders, da hier diese beiden Erzeugenden zusammenfallen).

32. In dem Fall *[(11)4]* hat man:

Die Singularitätenfläche besteht aus der allgemeinen Linienfläche dritten Grades und einer ihrer Cuspidalebenen mit dem darin liegenden Cuspidalpunkt. Der Complex hat 14 Constante.

Die *vier Doppelgeraden des Complexes* haben eine Anordnung wie bei [(11)22] (S. 187). Zwei sind in einer Ebene unendlich benachbart, eine dritte liegt in ihrer Ebene und geht nicht durch den Schnittpunkt, die vierte thut das Umgekehrte.

33. Für *[(114)]* hat man:

$$\Omega \equiv 2 x_3 x_5 + x_4^2 = 0 , \qquad \Omega' \equiv 2 x_3 x_4 = 0 .$$

Die singulären Linien bestehen aus der dreifach zählenden zerfallenden Congruenz $x_3 = x_4 = 0$ und aus der allgemeinen linearen $x_4 = x_5 = 0$. Die beiden Büschel $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ bestehen aus doppelten Complexgeraden, sie geben doppelt zählend die Singularitätenfläche. Der Complex hat 11 Constante.

Vergleichen wir mit [1(113)] (S. 180). Die Congruenz 2, 2′ falle dort in die doppelt zählende specielle hinein; 1, 1′ lasse man unverändert. Man findet so, dass die Complexkegelschnitte die Ebene, welche dreifache singuläre Linien enthält, an der Schnittlinie unserer beiden Ebenen berühren, die andere aber an einer bestimmten Geraden in bekannter Richtung durchsetzen. Das Duale gilt für die Complexkegel.

VII.

Sechste kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + 2\,x_2x_3 + 2\,x_4x_6 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + 2\,\lambda_2 x_2 x_3 + x_2^2 + 2\,x_4x_5 = 0\,.$$

Man hat hier *einen einfachen, einen doppelten und einen dreifachen Elementartheiler*. Die dreifache Wurzel ist in Ω als Null angenommen. Es kommen die folgenden *fünf Fälle* vor, von denen keiner einen zerfallenden Complex ergiebt:

$$[123],\quad [1(23)],\quad [2(13)],\quad [(12)3],\quad [(123)].$$

Durch die folgende Substitution wollen wir in die p_{ik} transformiren:

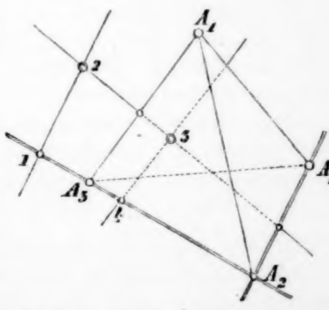
$$x_1 = \frac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,,\qquad x_2 = p_{13}\,,\qquad x_4 = p_{14}\,,$$
$$x_5 = p_{12} + p_{34}\,,\qquad x_3 = 2\,p_{42}\,,\qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

34. Die Singularitätenfläche des Falles [*123*] hat die folgende Gleichung:

$$-y_1^4 - 4\lambda_1 y_1^3 y_3 + 4\lambda_1\lambda_2^2(y_1y_2 - y_3y_4)^2 + 8\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)y_1y_4(y_1y_2 - y_3y_4) + 4(\lambda_1 - \lambda_2)y_1^2y_4^2 = 0\,.$$

Wir sehen, dass $y_1 = y_3 = 0$ Doppelgerade, $y_4 = y_2 = 0$ die zu ihr adjungirte, $y_1 = y_4 = 0$ endlich Rückkehrgerade ist. Wir suchen wieder die zerfallenden Kegelschnitte und finden:

Die Singularitätenfläche besitzt eine Doppelgerade mit adjungirter Geraden und eine Rückkehrgerade, welche die adjungirte trifft. Die Verbindungslinie der zwei conischen Knoten der Fläche trifft die Doppelgerade und gehört der Fläche an; ferner gehen durch die Knoten noch zwei Geraden der Fläche, die wie die eben genannte Gerade constante Tangentialebene haben. Der Complex hat 16 Constante.



Die Lagenbeziehung der Geraden der Fläche ist durch die nebenstehende Figur deutlich gemacht. $A_2\,A_3$ ist die Rückkehrgerade, $A_2\,A_4$ die Doppelgerade, $A_1\,A_3$ die adjungirte. 2 und 3 sind conische Knoten. $\overline{23}$ ist eine einfache Gerade der Fläche, sie trifft Doppelgerade und adjungirte Gerade, ihre constante Tangentialebene geht durch A_2A_4. — Die Geraden A_2A_1, 24, A_1A_3, 13 sind vier harmo-

nische Erzeugende einer Fläche zweiten Grades, der auch $A_2 A_3$ und $\overline{23}$ angehören. — Man stelle sich in [1122] (S. 183) vor, dass die Punkte 1 und 4 in $A_2 A_3$ fallen. Die adjungirte von $A_2 A_3$ rückt mit heran und macht die Doppelgerade zur Rückkehrgeraden.

35. In dem Fall *[1(23)]* haben wir:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + x_2^2 + 2\, x_4 x_5 \,, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + x_4^2 = 0 \,.$$

Die Geraden $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ bilden in $y_1 = 0$ ein Büschel durch den Punkt A_2, bestehend aus doppelten Complexgeraden. — Aus $\Omega = 0$ werden die singulären Linien durch zwei allgemeine, in Involution liegende lineare Complexe ausgeschieden. Dem entsprechend zerfällt auch die Singularitätenfläche. In Punkt- und Ebenencoordinaten erhalten wir:

$$y_1^2\,(y_1^2 + 4\,\lambda_1 y_1 y_3 - 4\,\lambda_1 y_4^2) = 0\,,$$
$$v_2^2\,(v_2^2 - 4\,\lambda_1 v_4 v_2 - 4\,\lambda_1 v_{32}) = 0\,.$$

Die Singularitätenfläche zerfällt in einen Kegel und einen Kegelschnitt, welch' letzterer in einer Tangentialebene des ersteren liegt und die Erzeugende des Kegels, die in seiner Ebene liegt, an der Kegelspitze berührt. Dem Kegel und dem Kegelschnitt sind lineare, in Involution liegende Complexe zugeordnet, die aus ihren Treffgeraden, bez. Tangenten die singulären Linien ausschneiden. Der Complex besitzt 13 Constante.

Dieser Complex verhält sich wie [11(22)] (S. 184). Die Construction ist noch genau dieselbe, nur die gegenseitige Lage von C und K hat sich verändert.

36. In dem Fall *[2(13)]* tritt wegen 2 eine Complexdoppelgerade, wegen (13) aber treten drei solche auf, die unendlich benachbart sind. Wir finden das Folgende:

Die Singularitätenfläche ist die Cayley'sche Linienfläche dritten Grades mit einer Ebene ihrer Doppeldeveloppabeln und dem zu dieser gehörenden Punkt der Doppelgeraden. Der Complex hat vier Doppelgerade, er hat 14 Constante.

Die Doppelgeraden bilden augenscheinlich zunächst in der Doppeltangentialebene ein ausgeartetes Dreieck und die vierte geht durch eine seiner Ecken. Man vergleiche die Fälle: [(11)22] (S. 187) und [(11)4] (S. 190).

37. Für den Fall *[(12)3]* ergiebt sich das folgende Resultat:

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche mit einer Selbstberührungsgeraden und einer Rückkehrerzeugenden, also ein Unterfall von der Gattung Cremona VI. Der Complex hat drei Doppelgerade und 14 Constante.

38. Sehr einfache Verhältnisse sind bei *[(123)]*. Es ist:

$$\Omega \equiv x_2^2 + 2\,x_4 x_5 = 0, \qquad \Omega' \equiv x_4^2 = 0.$$

Die Geraden $x_2 = x_4 = 0$ bilden den *Ausnahmepunkt* A_2 und die *Ausnahmeebene* $y_1 = 0$. Diese Linien sind doppelte singuläre. Diejenigen von ihnen, die in $y_1 = 0$ durch A_1 gehen, sind vierfach singulär.

Der Complex besitzt ein Büschel von doppelten Complexgeraden: sein Mittelpunkt ist vierfach zählend die Enveloppe der singulären Ebenen und seine Ebene ebenfalls vierfach zählend der Ort der singulären Punkte. Die Zahl der Constanten ist 11.

Vergleichen wir hiermit [1(122)] (S. 186). Es rücken dort die Directricen der speciellen Congruenzen in eine Gerade g zusammen. Sei E die Ausnahmeebene, P in ihr der Ausnahmepunkt, so liegt g in E und geht durch P. Alle Complexkegelschnitte berühren E an g, die Complexkegel g in P.

VIII.

Siebente kanonische Form.

$$P \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} \cdot p_{42} + p_{14} \cdot p_{23} = 0$$

$$\Omega \equiv 2\,\lambda_1 x_1 x_2 + 2\,\lambda_2 x_3 x_4 + 2\,\lambda_3 x_5 x_6 + x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0.$$

Es sind *drei zweifache Elementartheiler* vorhanden. Damit treten *drei Doppelgerade* auf, die sich alle schneiden, die also entweder in einer Ebene ein Dreieck bilden, oder durch einen Punkt gehend ein Trieder bilden. Das sehen wir auch bei Ω. Ersetzen wir dort die drei quadratischen Glieder durch p_{12}^2, p_{13}^2, p_{14}^2, so tritt der erstere Fall ein, da die Directricen p_{12} etc. diese Doppelgeraden sind. Setzen wir dagegen p_{34}^2, p_{42}^2, p_{23}^2 hin, so haben wir den zweiten Fall. Weiterhin werden wir überall diese zwei dual gegenüberstehenden Möglichkeiten auseinanderhalten.

Es gehören die folgenden *drei* Gattungen hieher:

$$[222], \qquad [2(22)], \qquad [(222)].$$

39. In dem ersten Fall, *[222]*, haben wir:

(A.) *Die Doppelgeraden liegen in einer Ebene.* Es ist:

$$\Omega = 2\,\lambda_1 p_{12} p_{34} + 2\,\lambda_2 p_{13} p_{42} + p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0.$$

Die Directricen von $p_{12} = 0$ etc. sind Complexdoppelgerade. Sie machen die Ebene $y_1 = 0$, in der sie liegen, zur *Ausnahmeebene*. Die noch bleibende Fläche dritter Ordnung, vierter Klasse hat die Gleichung:

$$y_1 \left\{ y_1^2 - \lambda_2 y_2^2 - \lambda_1 y_3^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 y_4^2 \right\} - 2\,\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) y_2 y_3 y_4 = 0.$$

Die Untersuchung der Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen durch $y_1 = y_2 = 0$ etc. gehen, ergiebt das Resultat:

Die Singularitätenfläche ist die bekannte Fläche dritter Ordnung vierter Klasse mit vier conischen Knotenpunkten (deren 6 Verbindungslinien einfache Geraden der Fläche mit constanter Tangentialebene sind). Als ergänzende Ebene kommt die Ebene der drei Doppelaxen (die im Pentaeder der Fläche ausgezeichnete Ebene) hinzu.

(B.) *Die drei Doppelgeraden gehen durch einen Punkt.* Es ist:

$$\Omega \equiv 2\lambda_1 p_{12} \cdot p_{34} + 2\lambda_2 p_{13} \cdot p_{42} + p_{31}^2 + p_{42}^2 + p_{23}^2 = 0\,.$$

Wir haben hier vollständig den dualen Fall des Vorigen.

Die Singularitätenfläche besteht aus einem Punkt und einer Fläche vierter Ordnung, dritter Klasse, welche drei Doppelgerade besitzt, die sich in einem dreifachen Punkt treffen. Sie besitzt ausserdem vier Doppelebenen etc. und ist die sog. „Steiner'sche Fläche" („römische Fläche von Steiner"). Ihr dreifacher Punkt ist der ergänzende Complex-Ausnahmepunkt.

In beiden Fällen, A. und B., hat der Complex *16 Constante.*

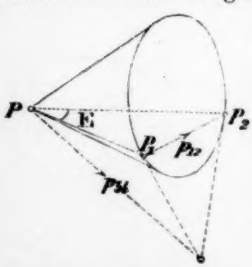
40. Setzen wir im vorigen Fall eines der λ Null, oder beide einander gleich, so erhalten wir für den Fall *[2(22)]*:

(A.) *Die Singularitätenfläche ist ein Kegel zweiter Ordnung K mit einer doppelt zählenden Ebene* E *durch seine Spitze P. Als Klassenfläche hat man zu betrachten: P doppelt zählend und zwei Punkte P_1, P_2 der in* E *liegenden Erzeugenden von K. Das Büschel von Geraden durch P in* E *besteht aus doppelten Complexgeraden.*

Die *singulären Linien* sind:

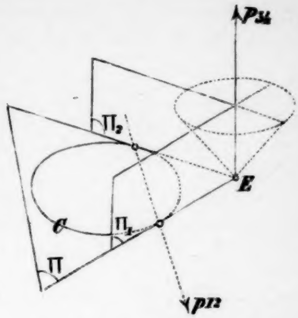
$$\begin{cases} p_{12} = (p_{13} + i p_{14})(p_{13} - i p_{14}) = 0\,. \\ p_{34} = p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0\,. \end{cases}$$

Die ersten beiden Congruenzen geben P_1, P_2 und doppelt die Ebene E. (Die Geraden in E sind also doppelte singuläre Linien, einfache Complexgerade, ausgenommen das Büschel durch P.) Die zweite Congruenz besteht aus den Geraden des speciellen Complexes $p_{34} = 0$, welche die Ebene E $(y_1 = 0)$ in einem Kegelschnitt $(y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0)$ treffen (s. Fall [(222)]). Die Construction des Complexes ist sehr einfach.



(B.) *Die Singularitätenfläche besteht doppelt zählend aus der Ebene* Π *und zwei Ebenen* Π_1, Π_2. *Als Klassengebilde hat man dagegen einen Kegelschnitt C in* Π, *den* Π_1 *und* Π_2 *berühren, ferner einen Punkt E, in dem sich die drei Ebenen* Π *schneiden, letzteren doppelt zählend.*

Die *singulären Linien* bestehen aus den Geraden in Π_1 und Π_2, ferner aus denen in Π doppelt zählend. Eine weitere Congruenz zweiten Grades (eine irreducible) wird gebildet durch die Geraden, welche die Verbindungslinie der Berührungspunkte von Π_1 und Π_2 mit C treffen, und ausserdem einen Kegel ($v_2^2+v_3^2+v_4^2=0$) berühren. Die Mitte dieses Kegels ist E. Die Ebene Π ist die auf ihn bezügliche Polarebene für die Gerade (Π_1, Π_2). Er berührt ferner die Geraden $\Pi\Pi_1$ und $\Pi\Pi_2$ in den Berührungspunkten derselben mit C etc.



Der Complex hat ein *Büschel von Doppelgeraden*. Diese liegen im Fall (A) in E und gehen durch P, bei (B) gehen sie durch E und liegen in Π. Die Geraden $\overline{P_1 P_2}$ und ($\Pi_1 \Pi_2$) sind ebenfalls Doppelgerade des Complexes und der Singularitätenfläche. — *Der Complex hat 13 Constante.*

Man vergleiche die Complexe mit [11(22)] (S. 184). Bei (A) zerfällt dort der Kegelschnitt in zwei Büschel, bei (B) der Kegel. Nimmt man im letzteren Fall C als imaginären Kugelkreis, so stehen in unserm gewöhnlichen Raum Π_1 und Π_2 zu einander senkrecht. Diese Specialisirung kommt in der Mechanik vor*). Der Complex hat die Beweglichkeit des tetraedralen, er lässt dreifach unendlich viel Transformationen in sich zu.

41. Der noch einzig zu behandelnde Fall ist *[(222)]*.

$$\text{(A.)} \qquad \Omega \equiv p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0, \qquad \Omega' \equiv 0.$$

Da $\Omega' \equiv 0$ ist, so ist jede Complexgerade singulär, *der Complex ist speciell.* — Eine Raumgerade p_{ik} trifft bekanntlich die Coordinatenebene $y_1 = 0$ in dem Punkt:

$$y_2 : y_3 : y_4 = p_{12} : p_{13} : p_{14}.$$

$\Omega = 0$ sagt also, dass alle Complexgerade die Ebene $y_1 = 0$ in Punkten des Kegelschnittes $y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$ ($y_1 = 0$) treffen. D. h.:

Der Complex besteht aus allen Treffgeraden eines Kegelschnittes. Derselbe bildet doppelt zählend die Singularitätenfläche. Alle zweifach unendlich vielen Geraden in der Ebene des Kegelschnittes sind Complex-Doppelgerade. (Die Tangenten des Kegelschnitts sind unter ihnen nicht weiter ausgezeichnet.)

(B.) Durch duale Uebersetzung des Vorigen erhalten wir:

*) Man vergleiche u. A. Chasles, Comptes rendus, 1843.

Der Complex besteht aus allen Tangenten eines Kegels. Alle Geraden durch den Mittelpunkt desselben sind doppelte Complexgerade.

Diese beiden Complexe haben 8 Constante.

IX.

Achte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + 2x_2x_6 + 2x_3x_5 + x_4^2 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda x_1^2 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4 = 0\,.$$

Es kommt ein *fünffacher Elementartheiler* vor. Wir haben hier die folgenden *zwei Fälle.*

$$[15], \qquad [(15)]\,.$$

Als Substitution der x in die p_{ik} wählen wir die folgende:

$$x_1 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \qquad x_2 = p_{13}, \qquad x_3 = p_{14}$$
$$x_4 = (p_{12} + p_{34}), \qquad x_6 = 2p_{42}, \qquad x_5 = 2p_{23},$$

42. Der Fall *[15]* wird uns über den Einfluss eines fünffachen Elementartheilers Aufschluss geben. — Die Singularitätenfläche wird:

$$\lambda_1 y_3^4 - 2y_3^3y_1 - 2\lambda_1 y_3^2 y_1 y_4 - 4\lambda_1 y_3 y_1^2 y_2 + y_3 y_1^2 y_4 - y_1^3 y_2 + \lambda_1 y_1^2 y_4^2 = 0.$$

$y_1 = y_3 = 0$ ist doppelt auf der Fläche, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ dreifach. $y_1 = 0$ ist stationäre Tangentialebene an der Doppelgeraden. Dieses Verhalten ist noch wie bei [114] (S. 189). Es giebt jedoch hier nur noch einen conischen Knoten. In [114] lasse man einfach einen Knoten in den dreifachen Punkt hineinrücken, so hat man diese Fläche.

Die Singularitätenfläche ist eine Fläche vierter Ordnung. Dieselbe besitzt eine Doppelgerade, auf ihr einen dreifachen Punkt, längs ihr eine stationäre Tangentialebene. Es kommt noch ein conischer Knoten vor, dessen Verbindungslinien mit dem dreifachen Punkt einfache Gerade der Fläche mit stationärer Tangentialebene ist. Diese letztere Ebene enthält auch die Doppelgerade etc. — Der Complex besitzt 15 Constante.

43. Für *[(15)]* ist oben $\lambda_1 = 0$ und es tritt das Folgende ein:

Die Singularitätenfläche ist eine Cayley'sche Linienfläche dritten Grades mit deren stationärer Ebene und deren stationärem Punkte. Der Complex besitzt 13 Constante.

Der Complex besitzt *vier unendlich nahe liegende Doppelgerade.* Sie bilden ein Dreieck, die vierte geht durch eine seiner Ecken. Dies Verhalten ist wie bei [(1)14] (S. 189); nur rückt die eine dort unterschiedene Doppelgerade den drei andern unendlich nahe, da man hier die Cayley'sche Linienfläche hat.

X.

Neunte kanonische Form.

$$P = x_1x_2 + x_3x_6 + x_4x_5 = p_{14}\cdot p_{23} + p_{42}\cdot p_{13} + p_{12}\cdot p_{34} = 0.$$
$$\Omega = 2\lambda_1 x_1x_2 + x_1^2 + 2x_3x_5 + x_4^2 = 0.$$

Es kommen hier *ein zweifacher und ein vierfacher Elementartheiler* vor. (Die zum letztern gehörige vierfache Wurzel ist hier als Null angenommen.) — Wir haben die *zwei Möglichkeiten:*

[24], [(24)]

44. In dem Fall *[24]* hat man einen *Ausnahmepunkt.* Er ist: $x_4 = x_1 = x_3 = 0$, resp. $p_{12} = p_{14} = p_{42} = 0$. Eine Ausnahmeebene tritt jedoch nicht auf. Wir erhalten also auch hier zwei sich dual gegenüberstehende Complexe. Zunächst erhalten wir bei obenstehendem Ω die Singularitätenfläche:

(A.) $\lambda_1 y_1^2 y_2^2 - 2\lambda_1 y_1 y_2^2 y_4 + 2\lambda_1^2 y_2 y_3 y_1^2 + y_2^2 y_4^2 + y_4^4 = 0.$

Die Singularitätenfläche ist vierter Ordnung, dritter Klasse, sie hat zwei Doppelgerade, die sich in einem dreifachen Punkt schneiden. Eine von ihnen besitzt eine stationäre Tangentialebene, die zweite hat eine adjungirte Gerade, welche die Vorige trifft. Der ergänzende Theil nullter Ordnung erster Klasse ist der dreifache Punkt.

Man sieht deutlich, wie diese Fläche zwischen [114] (S. 189) und [(11)4] in der Mitte steht. Sie ist eine der Plücker'schen Meridianflächen*).

(B.) *In dem dualen Fall* des vorigen erhalten wir für die Singularitätenfläche in Ebenencoordinaten v eben die vorige Gleichung, statt y_i überall v_i gesetzt. In Punkt-Coordinaten dagegen schreibt sie sich:

$$y_3\left\{y_3(y_1 - \lambda_1 y_4)^2 + 2y_2(\lambda_1^2 y_1^2 - y_3^2)\right\} = 0.$$

Die Discussion dieser Gleichung giebt:

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Ebene und einer Fläche dritter Ordnung, vierter Klasse. Letztere besitzt einen biplanaren Knoten und zwei conische. Die Seiten des durch diese gebildeten Dreiecks sind einfache Geraden der Fläche mit stationären Tangentialebenen. Eine Gerade durch den biplanaren Knoten ist ebenfalls einfache Gerade, nullfache Axe der Fläche. Eine fünfte Gerade endlich trifft diese letztere und die Verbindungslinie der conischen Knoten und ist einfacher Strahl und Doppelaxe der Fläche. Die ergänzende Ebene geht durch den biplanaren Knoten und die viertgenannte Gerade.

) Unter den Modellen von Eigel, Sohn, in Cöln („Modelle der Plücker'schen Flächen"*) ist sie die Nr. 24.

Macht man alle Knoten zu Coordinatenecken, so erhält man als kürzere Gleichungsform dieser Fläche:

$$(y_1 - y_3)y_4^2 + 4\,y_1 y_2 y_3 = 0\,.$$

Diese Fläche kann kurz bezeichnet werden als *Gattung VIII von Schläfli's Flächen dritter Ordnung.**)

Der Complex hat 15 Constante. In beiden Fällen erhält man aus $\Omega = 0$ die beiden Doppelgeraden, wenn man das eine Mal die vierfache Wurzel λ_3, das andere Mal die doppelte λ_1 als Null annimmt.

45. Für *[(24)]* ist im vorigen Fall $\lambda_1 = 0$ zu nehmen. Wir erhalten für die Singularitätenfläche

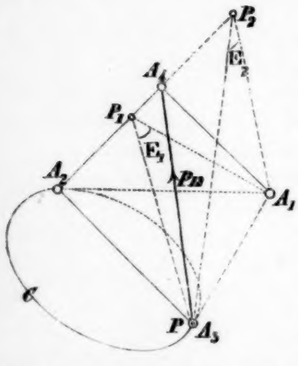
(A.) $y_4^2(y_2^2 + y_4^2) = 0$ und: $v_3^2(v_1^2 - 2\,v_2 v_3) = 0\,.$

Das ist ein Kegelschnitt C mit einem seiner Punkte P doppelt zählend, und mit zwei seiner Tangentialebenen E_1, E_2 *durch P.*

Für *die singulären Linien* erhält man:

$$p_{12} = p_{14}^2 + 2\,p_{12} \cdot p_{34} = 0\,, \quad p_{12} = (p_{14} + ip_{12})(p_{14} - ip_{12}) = 0\,.$$

Die erste Congruenz besteht aus denjenigen Treffgeraden unseres Kegelschnitts C, welche die Gerade $A_3 A_4$ (s. die Figur) treffen. Die zweite besteht aus den zwei Ebenen E_1, E_2, *ferner doppelt zählend aus den Geraden durch P. — Das Büschel der Geraden durch P in der Ebene von C besteht aus doppelten Complexgeraden.* (Die Ebenen E_1, E_2, die Kegelschnittebene und $y_2 = 0$ liegen harmonisch.)



Die Complexkegelschnitte werden von den Geraden der ersten Congruenz an C berührt. In jeder Ebene hat man, wenn die Singularitätenfläche bekannt ist, für den Complexkegelschnitt sechs bekannte Tangenten, nämlich die vier singulären Linien und von zweien die Berührungspunkte. Der Complex ist damit sehr einfach construirbar. — Man erkennt die Aehnlichkeit mit früheren Fällen z. B. mit [11(22)] (S. 184).

(B.) Die duale Uebersetzung des Vorigen giebt:

Die Singularitätenfläche besteht aus einem Kegel K mit einer seiner Tangentialebenen Π *doppelt zählend und mit zwei Punkten E_1, E_2 der Erzeugenden in* Π.

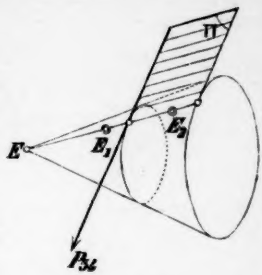
---

*) Vgl. die Abhandlung von Schläfli in den Phil. Transactions 1863, vol. 153.

Die *singulären Linien* sind:

$$p_{34} = p_{23}^2 + 2\, p_{12} \cdot p_{13} = 0\,, \quad p_{13} = (p_{23} + i p_{34})(p_{23} - i p_{34}) = 0\,.$$

Die erste Congruenz besteht aus denjenigen Tangenten unseres Kegels K, welche eine feste Tangente p_{34} treffen. Diese Tangente liegt in Π und trifft die Erzeugende $E_1 E_2$ des Kegels in einem Punkt, der zur Kegelspitze in Bezug auf E_1 und E_2 harmonisch liegt. Die zweite Congruenz besteht aus allen Geraden, die in Π liegen (dieselben zählen doppelt), sowie aus denjenigen, die durch P_1 oder P_2 gehen.



Wie vorhin die Geraden durch P sind hier die Geraden in Π dreifache singuläre Linien und einfache Complexgerade. Das Büschel der Geraden in Π, die durch den Berührungspunkt von p_{34} mit K gehen, besteht aus doppelten Complexgeraden.

Die Construction dieses Complexes aus Complexkegeln ist die duale Uebersetzung der oben angeführten Construction. Die Complexkegelschnitte berühren den Kegel K zweimal, erstens an $E_1 E_2$ und noch in einem Punkt, dem Berührungspunkt der einfach-singulären Linie der betreffenden Ebene mit K. Der Kegelschnitt ist also durch die Singularitätenfläche nicht direct bestimmt, während der Complexkegel überbestimmt wäre. (Derselbe geht nämlich durch E_1 und E_2, berührt ferner K an den singulären Geraden der oben zuerst angeführten Congruenz.

Der Complex hat 12 Constante.

XI.

Zehnte kanonische Form.

$$P = 2\, x_1 x_3 + x_2^2 + 2\, x_4 x_6 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega = \lambda_1 (2\, x_1 x_3 + x_2^2) + 2\, x_1 x_2 + 2\, x_4 x_5 = 0\,.$$

Man hat hier *zwei dreifache Elementartheiler.* Es treten nur die folgenden *zwei Fälle* auf:

$$[33]\,, \qquad [(33)]\,.$$

Als Uebergang zu den p_{ik} haben wir:

$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} + p_{34})\,, \qquad x_1 = i p_{13}\,, \qquad x_4 = p_{14}$$
$$x_5 = p_{12} - p_{34}\,, \qquad x_3 = 2\, i p_{42}\,, \qquad x_6 = -2 p_{23}\,.$$

46. Die Singularitätenfläche des Falles *[33]* ist:

$$\lambda_1^3 (y_1 y_2 + y_3 y_4)^2 + \lambda_1 y_1^2 (y_1 y_2 - y_3 y_4) + y_1^3 (y_3 + y_4) = 0\,.$$

$y_1 = y_3 = 0$ und $y_1 = y_4 = 0$ sind die Rückkehrgeraden, die man von vorne herein zu erwarten hatte. Ihr Schnittpunkt ist uniplanar. Die projectivische Zuordnung an *beiden* Rückkehrgeraden ist gegeben durch $y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0$. Dadurch erkennt man den uniplanaren Knoten deutlich. — Unsere Fläche zweiten Grades schneidet neben den Rückkehrgeraden noch einen Kegelschnitt aus, der nicht zerfällt. — Es giebt eine Schaar von Flächen zweiten Grades, die alle unsere Fläche an beiden Rückkehrgeraden berühren und ausserdem Kegelschnitte ausschneiden. Sie heissen:

$$y_1^2 + \mu(y_1 y_2 + y_3 y_4) = 0 .$$

Eine einzige von ihnen, abgesehen von $\mu = 0$, giebt einen zerfallenden Kegelschnitt. Er besteht aus Geraden der Fläche, die ihrer ganzen Länge nach constante Tangentialebenen besitzen etc. Wir finden so:

Die Singularitätenfläche besitzt zwei Rückkehrgerade, die sich in einem uniplanaren Knoten schneiden. Ferner hat sie einen conischen Knoten, von dem aus zwei einfache Gerade an die Rückkehrgeraden gehen, die constante Tangentialebenen besitzen. Eine covariante Fläche zweiten Grades berührt nach den Rückkehrgeraden und enthält ausserdem diese einfachen Geraden der Fläche. — Der Complex hat 15 Constante.

Man möge hier die Abstufung betrachten von [1122] (S. 183) zu [123] (S. 191) und diesen Fall. Bei [123] stelle man sich vor, die ganze Gerade 13 falle in $A_1 A_2$ hinein.

47. Setzt man im vorigen Fall $\lambda_1 = 0$, so hat man *[(33)]*, dargestellt durch:

$$\Omega \equiv x_1 x_2 + x_4 x_5 = 0 , \qquad \Omega' \equiv x_1^2 + x_4^2 = 0 .$$

Die Singularitätenfläche besteht dreifach zählend aus einem Punkt P, mit einer durch ihn gehenden Ebene E. Als Ergänzung hat man eine weitere Ebene durch P und einen weiteren Punkt in E. — Die singulären Linien bestehen aus zwei speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen in E durch P gehen und aus der doppelt zu zählenden, zerfallenden Congruenz, deren Geraden E und P erfüllen. — Der Complex hat 12 Constante.

Das Büschel (EP) besteht aus *doppelten Complexgeraden.*

Es seien E, P und die beiden Directricen d_1, d_2 beliebig angenommen. Eine zu d_1 unendlich nahe Gerade d_1' (die nicht in E verläuft) treffe d_2. Dasselbe thue die Gerade d_2' gegenüber d_2, resp. d_1. In einer beliebigen Ebene des Raumes hat man dann von dem Complexkegelschnitt zwei Tangenten, die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit d_i, d_i' und deren Berührungspunkte, die an d_i liegen, gegeben.

Eine absolute Invariante bestimmt einen solchen Kegelschnitt. Man erhält zweifach unendlich viele Kegelschnitte, wenn man um seine Tangenten die Ebene dreht. Jeder ist durch fünf Gerade gegeben. Die Construction dieses Complexes ist also wieder besonders einfach, im Uebrigen ganz ähnlich wie bei gewissen früheren Fällen.

XII.

Elfte kanonische Form.

$$P \equiv x_1 x_6 + x_2 x_5 + x_3 x_4 = 0 .$$
$$\Omega \equiv 2\, x_1 x_5 + 2\, x_2 x_4 + x_3^2 = 0 .$$

Hier ist *ein sechsfacher Elementartheiler* vorhanden. Die sechsfache Wurzel ist Null gesetzt. — Alle Fundamentalcomplexe sind speciell und wir dürfen setzen:

(A.) $x_1 = p_{34}, \quad x_2 = p_{14}, \quad x_3 = p_{12}, \quad x_4 = p_{13}, \quad x_5 = p_{23}, \quad x_6 = p_{12}$

(B.) $x_1 = p_{12}, \quad x_2 = p_{23}, \quad x_3 = p_{13}, \quad x_4 = p_{42}, \quad x_5 = p_{14}, \quad x_6 = p_{34} .$

48. Der Fall *[6]* ist der einzige hier vorkommende.

(A.) $\qquad \Omega \equiv 2\, p_{34} \cdot p_{23} + 2\, p_{14} \cdot p_{13} + p_{12}^2 = 0 .$

$p_{14} = p_{24} = p_{34}$ ist *Ausnahmeebene*, ein Ausnahmepunkt tritt nicht auf. Die Singularitätenfläche ist:

$$y_4 [y_1^2 y_4 + 2\, y_2 y_3 y_4 - 2\, y_3^3] = 0 .$$

Diese Fläche dritter Ordnung vierter Klasse besitzt den biplanaren Knoten A_2 und den conischen A_4. Ihre Verbindungslinie hat die constante Tangentialebene $y_3 = 0$. Eine weitere Gerade $A_1 A_2$, die durch den conischen Knoten geht, hat eine stationäre dreifache Tangentialebene $y_4 = 0$, an der jeder ebene Schnitt der Fläche eine Wendung hat. Andere Singularitäten kommen nicht vor. — Wir finden durch Vergleich:

Die Singularitätenfläche besteht aus der Gattung XIX der Flächen dritter Ordnung, vierter Klasse von S c h l ä f l i, *mit ihrer stationären dreifachen Tangentialebene.*

S c h l ä f l i hat die Fläche auf dasselbe Coordinatensystem bezogen. — *Der Complex hat drei Doppelgerade, die in einer Ebene unendlich nahe liegen.*

(B.) In dem dualen Fall hat man.

$$\Omega \equiv 2\, p_{12} \cdot p_{14} + 2\, p_{23} \cdot p_{42} + p_{13}^2 = 0 .$$

Der Punkt $p_{12} = p_{23} = p_{13}$ ist hier *Ausnahmepunkt*. — Die Gleichung der Singularitätenfläche in Ebenencoordinaten ist die obenstehende, wenn man statt der y die v setzt; in Punktcoordinaten lautet sie:

$$y_1^4 + 2\, y_1^2 y_2 y_3 + 2\, y_3^3 y_4 + y_2^2 y_3^2 = 0 .$$

Ein Punkt und eine Fläche vierter Ordnung, dritter Klasse bilden die Singularitätenfläche. Letztere hat einen dreifachen Punkt, der uniplanar ist und durch den eine Doppelgerade der Fläche geht, die eine zweifache stationäre Tangentialebene hat. Die Ergänzung ist der dreifache Punkt.

Der Complex hat 14 Constante.

XIII.

In diesem letzten Abschnitt soll es sich darum handeln, eine Uebersicht über die 48 nunmehr einzeln untersuchte Complexe zu bekommen. Zuerst sollen allgemein geltende Sätze für sich ausgesprochen werden und nachher werden die einzelnen Fälle durch Tabellen verbunden.

Es treten in allen Fällen Gerade auf, die dem Complex doppelt angehören. Für jede solche ist sowohl $\Omega = 0$ als auch $\Omega' = 0$ doppelt erfüllt und wir haben:

In allen den 48 Fällen treten Complexdoppelgerade auf, welche der Congruenz der singulären Linien je vierfach zählend angehören.

Die Bedeutung der Doppelgeraden für den Complex ist die folgende:

Jede Doppelgerade des Complexes ist Doppelgerade der Singularitätenfläche. Umgekehrt ist auch jede Doppelgerade der Singularitätenfläche eine doppelte Complexgerade.

Den ersten dieser Sätze haben wir früher bewiesen, der zweite ist einstweilen Erfahrungssatz. — Für diese Doppelgeraden gilt weiterhin der folgende Satz:

Ist die Zahl der Doppelgeraden 'discret, so gruppiren sie sich wie eine entsprechende Anzahl von Kanten eines Tetraeders. Mehr als sechs, ausser unendlich viele, kommen nicht vor.

Die Tetraederkanten kann man z. B. auf drei wesentlich verschiedene Weisen zu je drei gruppiren. Entweder liegen sie in einer Seitenfläche, oder sie gehen durch eine Ecke oder endlich zwei von ihnen sind Gegenkanten und werden von der dritten getroffen. Alle diese drei Gruppen (wovon die beiden ersten linien-geometrisch gleichwerthig sind) kommen auch wirklich vor*).

Ist *eine einfach unendliche Anzahl von Doppelgeraden wirklich* vorhanden, so ist der am nächsten liegende Fall, dass sie *eine Erzeugung einer Fläche zweiten Grades* bilden. Diese F_2 ist dann doppelt zählend die Singularitätenfläche. Sie kann allgemein sein, ausarten, insbesondere zerfallen. Wenn sie in eine sich selbst dualistische Form

*) In einer vorläufigen Mittheilung in den Sitzungsberichten der phys.-med. Societät zu Erlangen vom Juli 1873 habe ich die 48 Complexe nach der Anzahl der Doppelgeraden geordnet.

ausarten soll, so zerfällt sie in zwei Ebenen, resp. zwei Punkte auf deren Schnittlinie. Die Erzeugenden bilden vier Büschel, die in den Ebenen E_1, E_2 durch die Punkte P_1, P_2 gehen. Die Büschel $E_1 P_1$ und $E_2 P_2$ bilden dann die eine Erzeugung dieser zerfallenen Fläche, $E_1 P_2$ und $E_2 P_1$ die andere. *Zwei so zusammengehörige Büschel repräsentiren dann die doppelten Complexgeraden.* — In noch specielleren Fällen können E_1 und E_2, P_1 und P_2 zusammenrücken.

Es kann auch sein, dass *nur ein Büschel von Doppelgeraden* auftritt, das nicht mehr als eine Erzeugung einer F_2 aufgefasst werden kann. Die Ebene des Büschels gehört der Singularitätenfläche doppelt an, ebenso der Mittelpunkt des Büschels. In der ersteren hat man einen Kegelschnitt, durch den letztern einen Kegel, der den genannten Kegelschnitt berührt.

Sind einfach unendlich viel Doppelgerade vorhanden, welche *beide Erzeugungen einer* F_2 ausmachen, so besteht der Complex aus allen Tangenten von F_2.

Ist dann F_2 ein *Kegelschnitt*, so besteht der Complex aus *allen Treffgeraden desselben* (dual aus allen Tangenten eines Kegels). Dann giebt es *zweifach unendlich viele Doppelgerade des Complexes*, sie liegen in der Ebene des Kegelschnittes. (Im dualen Fall sind sie die Geraden durch die Kegelspitze.) — Andere Fälle mit zweifach unendlich vielen Doppelgeraden kommen nicht vor, wenn wir zerfallende Complexe ausschliessen.

Das Zerfallen der Singularitätenfläche geschieht stets zusammen mit dem der Congruenz der singulären Linien. Es gilt hiefür das folgende Gesetz:

Ist eine Fläche m^{ter} *Ordnung* n^{ter} *Klasse Theil der Singularitätenfläche, so gehört von ihren Tangenten eine Congruenz* n^{ter} *Ordnung,* m^{ter} *Klasse den singulären Linien an, und umgekehrt.*

Zerfällt also die Singularitätenfläche nicht, so thut das auch die Congruenz der singulären Linien nicht. Es haben daher gerade die Fälle ein besonderes liniengeometrisches Interesse, bei denen die Singularitätenfläche zerfällt.

In den meisten Fällen ist die Abzählung der *Constanten* sehr leicht. Es dürfen hier ähnliche Inductionsschlüsse angewandt werden, wie bei den Doppelgeraden. Wenn z. B. das Auftreten eines zweifachen Elementartheilers die Constantenzahl um eins verringert, so vermindert ein neu auftretender doppelter Elementartheiler (vorausgesetzt, dass in beiden Fällen derselbe an Stelle von zwei einfachen Elementartheilern tritt) diese Zahl nochmals um eins.

Die Abzählung der *absoluten Invarianten* ist etwas weniger einfach, bietet jedoch keine Schwierigkeiten. Klein giebt eine Formel an für die willkürlichen Constanten, die bei der Transformation in die kano-

nische Form auftreten*). Hat der Complex m Constante und ist die Zahl dieser willkürlichen Constanten n, so ist die Zahl der absoluten Invarianten $m - 15 + n$. Dabei ist jedoch die erste kanonische Form vorausgesetzt, resp. es tritt als Bedingung auf, dass alle Elementartheiler einfach sind. Für die erste kanonische Form findet man so die Zahlen:

[111111],	[1111(11)],	[111(111)],	[11(11)(11)],	[1(11)(111)],
4,	3,	2,	2,	1,

[(11)(11)(11)],	[(111)(111)].
1,	0.

Für spätere Fälle habe ich diese Abzählung unterlassen.

Die Eintheilung der Complexe kann von ganz verschiedenen Gesichtspunkten aus geschehen. In der Arbeit selbst sind die Elementartheiler obenangestellt, sie gaben die Eintheilung in die kanonischen Formen, was für die Behandlung das einfachste ist, da sie eine übersichtliche und erschöpfende Eintheilung geben. Wir sagten auch früher schon, dass man ganz ebenso erst nach den Wurzeln λ und innerhalb dessen nach den Elementartheilern eintheilen könnte. Hierauf gehen wir auch hier nicht weiter ein. Dagegen soll *die Anzahl der doppelten Complexgeraden* für die erste Tabelle die Unterscheidung abgeben. In der zweiten, ausführlicheren Tabelle soll *nach den Flächengattungen, die als Singularitätenflächen auftreten*, geordnet werden. Für jeden Complex ist die Constantenzahl angegeben. Man erkennt nach den oben ausgesprochenen Sätzen über die Doppelgeraden, dass beide Eintheilungen sich nahe berühren. In der letzten Tabelle sind alle Complexe mit je gleich viel *Constanten* zusammengestellt.

Tabelle I.

Eintheilung nach der Zahl der Doppelgeraden.

1 Doppelgerade	[11112], [1113], [114], [15]
2, sich schneidende . . .	[1122], [123], [24], [33]
2 windschiefe	[1111(11)], [111(12)]
3, als Dreieck resp. Trieder	[222], [6]
3, 2 windsch. treffen die dritte	[11(11)2], [1(11)3], [(11)4], [12(12)], [3(12)], [11(13)]
4, Vierseit	[11(11)(11)], [1(11)(12)], [(12)(12)]
4, Dreieck und Trieder . .	[(11)22], [2(13)], [1(14)], [(15)]
5 Doppelgerade	[(11)(11)2], [(11)(13)]
6 Doppelgerade	[(11)(11)(11)]

*) Vgl. S. 42 der Dissertation.

Ein Büschel	[(11)(22)], [2(22)], [11(22)], [1(23)], [(24)], [(33)]
Eine Erzeugung von F_2 . .	[111(111)], [11(112)], [1(113)], [(114)], [1(11)(111)], [(11)(112)], [(12)(111)], [12(111)], [3(111)], [2(112)], [1(122)], [(123)]
Beide Erzeugungen von F_2 .	[(111)(111)]
Strahlfeld oder Strahlbündel	[(222)].

Tabelle II.

Aufzählung der Singularitätenflächen.

Nicht-Linienflächen 4. Ordnung und Klasse.

El.-Th.	Nr.	Const.	
111111	—	19	Allgemeine Kummersche Fläche.
11112	7	18	Complexfläche, als Leitgerade eine beliebige Raumgerade.
1113	16	17	Complexfläche, als Leitgerade eine Complexgerade,
114	30	16	Complexfläche, als Leitgerade eine singuläre Linie.
15	42	15	Fläche mit 1 Doppelgeraden und 1 con. Knoten.
1122	22	17	Fläche mit 2 Doppelgeraden und 4 con. Knoten.
123	34	16	1 Rückkehrgerade, 1 Doppelgerade, 2 con. Knoten
33	46	15	2 Rückkehrgerade, 1 con. Knoten.

Linienflächen vierten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
1111(11)	1	17	Cremona XI, die allgemeine.
111(12)	8	16	„ XII, die allgemeine (Lie 1)*).
11(13)	17	15	„ X, die allgemeine (Lie 7).
1(14)	31	14	„ X, die stationären Ebenen vereinigt (Lie 10).
11(11)2	9	16	„ V, die allgemeine.
1(11)3	18	15	„ V, mit Rückkehrerzeugender.
12(12)	24	15	„ VI, die allgemeine (Lie 2).
3(12)	37	14	„ VI, mit Rückkehrerzeugender (Lie 4).

Flächen 3. (4.) Ordnung, 4. (3.) Klasse.

El.-Th.	Nr.	Const.	
222	39	16	Fläche mit 4 conischen Knoten etc. Dual: Steiner'sche Fläche.
24	44	15	Fläche mit 2 conischen Knoten, 1 biplanarem, Schläfli XVIII.

---

*) Vgl. Lie: „*Ueber Complexe* . . .“ Diese Annalen, Bd. V, S. 238.

El.-Th.	Nr.	Const.	
6	48	14	Fläche mit 1 conischen Knoten, 1 biplanarem, Schläfli XIX.

Linienflächen dritten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
(11)22	26	15	Allgemeine, als Ergänzung ein beliebiger Doppelpunkt etc.
(11)4	32	14	Allgemeine, als Ergänzung ein Cuspidalpunkt.
2(13)	36	14	Cayley'sche, mit bel. Doppelpunkt (Lie 8).
(15)	43	13	„ , mit Cuspidalpunkt (Lie 11).

Zwei Flächen zweiten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
11(11)(11)	3	15	Die F_2 haben ein räumliches Vierseit gemein etc.
1(11)(12)	11	14	Die F_2 berühren sich nach einer Erzeugenden.
(12)(12)	28	13	Die F_2 berühren sich nach zwei Erzeugenden.
11(22)	23	14	Kegel und Kegelschnitt.
1(23)	35	13	Kegel und Kegelschnitt, der letztere durch die Spitze des ersteren.

Eine Fläche zweiten Grades (F_2) und zwei Ebenen (E_1, E_2) nebst zwei Punkten (P_1, P_2).

El.-Th.	Nr.	Const.	
(11)(11)2	13	14	E_1 und E_2 tangiren F_2 in P_1 und P_2.
(11)(13)	20	13	E_1 und E_2 gehen durch dieselbe Erzeugende von F_2, P_1 und P_2 liegen auf ihr.
2(22)	40	13	F_2 ist Kegel, $E_1 = E_2$ durch dessen Spitze etc.
(24)	45	13	F_2 ist Kegel, $E_1 = E_2$ ist Tangentialebene.

Eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
111(111)	2	14	4 lineare Congruenzen singulärer Linien, die 8 Directricen gehören einer Erzeugung v. F_2 an.
1(11)(111)	4	12	2 lineare Congruenzen singulärer Linien, die 8 Directricen zu je 4 vereinigt.
(111)(111)	6	9	Der Complex besteht aus den Tangenten von F_2.
12(111)	12	13	3 lin. Congruenzen sing. Linien, 1 davon speciell und dopp. zählend.
(12)(111)	15	11	1 lin. Cong. sing. Lin, 4fach zählend und spec.
3(111)	21	12	2 lin. Congruenzen sing. Linien, 1 davon speciell und 3fach zählend.
(222)	41	8	Complex besteht aus den Tangenten eines Kegels resp. den Treffgeraden eines Kegelschnittes.

Vier Ebenen ($E_1 \cdot\cdot E_4$) und vier Punkte ($P_1 \cdot\cdot P_4$).

El.-Th.	Nr.	Const.	
(11)(11)(11)	5	13	Tetraedraler Compl., E und P bild. ein Tetraeder.
11(112)	10	13	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 4 lineare Cong. sing. Lin.
1(113)	19	1	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 3 lineare Cong. sing. Lin. (1 davon speciell).
(11)(112)	14	11	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 2 dopp. Büschel sing. Lin.
1(122)	25	12	$E_1 = \cdot\cdot = E_4$, 2 dopp. zähl. spec. lin. Cong.
2(112)	27	12	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 3 lin. Cong. (1 dopp. zähl. zerfall. und 2 spec.)
(11)(22)	29	12	$E_1 = E_2$, E_3, E_4. E_1 erfüllt mit dopp., E_3 und E_4 mit einf. sing. Lin.
(114)	33	11	$E_1 = E_2$, erfüllt mit dreif. sing. Lin., ausserdem 1 Cong. sing. Lin.
(123)	38	11	$E_1 = \cdot\cdot = E_4$, erfüllt mit vierf. sing. Lin.
(33)	47	12	$E_1 = E_2 = E_3$, erfüllt mit dopp. sing. Lin., 2 spec. Cong. (die Directricen in E_4 durch P_4).

Tabelle III.

Aufzählung nach der Constantenzahl.

Const.	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8.
El.-Th.	111111	11112	1113	114	15	6						
			1111(11)	111(12)	11(13)	1(14)	(15)					
			1122	222	(11)22							
				123	33	(12)3						
				11(11)2	1(11)3	(11)4						
					24	2(13)	2(22)	2(112)				
					11(11)(11)	1(11)(12)	(11)(13)					
					12(12)	11(22)	1(23)	(33)				
						2(11)(11)	(11)(11)(11)	1(11)(111)	(12)(111)	.	(111)(111)	
						111(111)	11(112)	1(113)	(114)			
							(12)(12)	(11)(22)	(11)(112)			
							1(111)2	(111)3				
								1(122)	(123)	.	.	(222)
								(24)				

Erlangen, im Juli 1873.

Ueber die Plücker'sche Complexfläche.

Von Felix Klein in Erlangen.

Aus der Discussion der Liniencomplexe zweiten Grades, wie sie Hr. Weiler in dem vorstehenden Aufsatze durchgeführt hat, geht hervor, dass die Plücker'sche Complexfläche gleich der allgemeineren Kummer'schen Fläche für unendlich viele Complexe zweiten Grades die singuläre Fläche*) bildet, und dass dieselbe also mit ganz ähnlichen Mitteln untersucht werden kann, wie dies der Verf. früher (diese Annalen Bd. II, S. 198 ff.) bei der Kummer'schen Fläche gethan hatte. Das System der sechs paarweise in Involution liegenden linearen Complexe, welches bei der Kummer'schen Fläche eine fundamentale Rolle spielte, ist bei der Complexfläche nur in dem Sinne ausgeartet, dass zwei dieser Complexe, indem sie zusammenrückten, speciell wurden und in die Doppellinie der Fläche übergingen. Mit Bezug auf die vier übrigen linearen Complexe bleiben durchaus die Schlussweisen bestehen, welche bei der Kummer'schen Fläche ihre Anwendung fanden, und man hat also insbesondere den Satz:

Eine Plücker'sche Complexfläche ist mit Bezug auf vier paarweise in Involution liegende lineare Complexe ihre eigene reciproke Polare.

Aus diesem Satze folgt ohne Weiteres, dass das Doppelverhältniss der vier singulären Punkte der Complexfläche gleich dem Doppelverhältnisse ihrer vier Ebenen sei. Indem man sodann die Complexfläche nicht mehr als singuläre Fläche eines besonderen Complexes zweiten Grades betrachtet, sondern in der Art, wie sie bei Plücker eingeführt wird, d. h. als Brennfläche derjenigen Linien eines Complexes zweiten Grades, welche eine feste Gerade schneiden, erhält man:

Die vier Punkte, in denen eine beliebige Gerade die singuläre Fläche eines Complexes zweiten Grades trifft, und die vier Ebenen, die man durch dieselbe Gerade als Tangentenebenen der singulären Fläche legen kann, haben dasselbe Doppelverhältniss.

Diesen Satz habe ich für die singuläre Fläche des allgemeinen Complexes vom zweiten Grade, d. h. für die Kummer'sche Fläche,

*) Ich ziehe diesen von Hrn. Voss vorgeschlagenen Ausdruck (Gött. Nachrichten 1873, p. 546) dem sonst gebräuchlichen „Singularitätenfläche" vor.

bereits in diesen Annalen Bd. II, S. 215, mitgetheilt; aber der Zusammenhang, in welchem er dort ausgesprochen ist, kann nicht als Beweis desselben gelten.

Um so lieber will ich hier eine einfache Betrachtung mittheilen, die in Anlehnung an die von Plücker begonnene Untersuchungsweise der Complexflächen (vgl. dessen Neue Geometrie S. 205 ff.) unmittelbar die vier zur Fläche gehörigen linearen Complexe nachweist und aus ihrer Existenz die Gleichheit der fraglichen Doppelverhältnisse, sowie weiterhin die Eigenschaft der Fläche erschliesst, ihre eigene reciproke Polare zu sein. Aus der Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse wird man weiterhin, was bei Plücker in minder übersichtlicher Weise bewiesen wird, den Satz von der Identität der von den singulären Punkten gebildeten und der von den singulären Ebenen umhüllten Fläche gewinnen. Ist nämlich das Doppelverhältniss der vier Punkte, in welchen eine beliebige Gerade die erste Fläche trifft, immer gleich dem Doppelverhältnisse der vier Ebenen, welche man durch die Gerade hindurch an die zweite Fläche legen kann, so sind die Tangenten der ersten Fläche immer auch Tangenten der zweiten Fläche, d. h. die beiden Flächen sind identisch*), w. z. b.

Für die Singularitäten der Complexfläche, wie sie Plücker nachweist, sollen im Nachstehenden, soweit sie in Betracht kommen, die folgenden Bezeichnungen**) angewandt werden. Die vier singulären Ebenen der Fläche mögen E_1, E_2, E_3, E_4 heissen. Sie enthalten je ein Paar von Doppelpunkten der Fläche: 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4'. Die in ihnen verlaufenden Verbindungslinien der Doppelpunktpaare, die singulären Strahlen der Fläche, seien S_1, S_2, S_3, S_4. Dieselben schneiden die Doppellinie und die Polare der Fläche bez. in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 und q_1, q_2, q_3, q_4, die jedesmal zu den zwei auf dem singulären Strahle gelegenen Doppelpunkten harmonisch sind. Weiter sollen die vier singulären Punkte der Fläche P_1, P_2, P_3, P_4 genannt sein. Von ihnen gehen die Paare Doppelebenen *I, I'; II, II'; III, III'; IV, IV'* aus. Die singulären Axen endlich, in welchen sich die zusammengehörigen Doppelebenen schneiden, seien durch A_1, A_2, A_3, A_4 bezeichnet.

Die Doppelebenen der Fläche enthalten (vgl. Plücker) jedesmal vier Doppelpunkte und durch jeden Doppelpunkt gehen vier Doppel-

*) Der Nachweis der Identität der beiden Flächen ist durch Hrn. Pasch in seiner Habilitationsschrift (Giessen 1870) auf allgemeinere und fundamentalere Betrachtungen betr. Brennflächen von Congruenzen zurückgeführt worden. Der im Texte angegebene Beweis scheint aber immer dadurch interessant, dass er bis zum Schlusse die Vorstellung des Unendlich-Kleinen vermeidet.

**) Vgl. Clebsch's Bericht über Plücker's Neue Geometrie in den Göttinger Anzeigen, 1869.

ebenen hindurch. Man kann die festgesetzten Bezeichnungen insbesondere so wählen, dass dieses Verhältniss in dem folgenden Schema seine Darstellung findet:

Ebenen	Punkte	Ebenen	Punkte
I	1 2 3 4	*I'*	1' 2' 3' 4'
II	1 2 3' 4'	*II'*	1' 2' 3 4
III	1 2' 3 4'	*III'*	1' 2 3' 4
IV	1 2' 3' 4	*IV'*	1' 2 3 4'

Ich behaupte nun zunächst, dass es möglich ist, die 8 Doppelpunkte den 8 Doppelebenen in den folgenden vier Weisen durch lineare Complexe zuzuordnen. *Es entsprechen den Punkten:*

1, 1', 2, 2', 3, 3', 4, 4'

bezüglich die Ebenen:

I, I', II, II', III, III', IV, IV'
II, II', I, I', IV', IV, III', III
III, III', IV', IV, I, I', II', II
IV, IV', III', III, II', II, I, I'.

Gesetzt, es sei dieses bewiesen, dann folgt unmittelbar, dass die vier betreffenden linearen Complexe paarweise in Involution liegen. Denn die Zuordnungen, wie sie durch das vorstehende Schema gegeben sind, haben ersichtlich die Eigenschaft, paarweise vertauschbar zu sein, und die Vertauschbarkeit der mit ihnen verknüpften Zuordnungen ist für lineare Complexe das Kennzeichen der involutorischen Lage (vgl. diese Annalen Bd. IV, S. 414).

Um aber den nöthigen Beweis zu führen, construire ich vier lineare Complexe aus je fünf denselben angehörigen Linien und zeige sodann, dass sie die voraufgeführten Zuordnungen zur Folge haben. Es soll dies der Kürze wegen nur mit Bezug auf die erste Zuordnung auseinandergesetzt werden. Man construire nämlich den linearen Complex, der die folgenden fünf Geraden enthält:

die Doppellinie der Fläche,
die Polare,
die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte 2, 3'; 3, 4'; 4, 2'.

Man betrachte sodann etwa die singulären Strahlen S_2 und S_3. Die Linien des linearen Complexes, welche beide schneiden, müssen eine Regelschaar bilden und vermöge derselben werden die beiden Punktreihen S_2 und S_3 projectivisch auf einander bezogen sein. Aber von

dieser Regelschaar sind drei Erzeugende bekannt: die Doppellinie, die Polare und die Gerade 2, 3'. Sie ordnen den Punkten p_2, q_2, 2 von S_2 die Punkte p_3, q_3, 3' von S_3 zu. Da aber p_2, q_2 auf S_2 zu 2, 2' und p_3, q_3 auf S_3 zu 3, 3', oder, was dasselbe ist, zu 3', 3 harmonisch sind, so werden auch 2', 3 durch die Regelschaar zugeordnet werden. *Dem linearen Complexe gehört also auch die Gerade 2', 3 an.* Dasselbe beweist man in ähnlicher Weise von den Geraden 3', 4; 4', 2.

Unter den geraden Linien, die durch den Punkt 2 hindurchgehen, kennt man jetzt zwei als dem linearen Complexe angehörig, nämlich 2, 3' und 2, 4'. Dem Punkte 2 ist also im Complexe die Ebene 2, 3', 4', d. h. nach der oben festgesetzten Bezeichnung die Ebene *II* zugeordnet. Dieselbe geht ausser durch 2, 3', 4' noch durch 1 hindurch; die Gerade 1, 2 gehört also ebenfalls dem Complexe an. In gleicher Weise zeigt man, dass den Punkten 3 und 4 die Ebenen *III* und *IV* entsprechen und also auch 1, 3; 1, 4 dem Complexe angehören. Hieraus denn endlich folgt, dass dem Punkte 1 die Ebene *I* entspricht. Die Zuordnung von 1', 2', 3', 4' bez. zu *I'*, *II'*, *III'*, *IV'* ergiebt sich auf dieselbe Weise und es ist somit der geforderte Beweis erbracht.

Durch denselben linearen Complex werden einander zugeordnet, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht: die vier singulären Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 bez. den vier singulären Punkten P_1, P_2, P_3, P_4; die vier singulären Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4 bez. den vier singulären Axen A_1, A_2, A_3, A_4 u. s. w. Wir haben also;

Das Singularitätensystem ist in Bezug auf den construirten linearen Complex seine eigene conjugirte Polare,

was die Gleichheit der von den vier singulären Punkten und den vier singulären Ebenen gebildeten Doppelverhältnisse als einzelne Behauptung einschliesst. Weiter aber folgt:

Die Complexfläche selbst ist in Bezug auf den Complex ihre eigene conjugirte Polare.

Denn die Polarfläche derselben ist wieder eine Fläche vierter Ordnung mit derselben Doppellinie, denselben singulären Strahlen, denselben Berührungskegelschnitten in den Doppelebenen, und durch diese Elemente ist die Fläche als Fläche vierter Ordnung mehr als vollständig bestimmt.

Hiermit sind die zu Anfang voraufgeschickten Sätze und also auch die aus ihnen gezogenen Folgerungen bewiesen.

Erlangen, October 1873.

Untersuchung über den Zusammenhang der Flächen im Sinne Riemann's.

Von F. Lippich in Prag.

Bekanntlich lautet der auf den Zusammenhang der Flächen bezügliche Fundamentalsatz:

Wenn ein gegebenes System von (nicht gespaltenen) Flächen durch Querschnitte in lauter einfach zusammenhängende Flächen zerlegt wird, so ist in jedem Falle die Zahl der geführten Querschnitte weniger der Zahl der erhaltenen Flächenstücke constant.

Aus der Art, wie dieser Satz bewiesen wird, ist jedoch nicht unmittelbar ersichtlich, in welcher Weise die Querschnitte zu führen sind, damit die Zahl der Flächenstücke eine beliebige vorgeschriebene, und namentlich (wenn das ursprüngliche Flächensystem aus einer einzigen Fläche bestand) gleich Eins sei. Desshalb und im Hinblick auf die Wichtigkeit des Gegenstandes dürfte es nicht ganz werthlos sein, wenn im Folgenden die auf den Zusammenhang der Flächen bezüglichen Sätze auf einem von dem Riemann'schen etwas abweichenden und zum Theile mehr synthetischen Wege dargestellt werden.

Bezüglich der nicht ausdrücklich erklärten Benennungen folge ich den bekannten „*Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*" von *C. Neumann*.

I.

Wir denken uns gegeben eine nicht aus getrennten Stücken bestehende Fläche F, d. h. eine Fläche von der Beschaffenheit, dass man von irgend einem auf ihr gelegenen Punkte zu jedem ihrer Punkte eine ununterbrochene Linie ziehen kann, die nur Punkte der Fläche selbst enthält.

Von dieser Fläche setzen wir voraus, dass sie nicht gespalten sei, also keine Linien enthält, in denen mehr als zwei Flächenstücke aneinander haftend zu denken sind. Demgemäss können im F nur geschlossene und nicht verzweigte Randcurven vorkommen.

Einen Schnitt in F denken wir uns vorläufig nur geführt längs einer Curve S, die entweder nirgends mit sich selber zusammentrifft oder

nur mit ihren Endpunkten. Die Fläche, welche durch Ausführung eines solchen Schnittes S aus der ursprünglichen entsteht, bezeichnen wir durch $F(S)$, die Ränder des Schnittes mit s und s'.

Wenn ein Schnitt S die gegebene Fläche nicht zerstückt, so muss es möglich sein, von irgend einem Punkte des Randes s zu irgend einem Punkte des anderen Randes s' eine Linie zu ziehen, welche ganz in $F(S)$ liegt und sich selbst nicht schneidet. Wir wollen sie eine zu S gehörige *Weglinie* nennen. Verbindet sie zwei gegenüberliegende Randpunkte, so ist sie in F eine geschlossene Linie, welche mit der Linie S nur einen einzigen Punkt gemein hat.

Ein Schnitt kann eine Fläche niemals zerstücken, wenn derselbe in einem *innern* Punkt der Fläche anfängt, oder in einem solchen endigt; denn in diesem Falle kann man immer von der einen Seite des Schnittes unendlich nahe dem Rande s um jenen innern Punkt herum nach dem anderen Rande s' gelangen. Es werden daher nur Quer- oder Rückkehrschnitte eine Fläche zerstücken können. Denkt man sich den Schnitt allmälig weiter geführt, so kann das Zerstücken erst in dem Momente eintreten, in welchem der Schnitt den Randpunkt erreicht und weil sodann nur zwei Punkte getrennt werden, so zerfällt die Fläche auch nur in zwei Theile.

Ist $F(S)$ zerstückt in die beiden Theile A und B, und man zieht von einem Punkte a in A eine Linie, welche S überschreitet, also nach B führt, so muss man S mindestens noch ein zweites mal überschreiten, um wieder nach a zurückzugelangen, im Allgemeinen wird die hiezu nöthige Zahl der Ueberschreitungen gerade sein müssen.

Wird demnach in F eine Linie S verzeichnet, so dass $F(S)$ zerstückt ist, so kann eine in F gezogene geschlossene Linie die Linie S nur in einer geraden Zahl von Punkten schneiden. Ist hingegen $F(S)$ nicht zerstückt, so kann die Zahl der Durchschnittspunkte eine beliebige sein.

Im letzteren Falle ist es nämlich möglich, von jedem Rande von S nach a zu gelangen ohne S überschreiten zu müssen.

Es seien in F zwei Linien S_1 und S_2 verzeichnet, die sich nicht gegenseitig treffen und es sei sowohl $F(S_1)$ als auch $F(S_2)$ nicht zerstückt; hingegen sollen beide Schnitte gleichzeitig geführt die Fläche zerstücken in die Theile A und B. Denkt man sich in $F(S_1)$ den Schnitt S_2 ausgeführt, so erkennt man, dass ein Rand von S_2 dem Theil A, der andere dem Theil B angehört. Dasselbe zeigt sich bezüglich der Ränder von S_1, wenn man in $F(S_2)$ den Schnitt S_1 führt. Um daher in $F(S_1)$ von einem Punkte σ_1 auf s_1 zu einem Punkte σ_1' auf s_1' zu gelangen, muss S_2 wenigstens einmal, allgemein eine ungerade Anzahl von Malen überschritten werden, da man schliesslich aus dem einen Theile A von $F(S_1, S_2)$ in den anderen B gelangen

soll. Ziehen wir dann in F noch eine Linie von σ_1 nach σ_1', welche S_2 nicht trifft, die aber S_1 in einer ungeraden Zahl von Punkten schneiden muss, so haben wir eine geschlossene Linie, die S_1 und S_2 in einer ungeraden Zahl von Punkten trifft. Ziehen wir aber von einem Punkte a in A eine Linie, welche S_1 in einer geraden Anzahl von Punkten schneidet, so dass man sich schliesslich wieder in A befindet, so muss sodann, wenn S_2 im weiteren Verlaufe geschnitten wird, dieses ebenfalls eine gerade Anzahl von Malen geschehen, um wieder nach a zurückkehren zu können. Dieselben Betrachtungen gelten auch dann noch, wenn das Durchschneiden von S_1 und S_2 beliebig oft abwechselt.

Wir erweitern sie noch für den Fall, dass sich die Linien S_1 und S_2 gegenseitig schneiden. Indem wir S_2 von seinem Anfangspunkte p bis zu seinem Endpunkte q durchlaufen, seien $1, 2, 3 \cdots n$ die Schnittpunkte auf S_1 in der Reihenfolge numerirt, in welcher sie passirt werden. Jeder der Theile $p \cdot\cdot 1$, $1 \cdot\cdot 2$, $2 \cdot\cdot 3$ u. s. f. von S_2 bildet für sich genommen in $F(S_1)$ einen Schnitt und wir nehmen an, alle diese Schnitte können so in Gruppen zusammengefasst werden, dass jede Gruppe für sich in $F(S_1)$ ein zerstückendes Schnittsystem bildet. Es zerfällt dann $F(S_1, S_2)$ in Theile, von denen jeder theils von Stücken der Linie S_2, theils von Stücken der Linie S_1 begrenzt erscheint, wobei natürlich noch Theile der ursprünglichen Begrenzung von F hinzutreten können. Da man also aus keinem dieser Theile nach einem anstossenden gelangen kann, ohne die entsprechenden begrenzenden Stücke von S_1 oder S_2 zu überschreiten, so bilden diese Stücke zusammengenommen in F selbst einen zerstückenden Schnitt und irgend eine in F gezogene geschlossene Linie muss denselben in einer geraden Zahl von Punkten treffen. Daraus erkennt man aber sofort, dass die Gesammtzahl aller Schnittpunkte auf S_1 und S_2 für jede geschlossene Linie in F gerade sein muss, und daher sind die Zahlen der Schnittpunkte auf S_1 und der auf S_2 gleichzeitig entweder gerade oder ungerade.

Wir sprechen daher folgenden Satz aus:

(1) . . . *Wenn in F zwei Linien S_1 und S_2 von der Beschaffenheit verzeichnet werden, dass sie sich gegenseitig nicht treffen, $F(S_1)$ sowohl wie auch $F(S_2)$ nicht zerstückt ist, wohl aber $F(S_1, S_2)$; so muss jede in F gezogene geschlossene Linie die beiden Linien S_1 und S_2 entweder gleichzeitig in einer geraden Anzahl von Punkten (Null mit einbegriffen), oder gleichzeitig in einer ungeraden Anzahl von Punkten (Null ausgeschlossen) durchschneiden. Dies gilt auch dann noch, wenn S_1 und S_2 sich gegenseitig durchschneiden, sobald nur die sämmtlichen Stücke, in welche eine dieser Linien z. B. S_2 durch die andere S_1 zerlegt wird, so in Gruppen zusammengefasst werden können, dass jede Gruppe für sich in $F(S_1)$ ein zerstückendes Schnitt-*

system vorstellt. Jede Weglinie von S_1 schneidet also S_2 und umgekehrt. —

Wir wollen jetzt annehmen, dass eine der beiden Linien etwa S_2 so beschaffen sei, dass $F(S_2)$ zerstückt ist. Treffen sich diese Linien nicht, so wird S_1 ganz in dem einen der beiden Theile A oder B, etwa in A verlaufen. Eine zu S_1 gehörige Weglinie kann demnach S_2 nur in einer geraden Zahl von Punkten schneiden, Null natürlich mit einbegriffen, da der Theil A durch S_1 nicht zerstückt ist. Das Vorhandensein einer Weglinie von S_1, welche S_2 gar nicht trifft, hört selbst dann nicht auf, wenn sich S_1 und S_2 durchschneiden. Um dieses nachzuweisen setzen wir fest, es werde S_1 in einem bestimmten Sinne durchlaufen von seinem Anfangspunkte p aus bis zu seinem Endpunkte q und es seien $1, 2, 3 \cdots n$ die Schnittpunkte auf S_2 in der Reihenfolge numerirt, in der sie passirt werden. Die Theile von $F(S_2)$ mögen wieder A und B heissen, und es sei p etwa in A gelegen. Sodann ist sofort ersichtlich, dass die Stücke $p \cdot\cdot 1$, $2 \cdot\cdot 3$, $4 \cdot\cdot 5$ u. s. w. von S_1 sämmtlich in A, die Stücke $1 \cdot\cdot 2$, $3 \cdot\cdot 4$, $5 \cdot\cdot 6$ u. s. f. hingegen sämmtlich in B liegen. Wird der Schnitt S_1 ausgeführt, so sind diese Stücke sämmtlich Schnitte, die entweder ganz in A oder ganz in B verlaufen. Aber man kann zeigen, dass nicht sämmtliche dieser Schnitte zerstücken werden. Denn nehmen wir an, dies sei der Fall, und es wären $(p, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 5) \cdots$ die an S_2 grenzenden Stücke, welche durch die Schnitte $p \cdot\cdot 1$, $2 \cdot\cdot 3$, $4 \cdot\cdot 5$ u. s. f. aus A herausfallen, ebenso $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$ die Stücke des Theiles B. Wenn man nun die Ränder von S_2 wieder schliesst, so fügt man dadurch die aus A herausgefallenen Theile an den Theil B, wodurch er übergehe in B' und dafür die aus B' herausgefallenen Theile an A, wodurch dieser Theil übergehe in A'. Aus keinem der Stücke $(p, 1)$, $(2, 3)$ u. s. w. konnte man der Annahme nach heraus und nach dem übrigen Theil von A gelangen ohne $p \cdot\cdot 1$, $2 \cdot\cdot 3$ u. s. f. zu überschreiten und ähnliches gilt von den Stücken, die aus B herausgeschnitten wurden. Demnach kann man auch jetzt von B' nicht nach A' gelangen ohne irgendwelche Stücke von S_1 zu überschreiten, d. h. $F(S_1)$ erscheint in die Theile A' und B' zerlegt, was gegen die Voraussetzung ist. Es muss daher wenigstens eines der Stücke $p \cdot\cdot 1$, $1 \cdot\cdot 2$, $2 \cdot\cdot 3$ u. s. f. von S_1 bezüglich der Fläche $F(S_2)$ ein nicht zerstückender Schnitt sein. Ist dieses aber der Fall, so giebt es für das entsprechende Stück von S_1 eine Weglinie, die ganz in der Fläche $F(S_1, S_2)$ liegt, also keine der Linien S_1 und S_2 schneidet. Daher ergiebt sich der Satz:

(2) . . . *Wenn in der Fläche F zwei Linien verzeichnet werden S_1 und S_2 von der Beschaffenheit, dass $F(S_1)$ nicht zerstückt ist, wohl aber $F(S_2)$ und die beiden Linien schneiden sich nicht, so werden die zu S_1 gehörigen Weglinien, wenn sie so gewählt sind, dass sie S_2*

schneiden, dieses nur in einer geraden Zahl von Punkten thun können. Schneiden sich S_1 und S_2 gegenseitig, so giebt es auch in diesem Falle ebenso wie im vorhergehenden Weglinien von S_1, die S_2 nicht treffen, die also ganz in dem einen oder dem anderen Theile verlaufen, aus welchen $F(S_2)$ besteht.

II.

Einen Querschnitt, dessen Anfangs- und Endpunkt auf verschiedenen Rändern der Fläche liegt, nennen wir einen A-Schnitt und die Linie auf F, nach welcher er geführt erscheint, eine A-Linie.

Sei nun in F ein A-Schnitt A geführt. Damit dieses ausführbar ist, muss F wenigstens zwei Randcurven besitzen; es mag R eine dieser Curven sein, in welcher der Schnitt A mit seinen Rändern a und a' einmündet. Von irgend einem Punkte des Randes a kann man längs a bis R gelangen, und indem man an R weitergeht, muss man nach dem in R liegenden Punkte des Randes a' gelangen können, da R nur in einem Punkte von A getroffen wird. Sodann kann man aber längs a' zu jedem beliebigen Punkte von a' kommen, daher ist $F(A)$ nicht zerstückt. Da man ferner ebenso den anderen Rand von F, in welchem A mündet, umlaufend nach den Ausgangspunkte in A wieder zurückkommt, so sieht man, dass in der Fläche $F(A)$ die Ränder von A mit den beiden Rändern der Fläche, in welche A mündet, zu einem einzigen Rande verbunden wird.

(3) . . . *Ein A-Schnitt kann eine Fläche niemals zerstücken; die Fläche $F(A)$ hat um einen Rand weniger als die Fläche F.*

In der Fläche F sei nun ein *bestimmter* A-Schnitt möglich, d. h. die Fläche habe wenigstens zwei Ränder R und R'. Jede ganz in F liegende und sich selbst nicht schneidende Linie, die von einem Punkte auf R gezogen wird nach einem Punkte auf R', ist eine A-Linie. Aus dem Vorhandensein eines bestimmten A-Schnittes schliesst man also auf unendlich viele A-Linien in F, die aber sämmtlich zwischen denselben beiden Rändern gezogen erscheinen. Sobald man aber nach einer dieser Linien einen Schnitt A geführt hat, so sind in $F(A)$ alle übrigen der betrachteten A-Linien von F keine A-Linien mehr, weil ihre Endpunkte nunmehr in einem und demselben Rande liegen, also:

(4) . . . *Zwischen zwei Rändern einer Fläche kann nur ein einziger A-Schnitt gezogen werden; und wenn in der Fläche F ein bestimmter A-Schnitt möglich ist, so schliesst man hieraus auf das Vorhandensein einer Gruppe von unendlich vielen A-Linien in F, die aber sämmtlich so miteinander zusammenhängen, dass, wenn nach einer dieser Linien A ein Schnitt geführt ist, alle übrigen aufhören in $F(A)$ A-Linien zu sein.*

Hat die Fläche F im Ganzen ϱ Ränder, und führt man zwischen

zweien derselben einen Schnitt A_1, so hat $F(A_1)$ wegen (3) nur mehr $\varrho - 1$ Ränder und ein weiterer A-Schnitt A_2 muss wegen (4) zwischen zweien der $\varrho - 1$ Ränder verlaufen. Sodann ist $F(A_1 A_2)$ $\varrho - 2$-randig und wenn man so fortfährt, so kommt man nach Ausführung von $\varrho - 1$ A-Schnitten zu einer einrandigen Fläche. Da dieses immer eintreten muss, wie man auch die A-Schnitte aufeinander folgen lässt, aber immer erst nach $\varrho - 1$ Schnitten, so hat man den Satz:

(5) . . . *Die Zahl der A-Schnitte, welche man ausgehend von einer gegebenen Fläche F nach einander ausführen kann, ist constant, d. h. unabhängig von der Anordnung dieser Schnitte, und zwar um Eins kleiner als die Zahl der Ränder in F. Nach Ausführung aller A-Schnitte ist F in eine einrandige Fläche verwandelt.*

III.

Wir betrachten nunmehr solche Querschnitte, deren Endpunkte entweder auf der Curve des Schnittes selbst, oder mit den Anfangspunkten zugleich auf demselben Rande liegen. Einen derartigen Querschnitt nennen wir einen B-Schnitt und die ihm entsprechende Curve eine B-Linie.

(6) . . . *Die Fläche $F(B)$ hat um einen Rand mehr als die Fläche F.*

Denn wenn man von dem Punkte des Randes b von B ausgeht, welcher in dem Rande R der Fläche liegt und den Rand b durchläuft, sodann wieder zu R zurückkehrt, so hat man entweder nur einen Theil des anderen Randes b' beschrieben, falls der Endpunkt des B-Schnittes auf B selbst liegt, oder gar keinen Theil von b', falls der Endpunkt des Schnittes auf R sich befindet. Durch Fortgehen im Rande R kann man aber nur wieder zum Ausgangspunkte zurückkehren, also gehört der nicht durchlaufene Randtheil von b' einem neuen Rande der Fläche $F(B)$ an.

Ein B-Schnitt kann eine Fläche zerstücken oder auch nicht. Nehmen wir an, es sei $F(B)$ *nicht* zerstückt; dann kann man zwei gegenüberliegende Randpunkte von B durch eine Weglinie verbinden, längs welcher wir einen Schnitt C geführt denken. In der Fläche $F(B)$ ist nun C ein A-Schnitt, somit ist $F(B, C)$ nicht zerstückt und wenn man die Ränder von B schliesst, so erkennt man, dass auch $F(C)$ nicht zerstückt sein kann, also in F ein nicht zerstückender Rückkehrschnitt möglich ist. Da ferner in $F(B, C)$ für die Curve C eine Weglinie C_1 gezogen werden kann zwischen zwei gegenüberliegenden Randpunkten von C, so ist C_1 in F (d. h. wenn die Ränder der Schnitte B und C geschlossen werden) eine Rückkehrlinie, welche B gar nicht und C nur in einem Punkte schneidet. Daraus folgt aber, dass auch $F(C_1)$ nicht zerstückt ist, denn wäre dieses der Fall, so müsste ja

nach (2) C_1 von der in sich zurücklaufenden Linie C in einer geraden Anzahl von Punkten getroffen werden. Verfolgt man die Construction, durch welche C aus B erhalten wurde, von C ausgehend, so sieht man, dass auch umgekehrt aus dem Vorhandensein eines nicht zerstückenden Rückkehrschnittes die Existenz eines nicht zerstückenden B-Schnittes gefolgert wird. Eine speciellere Form des letzteren erhält man übrigens einfach dadurch, wenn man in $F(C)$ einen A-Schnitt führt, der in einem Rande von C beginnt.

(7) . . . *Ist daher die Fläche $F(B)$ nicht zerstückt, so giebt es in der Fläche F immer einen nicht zerstückenden Rückkehrschnitt, der, wenn man will, immer so gewählt werden kann, dass er die ursprüngliche B-Linie nicht trifft. Umgekehrt, wenn ein nicht zerstückender Rückkehrschnitt möglich ist, so giebt es auch immer einen nicht zerstückenden B-Schnitt, falls nur die Fläche einen Rand besitzt.*

(8) . . . *Wenn in einer Fläche F nur e i n nichtzerstückender B-Schnitt möglich ist, so dass also $F(B)$ durch jeden weiteren B-Schnitt zerstückt wird, so ist in F auch nur ein einziger nichtzerstückender Rückkehrschnitt möglich und umgekehrt.*

Ist nämlich in $F(B)$ ein Rückkehrschnitt C' möglich, so dass $F(B, C')$ nicht zerstückt ist, so könnte aus C' auch ein B-Schnitt B' abgeleitet werden, ohne dass $F(B, B')$ zerstückt wäre, was gegen die Voraussetzung ist.

In Folge dieses Zusammenhanges der nichtzerstückenden B-Schnitte und Rückkehrschnitte wollen wir die weiteren Betrachtungen zunächst auf die letztere Schnittart als die einfachere beschränken.

IV.

Einen Rückkehrschnitt, welcher die gegebene Fläche nicht zerstückt, nennen wir einen C-Schnitt und die ihm entsprechende Curve eine C-Linie. Es erhellt sofort:

(9) . . . *Jeder Rückkehrschnitt verwandelt die gegebene Fläche in eine andere, die um zwei Ränder mehr besitzt als die ursprüngliche.*

In der Fläche F sei ein bestimmter C-Schnitt C_1 möglich; für zwei gegenüberliegende Randpunkte von C_1 ziehen wir eine Weglinie C' und führen längs derselben einen Schnitt. Da dieser in der Fläche $F(C_1)$ ein A-Schnitt ist, so ist $F(C_1 C')$ nicht zerstückt und folglich auch $F(C')$ nicht, da man diese Fläche erhält, wenn man in $F(C_1 C')$ die Ränder des Schnittes C_1 wieder schliesst. Nun kann man von C' ausgehend in derselben Weise einen anderen C-Schnitt C'' ableiten, der aus einer Weglinie für C' entstanden ist u. s. f. Man sieht also:

(10) . . . *Wenn in einer Fläche F ein b e s t i m m t e r C-Schnitt möglich ist, so lässt sich aus diesem eine Gruppe unendlich vieler C-Linien*

der Fläche F ableiten, die gegen die Linie C_1 eine völlig beliebige Lage haben können.

Wir machen nun die Voraussetzung, dass $F(C_1)$ durch jeden weiteren Rückkehrschnitt zerstückt werde, also auch durch einen Rückkehrschnitt längs einer der unendlich vielen aus C_1 ableitbaren C-Linien, die C_1 nicht treffen. Dann treten die sämmtlichen C-Linien in F, also auch jene, welche C_1 treffen (die somit in $F(C_1)$ keine Rückkehrlinien sind) in eine eigenthümliche Beziehung zu einander, die wir aufsuchen wollen.

Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, dass sämmtliche C-Linien in F in zwei Gruppen zusammengefasst werden können, von denen die eine alle C-Linien C_g enthält, die C_1 in einer geraden Zahl von Punkten inclusive Null, die andere hingegen jene C-Linien C_u, die C_1 in einer ungeraden Zahl von Punkten schneiden.

Wir betrachten eine beliebige von den C-Linien der ersteren Art, etwa C_g, und nehmen an, sie treffe C_1 in den Punkten $1, 2, \cdots n$, die wieder in der Reihenfolge numerirt vorausgesetzt, sind in welcher sie passirt werden, wenn man C_g in bestimmtem Sinne durchläuft. Die Stücke $1 \cdot\cdot 2$, $2 \cdot\cdot 3$, $3 \cdot\cdot 4$, $\cdots\cdot n-1 \cdot\cdot n$, $n \cdot\cdot 1$ von C_g sind in $F(C_1)$ entweder B-Schnitte, wenn die Endpunkte des Stückes in demselben Rande von C_1 liegen, oder A-Schnitte, wenn dies nicht der Fall ist. Jeder dieser B-Schnitte muss nun $F(C_1)$ zerstücken; denn wäre dieses nicht der Fall, so wäre nach (7) in $F(C_1)$ ein nichtzerstückender Rückkehrschnitt möglich, was gegen die Voraussetzung ist. Was ferner diejenigen Stücke von C_g anbelangt, die in $F(C_1)$ A-Schnitte vorstellen, so ist zuerst zu bemerken, dass sie in gerader Anzahl vorhanden sein müssen, wenn die Gesammtzahl der Schnittpunkte auf C_1, wie vorausgesetzt, gerade sein soll. In der That, die Zahl der Schnittpunkte auf C_1 ist ebenso gross als die Zahl der in einem und demselben Rande von C_1 liegenden Endpunkte der Stücke von C_g, und jeder B-Schnitt führt zwei, jeder A-Schnitt aber nur einen solchen Punkt in dem einen Rande von C_1 mit sich. Fassen wir nun irgend zwei dieser A-Schnitte, etwa A' und A'' näher in's Auge, und denken wir z. B. A' in $F(C_1)$ zuerst geführt, so ist A'' in $F(C_1 A')$ kein A-Schnitt mehr, sondern ein B-Schnitt und zwar ein zerstückender. Wäre nämlich letzteres nicht der Fall, so müsste in $F(C_1 A')$ ein C-Schnitt möglich sein, also auch in $F(C_1)$, was wieder gegen die Voraussetzung. Wenn wir daher die sämmtlichen A-Schnitte, welche unter den Stücken von C_g vorkommen, beliebig in Gruppen zu je zweien zusammen fassen, so wird $F(C_1)$ durch jede solche Gruppe zerstückt. Mithin ergiebt sich, dass alle Stücke von C_g so beschaffen sind, dass sie entweder einzeln oder zu zweien $F(C_1)$ zerstücken. Der

Satz (1) ist daher auf sämmtliche Linien C_g anwendbar und wir können sagen:

(11) . . . *Wenn in einer Fläche ein bestimmter C-Schnitt C_1 möglich ist, $F(C_1)$ aber durch jeden weiteren Rückkehrschnitt zerstückt wird, so stehen die sämmtlichen C-Linien der Fläche F in einer solchen Beziehung zu einander, dass jede C-Linie, welche C_1 in einer geraden Zahl von Punkten inclusive Null schneidet, von jeder C-Linie, welche C_1 in einer ungeraden Zahl von Punkten schneidet, ebenfalls geschnitten wird, und zwar auch wieder in einer ungeraden Zahl von Punkten. Diese Beziehung gilt auch dann noch, wenn man statt C_1 irgend eine andere C-Linie substituirt.*

Hiemit lässt sich leicht die Frage beantworten, ob in der betrachteten Fläche F_1, wenn man statt C_1 irgend einen anderen C-Schnitt C' führt, noch ein zweiter C-Schnitt C'' möglich wird oder nicht. Es muss C'' so gewählt sein, dass er C' nicht trifft, denn sonst wäre er in $F(C')$ kein C-Schnitt; C' und C'' müssen daher beide der Gruppe C_g oder der Gruppe C_u angehören. Eine Weglinie von C', welche zwei gegenüberliegende Randpunkte verbindet, ist in F eine C-Linie und zwar eine solche, welche C' in einem Punkte schneidet; sie muss daher auch C'' schneiden, folglich ist $F(C', C'')$ zerstückt.

(12) . . . *Wenn daher in einer Fläche F ein bestimmter C-Schnitt C_1 möglich ist, ausser diesem aber kein zweiter, so bleibt in dieser Fläche immer nur e i n C-Schnitt möglich, wie man denselben auch wählen mag.*

In derselben Fläche F soll nur *ein* A-Schnitt möglich sein, d. h. F besitze nur zwei Randcurven. Wir denken uns eine bestimmte A-Linie A_1 und eine bestimmte C-Linie C_1 verzeichnet, die sich durchschneiden mögen. Wird zuerst ein Schnitt nach C_1 geführt, so ist zwar in $F(C_1)$ der Schnitt A_1 kein A-Schnitt mehr, allein, da $F(C_1)$ nicht zerstückt ist, so kann man in dieser Fläche immer eine A-Linie ziehen, also ist auch in $F(C_1)$ ein A-Schnitt möglich. Wird hingegen zuerst A_1 geführt, so ist in $F(A_1)$ C_1 kein C-Schnitt mehr, allein ein anderer C-Schnitt ist immer ausführbar. Um dieses zu zeigen, führen wir zuerst einen A-Schnitt A', welcher C_1 nicht trifft. In der Fläche $F(A')$ ist nunmehr A_1 ein B-Schnitt und, wenn dieser nicht zerstückt, in $F(A')$ und folglich auch in F nach (7) ein C-Schnitt möglich, der A_1 nicht schneidet. Würde aber A_1 zerstücken, so giebt es nach (2) für C_1 irgend eine Weglinie, die A_1 nicht schneidet, nach welcher somit ein C-Schnitt möglich ist, auch wenn A_1 gezogen ist. Man kann daher ganz allgemein sagen:

(13) . . . *Ist in einer Fläche ein A-Schnitt für sich und ein C-Schnitt für sich möglich, so ist ein C-Schnitt auch dann noch ausführbar, wenn vorerst ein beliebig v o r g e s c h r i e b e n e r A-Schnitt, und ein*

A-Schnitt immer ausführbar, wenn bereits ein beliebig vorgeschriebener C-Schnitt geführt wurde.

Es kann nunmehr der Satz (12) verallgemeinert werden für eine Fläche, in welcher nach einander mehrere C-Schnitte ausführbar sind. Seien also C_1, $C_2 \cdots C_\gamma$ *bestimmte*, nach einander ausgeführte C-Schnitte, durch welche die Fläche F in eine Fläche $F(C_1\, C_2 \cdot\cdot C_\gamma)$ verwandelt wird, in der kein weiterer C-Schnitt möglich ist. Um zu zeigen, dass bei irgend einer anderen Wahl und Anordnung der C-Schnitte immer γ nöthig sind, um die Verwandlung in eine Fläche ohne C-Schnitt zu bewirken, verfahren wir wie folgt.

Wir denken uns in F eine ganz beliebige C-Linie C_1' gezogen, welche die Linien C_1, $C_2 \cdot\cdot C_\gamma$ irgendwie durchschneiden mag und sodann die Schnitte $C_1\, C_2 \cdot\cdot C_{\gamma-1}$ geführt. Hiedurch entsteht die Fläche $F(C_1 C_2 \cdot\cdot C_{\gamma-1})$, in welcher noch ein bestimmter C-Schnitt C_γ und daher nach (12) statt C_γ auch irgend ein anderer, aber nur einer, geführt werden kann. In der Fläche $F(C_1\, C_2 \cdot\cdot C_{\gamma-1})$ werden die Stücke von C_1', in welche diese Linie durch die ursprünglichen Schnitte zerfällt, A- oder B-Schnitte bilden. Denkt man sich nach und nach sämmtliche A-Schnitte geführt, so erkennt man durch Anwendung des Satzes (13), dass statt C_γ eine andere C-Linie Γ verzeichnet werden kann, welche diese A-Schnitte nicht trifft. Nun denken wir uns noch nach den B-Linien Schnitte geführt. Von diesen wird nach (8) einer nicht zerstücken, die übrigen zerstücken. Durch Anwendung von (7) und (2) nach jedem neuen Schnitt erkennt man, dass zu Γ eine Weglinie angegeben werden kann, welche keinen der B-Schnitte trifft und nach welcher statt Γ ein C-Schnitt geführt werden kann, der somit keines der Stücke von C_1' schneidet; diesen Schnitt nennen wir C_γ'' und substituiren ihn für C_γ. In der Fläche $F(C_1 C_2 \cdot\cdot C_{\gamma-1} C_\gamma'')$ ist nun kein weiterer C-Schnitt möglich und C_1' liegt ganz in der Fläche $F(C_\gamma'')$, d. h. überschreitet nirgends die Linie C_γ''. Nun können wir aber mit dieser Fläche ebenso verfahren wie mit F und für $C_{\gamma-1}$ einen Schnitt $C_{\gamma-1}''$ substituiren, welcher ebenfalls C_1' nicht trifft u. s. f. Statt der ursprünglich gegebenen Schnitte $C_1 C_2 \cdots C_\gamma$ werden hiedurch γ andere $C_1'' C_2'' \cdots C_\gamma''$ substituirt, die sämmtlich C_1' nicht treffen.

Hieraus geht hervor, dass die Linie C_1' ganz in der Fläche $F(C_2'' C_3'' \cdot\cdot C_\gamma'')$ liegt, in welcher noch der Schnitt C_1'' möglich ist, aber kein weiterer C-Schnitt. In dieser Fläche ist C_1' eine C-Linie; denn wäre sie dies nicht, wäre sie also ein zerstückender Rückkehrschnitt, durch welchen $F(C_2'' C_3'' \cdot\cdot C_\gamma'')$ in zwei Theile M und N zerfällt, so müssten von den sämmtlichen Linien $C_2'' C_3'' \cdot\cdot C_\gamma'$ einige ganz in M, die anderen ganz in N liegen und es blieben die Theile M und N getrennt, auch wenn man die Ränder dieser Schnitte wie-

der aneinander fügt und die ursprüngliche Fläche herstellt. In dieser war aber C_1' als C-Linie angenommen. Da somit in $F(C_2'' C_3'' \cdot\cdot C_\gamma'')$ C_1' eine C-Linie ist, so kann man durch dieselbe den Schnitt C_1'' ersetzen und es wird dann nach (12) in $F(C_1' C_2'' C_3'' \cdots C_\gamma'')$ kein weiterer C-Schnitt mehr möglich sein. Die gegenwärtige Betrachtung hat also gezeigt, dass man den Schnitt C_1 ersetzen kann durch einen beliebig gewählten anderen C-Schnitt C_1'. Mit der Fläche $F(C_1')$ kann man nun bezüglich des Schnittes C_2'' ebenso verfahren und diesen ersetzen durch einen in $F(C_1')$ beliebig gewählten C-Schnitt C_2' u. s. f. bis C_γ'' ersetzt ist durch C_γ'. Wir haben also an Stelle der γ ursprünglich gegebenen Schnitte, beliebig gewählte andere, deren Zahl wieder γ ist und aus der Darstellung geht hervor, dass die Zahl dieser neuen Schnitte wegen (12) niemals grösser, aber auch niemals kleiner als γ sein kann. Der letztere Fall wäre nämlich nur dadurch möglich, dass eine beliebig gewählte C-Linie, wie etwa C_1', aufhört eine C-Linie zu sein in der Fläche $F(C_2'' C_3'' \cdot\cdot C_\gamma'')$. Somit ist der zu (5) analoge Satz bewiesen:

(14) . . . *Die Zahl der C-Schnitte, welche man, ausgehend von einer gegebenen Fläche F, nach einander ausführen kann, ist constant, d. h. unabhängig von der Anordnung dieser Schnitte.*

V.

Die ursprüngliche Zahl der in einer gegebenen Fläche ausführbaren A-Schnitte (5) und die Zahl der möglichen C-Schnitte sind für diese Fläche zwei charakteristische Constante, die beziehungsweise α und γ heissen mögen. Man kann aus diesen beiden Constanten eine andere ableiten, welche eine wichtige Bedeutung hat. Nehmen wir an, die Fläche besitze wenigstens *eine* Randcurve; irgend ein C-Schnitt verwandelt dieselbe in eine andere, die um zwei Ränder mehr besitzt als die ursprüngliche, in welcher daher zwei weitere A-Schnitte möglich sind. Da alsdann in der neuen Fläche nach (13) und (14) noch immer die übrigen A- und C-Schnitte ausführbar sind, so folgt, dass, wenn man in ganz beliebiger Ordnung A- und C-Schnitte führt, bis keine dieser Schnittarten mehr möglich ist, im Ganzen $\alpha + 2\gamma$ A-Schnitte gezogen werden mussten und sodann eine Fläche erhalten wird, welche keinen A- und keinen C-Schnitt mehr zulässt. Die Zahl $\alpha + 2\gamma$ ist aber noch einer anderen Auffassung fähig. Da nämlich die Zahl der nicht zerstückenden B-Schnitte wegen (8) ebenfalls γ ist, jeder B-Schnitt die Zahl der Ränder um Eins vermehrt, also auch die Zahl der A-Schnitte, so ist $\alpha + 2\gamma$ die Zahl sämmtlicher möglichen A- und nicht zerstückenden B-Schnitte, also die Zahl sämmtlicher nicht zerstückenden Querschnitte zusammengenommen.

Definition. Eine Fläche soll einfach zusammenhängend heissen,

wenn sie weder einen A- noch einen C-Schnitt zulässt, sonst mehrfach zusammenhängend.

Sodann lässt sich folgender Satz aussprechen:

(15) . . . *Jede (nicht gespaltene) mehrfach zusammenhängende Fläche kann mit Hinzufügung aller zulässigen C-Schnitte durch eine bestimmte Zahl von A-Schnitten oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch eben dieselbe Zahl von Querschnitten (A- und B-Schnitte) in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden. Ist die Zahl dieser A-Schnitte oder der Querschnitte n, so heisse die Fläche $n+1$-fach zusammenhängend und $N = n + 1$ die Grundzahl derselben.*

Setzt man in $n = \alpha + 2\gamma$ für α seinen aus der Zahl ϱ der Ränder der Fläche folgenden Werth, d. h. $\alpha = \varrho - 1$, so wird

$$n = \varrho + 2\gamma - 1;$$

doch ist zu bemerken, dass dieser Ausdruck nur dann mit $\alpha + 2\gamma$ übereinstimmt, wenn ϱ nicht Null ist; denn α ist sowohl Null, wenn die Fläche nur einen, als auch wenn sie keinen Rand besitzt. Um diese Nichtübereinstimmung zu umgehen, supponiren wir bei einer vollständig geschlossenen Fläche irgendwo einen Rand, indem wir einen Punkt ausscheiden oder einen Einschnitt machen längs einer beliebig angenommenen, nicht in sich zurücklaufenden und mit sich selbst nicht zusammentreffenden Linie. Hiedurch wird zugleich die in (15) angegebene Art, die Grundzahl einer Fläche aus der Zahl der Querschnitte zu berechnen, durch welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende übergeht, auch auf geschlossene Flächen anwendbar.

Aus dem Ausdruck für die Grundzahl einer Fläche

$$N = \varrho + 2\gamma$$

ergiebt sich sofort die folgende Bemerkung.

(16) . . . *Die Grundzahl einer Fläche ist immer um eine gerade Zahl grösser als die Zahl der Ränder der Fläche. Die Zahl der Ränder ist um eine gerade Zahl kleiner als die Grundzahl der Fläche. Eine geschlossene Fläche ($\varrho = 1$) kann nur ungeradzahligfach zusammenhängend sein. Die Grundzahl einer Fläche, die keinen C-Schnitt zulässt, ist gleich der Zahl ihrer Ränder.*

Mit Hülfe der vorangegangenen Betrachtungen lässt sich leicht die Frage beantworten, unter welchen Bedingungen eine Fläche F in eine andere gegebene Fläche F_1 durch blosse Biegungen und Dehnungen ohne Hülfe von Zerschneidungen oder Zusammenheftungen, also durch stetige Umformung sich verwandeln lässt. Hiebei sollen die Grössen der Biegungen und Dehnungen unbeschränkt bleiben und gegenseitige Durchdringungen der Flächentheile, wie sie bei Rie-

mann'schen Flächen längs der Uebergangslinien zu denken sind, zugelassen werden. Indem wir zur Erleichterung der Vorstellung eine einfach zusammenhängende Fläche in einer Ebene ausgebreitet denken, gehen wir aus von folgenden, aus der Natur einer stetigen Umformung sich ergebenden Sätzen:

(a) . . . Eine einfach zusammenhängende Fläche F kann immer durch stetige Umformung in eine andere gegebene einfach zusammenhängende Fläche F_1 verwandelt werden. Ist also F' die aus F entstandene Fläche, so werden F' und F_1 so übereinander gelegt werden können, dass sie sich vollständig decken. Wenn man den Rand von F in irgend eine Anzahl von Theilen zerlegt denkt, die der Reihe nach, in welcher sie von einem Punkte, der sich im Rande von F bewegt, passirt werden, mit $r^{(1)} r^{(2)} r^{(3)} \ldots r^{(n)}$ bezeichnet sein mögen, und wenn man in gleicher Weise mit dem Rande von F_1 verfährt, dessen n Theile in der Reihe ihrer Aufeinanderfolge $r_1^{(1)} r_1^{(2)} r_1^{(3)} \ldots r_1^{(n)}$ seien; so kann man immer die stetige Umformung der Fläche F in die Form F_1 so einrichten, dass schliesslich alle Punkte von $r^{(1)}$ mit jenen von $r_1^{(1)}$, alle Punkte von $r^{(2)}$ mit jenen von $r_1^{(2)}$ u. s. f., endlich die Punkte von $r^{(n)}$ mit jenen von $r_1^{(n)}$ sich decken.

(b) . . . Wird ferner eine Fläche F durch beliebige stetige Umformungen und Zerschneidungen in eine einfach zusammenhängende, sodann durch Zusammenheftungen in eine Fläche F' verwandelt, und zeigt es sich, dass in F' nirgends Punkte getrennt erscheinen, die in F nicht getrennt, aber auch keine neuen Verbindungen zwischen Punkten vorhanden sind, die in F getrennt waren, so kann F in die Form F' durch eine stetige Umformung allein übergeführt werden.

(c) . . . Es ist überdies sofort klar, dass eine Fläche F nur dann in eine andere vorgeschriebene Fläche F_1 durch stetige Umformung allein verwandelt werden kann, wenn F und F_1 dieselbe Zahl von Randcurven besitzen; denn durch stetige Umformung können weder neue Ränder entstehen, noch vorhandene Ränder verschwinden. Im Allgemeinen ist zwar diese Bedingung der gleichen Ränderzahl nicht hinreichend, wir wollen aber zunächst zeigen, dass sie es allemal ist, wenn die beiden Flächen keine C-Schnitte zulassen.

Es seien $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)} \ldots R^{(n)}$ die Ränder von F, $R_1^{(1)}$, $R_1^{(2)}$, $R_1^{(3)} \ldots R_1^{(n)}$ die Ränder von F_1, in irgend einer Reihenfolge numerirt. Wir können durch Anwendung von A-Schnitten allein F sowohl als auch F_1 in einfach zusammenhängende Flächen verwandeln, da wir annehmen, dass F und F_1 keine C-Schnitte zulassen. Diese A-Schnitte wählen wir in beiden Flächen so, dass der erste Schnitt $A^{(1)}$ führt von $R^{(1)}$ zu $R^{(2)}$ in F, $A_1^{(1)}$ von $R_1^{(1)}$ zu $R_1^{(2)}$ in F_1; der zweite Schnitt $A^{(2)}$ führt von $R^{(2)}$ zu $R^{(3)}$ in F, $A_1^{(2)}$ von $R_1^{(2)}$ zu

$R_1^{(3)}$ in F_1 u. s. f. $A^{(n-1)}$ führt schliesslich in F von $R^{(n-1)}$ zu $R^{(n)}$ und $A_1^{(n-1)}$ von $R_1^{(n-1)}$ zu $R_1^{(n)}$.

Denken wir uns nun die erhaltenen einfach zusammenhängenden Flächen in einer Ebene ausgebreitet und betrachten wir etwa den Rand von $F(A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(n)})$, so besteht er aus folgenden Theilen: aus dem Rande $R^{(1)}$, an diesen schliessen sich rechts und links an die Ränder des Schnittes $A^{(1)}$, an diese schliessen sich an, nach rechts und links weiter fortschreitend, die beiden Theile des Randes $R^{(2)}$, welche liegen zwischen dem Endpunkte von $A^{(1)}$ und dem Anfangspunkte von $A^{(2)}$, hierauf folgen wieder die beiden Ränder von $A^{(2)}$ u. s. f. Durch den Rand $R^{(n)}$ werden endlich die links und rechts von $R^{(1)}$ gelegenen Stücke vereinigt. Genau dieselbe Anordnung der Stücke von $R_1^{(1)} R_1^{(2)} \cdots$ und der Ränder von $A_1^{(1)} A_1^{(2)} \cdots$ zeigt der Rand von $F_1 (A_1^{(1)} A_1^{(2)} \cdots A_1^{(n)})$. Wir können jetzt $F(A^{(1)} \cdot\cdot A^{(n)})$ so umformen in F', dass dieses, auf $F_1 (A_1^{(1)} \cdots A_1^{(n)})$ gelegt, letztere Fläche deckt, zugleich aber die Punkte von $R^{(1)}$ zu liegen kommen auf $R_1^{(1)}$, die Punkte des rechten Randes von $A^{(1)}$ auf dem rechten Rande, die des linken auf dem linken Rande von $A_1^{(1)}$ ausgebreiet erscheinen u. s. f. Jetzt wollen wir, während F' auf $F_1 (A_1^{(1)} \cdot\cdot A_1^{(n)})$ bleibt, letztere Fläche in ihre frühere Form zurückbringen, so dass die Ränder von $A_1^{(1)} A_1^{(2)} \cdot\cdot$ wieder zusammenstossen. Dasselbe geschieht dann auch mit den Rändern von $A^{(1)} A^{(2)} \cdots$, und wenn wir sie zusammenheften, so hat nunmehr F die Form von F_1 angenommen. Da wir hierbei nur nöthig hatten, solche Punkte wieder zu vereinigen, die durch die A-Schnitte getrennt wurden, so muss nach (*b*) F in F_1 durch stetige Umformung allein verwandelt werden können.

Der allgemeine Fall ist leicht auf den eben betrachteten zurück zu führen, indem man in F und F_1 zuerst die sämmtlichen C-Schnitte ausführt, welche möglich sind. Dadurch werden F und F_1 in Flächen verwandelt, die keine C-Schnitte zulassen; damit aber die obigen Betrachtungen anwendbar seien*), müssen nach Ausführung der C-Schnitte die Ränder in gleicher Zahl vorhanden sein, und da auch die Zahlen der ursprünglichen Ränder wegen (c) gleich sein müssen, so haben wir folgenden Satz:

(17) . . . *Von zwei Flächen kann die eine in die andere immer und nur dann durch stetige Umformung allein in die andere verwandelt werden, wenn in beiden die Ränder und die nichtzerstückenden Rückkehrschnitte in gleicher Anzahl vorhanden sind. Die beiden Flächen müssen daher auch gleiche Grundzahlen besitzen.*

---

*) Selbstverständlich sind nach Verbindung der Ränder der A-Schnitte auch die Ränder der C-Schnitte wieder zu vereinigen.

VI.

Es erübrigt noch einige Folgerungen zu erwähnen, die auf Flächen oder Flächensysteme sich beziehen, aus denen durch irgend welche nichtzerstückende oder zerstückende Schnitte andere Flächen abgeleitet werden.

Die ursprünglich gegebene Fläche F besitze A A-Schnitte und Γ C-Schnitte und wir setzen

$$P = N - 1 = \mathsf{A} + 2\,\Gamma.$$

Wenn wir in F irgend welchen nichtzerstückenden Schnitt führen und dadurch die Fläche in eine andere verwandeln, der auch eine andere Zahl P zukommen wird, so ist bezüglich der A-, B-, und C-Schnitte die Frage nach der Aenderung von P durch das Vorhergegangene als erledigt zu betrachten. Von nichtzerstückenden Schnitten bleibt daher nur zu erwähnen ein Einschnitt, der in einem Randpunkte beginnt und in einem Punkte der Fläche endigt, und jener, der seinen Anfangs- und Endpunkt in Flächenpunkten liegend hat. Ersterer ändert an der Zahl P Nichts, letzterer vermehrt die Zahl der Ränder um Eins, also auch A.

(18) . . . *Wird eine Fläche, deren Grundzahl $P + 1$ ist, verwandelt in eine andere Fläche durch einen A-Schnitt oder einen nichtzerstückenden B-Schnitt, so vermindert sich die Zahl P um Eins, sie bleibt ungeändert, wenn der Schnitt ein C-Schnitt oder ein Einschnitt ist, der in einem Randpunkte beginnt oder endet, sie vermehrt sich um Eins durch einen Einschnitt, dessen Anfangs- und Endpunkte nicht Randpunkte sind.*

Zerstückt kann eine Fläche nur durch B-Schnitte und Rückkehrschnitte werden. In den beiden Flächenstücken werden sodann noch gewisse A- und C-Schnitte möglich sein, deren Summe mit A, respective mit Γ verglichen werden soll.

Was nun irgend einen der C-Schnitte anbelangt, so kann nach (2) immer eine Weglinie gezogen werden, welche die Linie des zerstückenden Schnittes nicht schneidet; nach dieser ist also ein C-Schnitt ausführbar, der für den ursprünglichen substituirt werden kann. Die Summe aller in den beiden durch den Schnitt entstandenen Flächentheilen ausführbaren C-Schnitte bleibt also Γ. Ein zerstückender B-Schnitt vermehrt die Zahl der Ränder um Eins; da aber sämmtliche Ränder, die nach Führung des Schnittes vorhanden sind, sich auf zwei getrennte Flächenstücke vertheilen, so ist ein A-Schnitt weniger ausführbar als im Falle eines nichtzerstückenden B-Schnittes, somit bleibt die Summe aller A-Schnitte noch immer A. Ein Rückkehrschnitt aber führt *zwei* neue Ränder ein, und da durch das Zerstücktsein nur *ein* A-Schnitt ausfällt, so folgt eine Vermehrung von A um Eins.

(19) . . . *Wird eine Fläche F durch einen Schnitt zerstückt und bildet man für die beiden Theile die Summe der in ihnen noch möglichen A- und C-Schnitte, so bleibt die Summe der C-Schnitte immer gleich der Zahl der in F ausführbaren C-Schnitte; hingegen bleibt die Summe der A-Schnitte nur dann gleich der Zahl der A-Schnitte in F, wenn der Schnitt ein B-Schnitt, sie wird aber um Eins grösser als diese Zahl, wenn der Schnitt ein Rückkehrschnitt war.*

An der Fläche F sollen nun ganz beliebige Schnitte ausgeführt werden, und es sei α die Anzahl aller A-Schnitte, β und β' die Anzahl der nichtzerstückenden und der zerstückenden B-Schnitte, ebenso γ und γ' die Zahlen der ausgeführten C-Schnitte und zerstückender Rückkehrschnitte, endlich ε und ε' die Zahlen für die Einschnitte, die am Rande beginnen oder endigen, und beziehungsweise derjenigen, die ihre beiden Endpunkte auf der Fläche haben.

Nach (18) und (19) erhält man ein Flächensystem, in welchem die Summe aus den noch ausführbaren A-Schnitten und der doppelten Zahl der noch möglichen C-Schnitte

$$P - \alpha - \beta + \gamma' + \varepsilon' = P'$$

sein wird. Ist ferner die Zahl der entstandenen Flächenstücke φ, so ist zugleich

$$\varphi = \beta' + \gamma' + 1.$$

Die Zahl P' lässt sich auch durch die Grundzahlen N_1, N_2, N_3 $\cdots$ N_φ der φ Flächenstücke darstellen, denn es ist

$$N_1 - 1 + N_2 - 1 + \cdots + N_\varphi - 1 = N_1 + N_2 + \cdots + N_\varphi - \varphi = P'$$

ebenfalls die Summe aus allen in den sämmtlichen Flächenstücken noch ausführbaren A-Schnitten und der doppelten Zahl der noch möglichen C-Schnitte.

Setzt man noch

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_\varphi = N'$$

und eliminirt γ' aus den beiden ersterhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$N - 2 = N' + \alpha + \beta + \beta' - 2\varphi - \varepsilon'.$$

(20) . . . *Wenn man an einer Fläche ganz beliebige Schnitte ausführt, durch welche dieselbe in irgend welche Stücke zerfällt, so ist die Summe aus den Grundzahlen aller entstandenen Flächenstücke und der sämmtlichen geführten A- und B-Schnitte vermindert um die Summe der doppelten Zahl der Flächenstücke und derjenigen Einschnitte, die ihre beiden Endpunkte auf der jeweiligen Fläche haben, eine constante Zahl und zwar die um Zwei verminderte Grundzahl der ursprünglichen Fläche.*

Dieser Satz kann in sehr mannigfaltiger Weise specialisirt werden. Sind z. B. die entstandenen Flächenstücke sämmtlich einfach zusammenhängend, also

$$N_1 = N_2 = \cdots = N_\varphi = 1\,,$$

so wird $N' = \varphi$ und wenn wir noch annehmen, dass keine Einschnitte vorkommen, daher $\varepsilon' = 0$ zu setzen ist, giebt die dem Satz (20) entsprechende Gleichung:

$$N - 2 = \alpha + \beta + \beta' - \varphi\,;$$

$\alpha + \beta + \beta'$ ist die Anzahl aller geführten Querschnitte und die Gleichung enthält den Eingangs erwähnten Fundamentalsatz, der gewöhnlich den Ausgangspunkt für die Untersuchungen über den Zusammenhang der Flächen bildet.

In der gegenwärtigen Fassung ist er etwas allgemeiner, da auch beliebige Rückkehrschnitte ausgeführt werden dürfen. Wir wollen ihn benützen, um den Ausdruck für die Grundzahl einer beliebigen n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche mit Windungspunkten herzuleiten. Sei die Zahl der Windungspunkte ω und $m_1\, m_2\, m_3 \cdots m_\omega$ die Zahlen der Blätter, die beziehungsweise im 1^{ten}, 2^{ten}, $3^{\text{ten}} \ldots \omega^{\text{ten}}$ Windungspunkte zusammenhängen. Um jeden Windungspunkt herum führen wir einen Rückkehrschnitt, der alle n Blätter durchdringt und eigentlich äquivalent ist mehreren Rückkehrschnitten, die wir aber nicht abzuzählen brauchen. Die Zahl der einfach zusammenhängenden Flächenstücke, die auf diese Weise abgetrennt werden, ist

$$(n-m_1+1)+(n-m_2+1)+(n-m_3+1)+\cdots+(n-m_\omega+1)=\omega n-w,$$

wenn

$$w=(m_1-1)+(m_2-1)+\cdots+(m_\omega-1)$$

die Summe der Ordnungszahlen aller Windungspunkte ist.

In der übrig bleibenden Fläche ziehen wir Schnitte, die ebenfalls alle Blätter durchdringen, und von denen der erste so geführt ist, dass er ausgeht vom Rande des um den ersten Windungspunkt gezogenen Rückkehrschnittes und endigt in dem Rande des Rückkehrschnittes um den zweiten Windungspunkt, der zweite, von diesem ausgehend, führt zum Rande des Rückkehrschnittes um den dritten Windungspunkt u. s. f. bis man wieder zum ersten Rückkehrschnitt zurückgelangt. Die früher zusammenhängende Fläche zerfällt durch diese Schnitte, die theils A-Schnitte, theils B-Schnitte sein können, in $2\,n$ Theile und die Zahl aller dieser Schnitte ist ωn, daher

$$\varphi = 2\,n + \omega n - w$$

die Gesammtzahl aller entstandenen Flächenstücke. Von diesen ist eines zweifach zusammenhängend, nämlich jenes, welches den willkürlich anzunehmenden Einschnitt enthält, der die Riemann'sche Kugel-

fläche einrandig macht. Verwandeln wir dieses Flächenstück noch in ein einfach zusammenhängendes, so haben wir

$$\alpha + \beta + \beta' = \omega n + 1$$

und daher:

$$N = w - 2n + 3.$$

Der Satz (20) kann leicht erweitert werden für den Fall, dass ausgegangen wird von einem System von Flächen. Bedeutet N die Summe aller Grundzahlen der gegebenen Flächen und Φ die Zahl derselben, versteht man ferner unter N', α, β, β', ε', φ noch immer dieselben Zahlen wie früher, so lautet die Gleichung:

$$N - 2\Phi = N' - 2\varphi + \alpha + \beta + \beta' - \varepsilon'.$$

Von den vorhergehenden Untersuchungen haben wir ausdrücklich gespaltene Flächen ausgeschlossen. In solchen Flächen sind nichtgeschlossene und verzweigte Randcurven möglich; es kann daher auch nicht ohne Weiteres von einer bestimmten Zahl der Ränder gesprochen und die Unterscheidung zwischen A- und B-Schnitten in der angegebenen Weise nicht mehr festgehalten werden. Aber selbst wenn z. B. ein A-Schnitt zwischen wirklich getrennten Rändern vorhanden ist, wird derselbe nicht immer die bei ungespaltenen Flächen zutreffenden Eigenschaften besitzen, denn wenn beide Ränder, die er verbindet, nicht geschlossen sind, so müssen sie durch ihn nicht zu einem einzigen Rande verbunden werden und der A-Schnitt kann zerstücken. Desgleichen gelten die für C-Schnitte aufgestellten Sätze nicht ausnahmslos für eine gespaltene Fläche.

Dennoch wäre es unrichtig, einer solchen Fläche einen unendlichen Zusammenhang zuzuschreiben*) in dem Sinne, dass für sie die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende durch eine endliche Zahl von Querschnitten nicht möglich sei. Eine solche Verwandlung kann immer durch eine endliche Zahl von Querschnitten ausgeführt werden, und diese Zahl kann zwar beliebig gross sein, es lässt sich aber für sie ein ganz bestimmtes endliches Minimum angeben. Die hierauf bezüglichen Untersuchungen mögen einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Prag, im April 1873.

---

*) Vgl. Thomae's Aufsatz: Einige Sätze aus der *Analysis situs* Riemann'scher Flächen, in Schlömilch's Zeitschrift Bd. 12, S. 367.

Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne.

Par J. P. Gram à Copenhague.

Dans un mémoire inséré au volume 62 du journal de Crelle*), M. Aronhold a cherché de déduire directement de la théorie des transformations linéaires les principes fondamentaux de la théorie des invariants, en montrant, comment ces fonctions se présentent naturellement, quand on cherche les conditions pour la transformation d'une forme donnée en une autre. Cette méthode a des avantages essentielles sur celle de commencer par une définition des invariants, sans montrer à priori l'existence des fonctions en question. Clebsch a fait usage du même procédé**) et quoiqu'il l'ait simplifié en quelques parties, la méthode n'a pas encore été rendue assez simple et élémentaire pour qu'on puisse s'en servir pour donner le fondament générale d'un développement élémentaire de la théorie des invariants et covariants.

C'est pour cette raison que j'ai essayé, dans ce qui va suivre, de pousser à fin la méthode de Aronhold, en appliquant seulement des considérations élémentaires. — La première partie se rattache donc assez près au mémoire cité de Aronhold, dans la seconde partie j'introduis les covariants, dont ensuite je démontre les propriétés les plus importantes par rapport aux transformations linéaires.

Quoique donc la plupart des théorèmes démontrés ne soient pas nouveaux, j'espère que dans les démonstrations de ceuxci il y aura quelque chose digne d'intérêt.

1.

Soit proposée une forme générale de l'ordre p et de n variables $x_1, x_2, \cdots x_n$. — Dans la notation symbolique***) cette forme sera représentée par

---

*) Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Crelle 62, p. 281.

**) Clebsch, Theorie der binären Formen, §§ 79., 80., p. 300.

***) Voir Clebsch, Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelle Bd. 59, et Binäre Formen p. 28.

$$a_x^p = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n)^p,$$

c'est à dire par la puissance $p^{ième}$ d'une forme linéaire où, pour toutes les valeurs des indices $\iota, \varkappa, \lambda \cdots$, on pose

$$a_1^\iota a_2^\varkappa a_3^\lambda \cdots = a_{\iota\varkappa\lambda\ldots} \quad (\iota + \varkappa + \lambda \cdots = p).$$

Si l'on transforme les variables (x) *) par les formules

$$x_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \cdots \alpha_{in}\xi_n,$$

la forme a_x^p sera transformée en une autre de même ordre et, pourvu que le déterminant de transformation ne s'annulle pas, aussi du même nombre de variables. Cette forme, la forme transformée, sera représentée par a'^p_ξ, de sorte qu'on aura

$$a'^p_\xi = a_x^p.$$

Soit encore b_ξ^p une forme quelconque de l'ordre p des variables (ξ). Si par une transformation linéaire il sera possible de transformer a_x^p en b_ξ^p, il faut et il suffit que, pour toutes les valeurs des indices $\iota\,\varkappa\,\lambda \cdots$, on puisse avoir

(1) $$a'_{\iota\varkappa\lambda\ldots} = b_{\iota\varkappa\lambda\ldots}$$

Ces équations, en nombre $\mu = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$, contiennent dans les premiers membres les coefficients (a) et les coefficients (α), encore indéterminés. Par l'élimination de ces derniers, dont le nombre est n^2, on obtient $\mu - n^2$ équations finales dans lesquelles entrent seulement les (a) et les (b), et qui en général seront les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation soit possible.

Pour pouvoir mieux étudier les équations de condition, on forme des équations (1) un système nouveau équivalent de la forme

(2) $$b_{\iota\varkappa\lambda\ldots}\, a'_{\varrho\sigma\tau\ldots} = b_{\varrho\sigma\tau\ldots}\, a'_{\iota\varkappa\lambda\ldots}.$$

Ces équations seront homogènes par rapport à tous les coefficients (a), tous les (b) et tous les (α). Ils donnent comme le système primitif encore $\mu - n^2$ résultants indépendentes, qui seront homogènes, soit par rapport à tous les (a), soit à tous les (b).

Chacun de ces résultants peut être mis sous la forme

(3) $$R = A_0' B_0 + A_1' B_1 + \cdots A_\nu' B_\nu = 0,$$

les (A') désignant des fonctions entières et homogènes de même degré seulement des (a), les (B) des fontions ayant les mêmes propriétés par rapport aux (b).

---

*) En général, je dénote par (x) tout le système des variables x_i marqués des indices différents, également par (α) tous les coefficients de transformation α_{ik}, etc.

Le résultant R peut être supposé irreductible, de sorte qu'il n'existe aucune relation linéaire plus simple entre les mêmes fonctions (A'), dont les coefficients dépendent des (b).

De chaque résultant R on peut alors dériver au moins un autre plus simple.

Soit c_ζ^p une troisième forme, qui par une transformation linéaire peut se transformer en a_x^p. Entre les coefficients (c) et (a) il subsiste alors une relation analogue à $R = 0$, savoir

$$R' = A_0' C_0 + A_1' C_1 + \cdots A_\nu' C_\nu = 0\,, \tag{4}$$

les fonctions (C) étant semblables aux (B). Du même, entre les coefficients (b) et (c) on a la relation

$$R'' = B_0' C_0 + B_1' C_1 + \cdots B_\nu' C_\nu = 0\,, \tag{5}$$

où (B') sont analogues aux (A') dans R.

En résolvant les égalités (3) et (4) par rapport à A_0' et en égalant les deux valeurs, on obtient

$$A_1' \frac{B_1}{B_0} + A_2' \frac{B_2}{B_0} + \cdots A_\nu' \frac{B_\nu}{B_0} = A_1' \frac{C_1}{C_0} + A_2' \frac{C_2}{C_0} + \cdots A_\nu' \frac{C_\nu}{C_0}\,. \tag{6}$$

Cette relation doit être identique. — Car par une transformation linéaire, dont les coefficients soient (β), on peut transformer b_ξ^p en c_ζ^p, supposé que a_x^p puisse se transformer en b_ξ^p, ce qui doit être le cas selon les relations (3). Si donc on exprime les (c) par (b) et (β), on obtient de (6) une relation entre les (a), les (b) et les coefficients (β) parfaitement arbitraires. Cette relation qui ne contient que ν fonctions (A') ne peut donc avoir lieu, à moins qu'elle ne soit identique. C'est à dire, il faut que

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{C_1}{C_0}, \quad \frac{B_2}{B_0} = \frac{C_2}{C_0} \text{ etc.,}$$

pour qu'on puisse transformer b_ξ^p en c_ζ^p. Du même on aura entre les coefficients de a_x^p et de b_ξ^p des égalités semblables, savoir

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0}, \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{B_2}{B_0} \text{ etc.,} \tag{7}$$

les (A) étant les mêmes fonctions des (a) que les (B) des (b).

C'est évident, que ces égalités seront les conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité de la transformation de a_x^p en b_ξ^p, car leur nombre est au moins égal au nombre des résultants primitifs $R = 0$.

Les quotients rationels $\frac{A_i}{A_0}$ *ont donc la propriété caractéristique de rester invariables, soit qu'on les forme de coefficients d'une forme quel-*

conque a_x^p, *soit de coefficients d'une forme qui, par une transformation linéaire, peut être dérivée de* a_x^p.

Par cette raison on les nomme *les invariants absolus* de la forme a_x^p.

L'égalité des invariants absolus est donc la condition nécessaire et suffisante pour que, par une transformation linéaire, deux formes générales se puissent réduire l'une à l'autre.

De là il suit aussi, que tous les invariants absolus seront des fonctions de $\mu - n^2$ entre elles.

Si de la même manière on cherchait les conditions de la transformation d'un système de formes en une autre par la même transformation linéaire, on trouverait aussi des équations de la forme (7), c'est à dire l'égalité des invariants absolus.

Soit $\frac{P(a)}{Q(a)}$ un invariant absolu d'un système de formes, donc je désigne les coefficients par (a). Si l'on désigne par (a') les coefficients transformés, $c \cdot a \cdot d \cdot$ les coefficients des formes transformées, on a l'égalité

$$\frac{P(a')}{Q(a')} = \frac{P(a)}{Q(a)},$$

d'où il suit que*)

$$(8) \qquad P(a') = \varrho \cdot P(a) ; \qquad Q(a') = \varrho \cdot Q(a) .$$

Par une transformation linéaire quelconque le numérateur et le dénominateur des invariants absolus ne sont par conséquent altérés que par un facteur, qui évidemment ne peut dépendre des coefficients (a), mais seulement des coefficients de transformation.

Toutes les fonctions des coefficients d'un système de formes, qui ont cette propriété, sont nommées *invariants.*

Le facteur ϱ étant une fonction des (α), nous le représenterons par $\varphi(\alpha)$ ou par $\varphi(\alpha_{ik})$. — Les invariants pouvant être supposés homogènes, $\varphi(\alpha)$ doit l'être aussi par rapport à tous les coefficients (α). On a donc

$$P(a') = \varphi(\alpha) \cdot P(a) .$$

Si l'on transforme de nouveau les formes une fois transformées, et désigne par (a'') les nouveaux coefficients transformés, par (β) les coefficients de la dernière transformation, on obtient

$$P(a'') = \varphi(\beta)\, P(a') = \varphi(\beta)\, \varphi(\alpha)\, P(a) .$$

Supposons que la dernière transformation soit la réciproque de la première, $P(a'')$ est donc égal à $P(a)$ et l'on aura

$$(9) \qquad \varphi(\beta)\, \varphi(\alpha) = 1 .$$

*) Voir Clebsch, Binäre Formen p. 306.

Mais pour la transformation réciproque on a

$$\beta_{ik} = \frac{r_{ki}}{r};$$

en posant le déterminant $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \cdots \alpha_{nn} = r$, et r_{ki} désignant le sous-déterminant de α_{ki} dans r.

L'égalité (9) peut donc s'écrire ainsi

$$\varphi(\alpha_{ik}) \cdot \varphi\left(\frac{r_{ki}}{r}\right) = 1\,,$$

ou, en dénotant par ν le degré de la fonction homogène φ

$$\varphi(\alpha_{ik})\,\varphi(r_{ki}) = r^{\nu}. \tag{10}$$

D'où il suit, que $\varphi(\alpha)$ doit être un facteur rationel du degré ν de r^{ν}, l'autre facteur est du degré $(n-1)\cdot\nu$.

Les éléments du déterminant r étant supposés indépendents entre elles, r n'est pas résoluble en facteurs rationels. Les deux facteurs de r^{ν} doivent donc être des puissances entières de r, multipliées par un même constant numérique, qui pourtant ne peut être que l'unité positive. — Donc il faut que $\nu = n\lambda$, λ étant un nombre entier, et l'on aura

$$\varphi(\alpha) = r^{\lambda}; \qquad \varphi(r_{ik}) = r^{(n-1)\lambda}. \tag{11}$$

D'où résulte le théorème suivant *).

Quand une fonction des coefficients d'un système de formes par une transformation linéaire des formes n'est altérée que par la multiplication par un facteur constant, alors ce facteur est nécessairement une puissance du déterminant de la transformation.

La définition complète des invariants est donc donnée par l'identité

$$J(a') = r^{\lambda} \cdot J(a)\,, \tag{12}$$

$J(a)$ étant un invariant quelconque.

Le théorème subsiste encore quand P contient, non seulement des coefficients, mais aussi des variables. On peut directement appliquer la même démonstration.

2.

Une transformation linéaire des variables d'une forme comporte également une transformation linéaire des coefficients, les coefficients transformés (a') étant des fonctions, linéaires par rapport aux (a), homogènes du degré n par rapport aux (α). Pour déterminer la forme

*) Voir la mémoire citée de Aronhold, le théorème V; Clebsch: Binäre Formen p. 306.

générale de ces fonctions, nous considérons en premier lieu des formes linéaires.

Soit (a_x) un système de formes linéaires contenant des variables (x) ou (y), (z) $\cdots$, cogrédients avec ceux-la. Les coefficients transformés seront alors déterminés par ce que pour toutes les formes on doit avoir identiquement

$$a'_\xi = a_x .$$

Si l'on écrit les formules de transformation des (x) ainsi

$$(13) \qquad x_i = \alpha_i \xi_1 + \beta_i \xi_2 + \gamma_i \xi_3 + \cdots \nu_i \xi_n , \quad (i = 1, 2 \cdots n)$$

on trouve pour les coefficients transformés les expressions suivantes

$$a_1' = a_\alpha , \quad a_2' = a_\beta , \quad a_3' = a_\gamma \cdots\cdots\cdots a_n' = a_\nu .$$

En résolvant ces équations par rapport aux (a), on obtient les (a) exprimés par (a'). Le déterminant de la transformation dite est $r = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \cdots \nu_n = (\alpha\beta\gamma \cdots \nu)$.

Les coefficients symboliques d'une forme de l'ordre p étant transformés par les mêmes formules que ceux de la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une forme linéaire a_x, on trouvera pour les coefficients transformés de a_x^p les expressions symboliques suivantes

$$(14) \quad {a'_1}^{\iota} {a'_2}^{\varkappa} {a'_3}^{\lambda} \cdots = a_\alpha^\iota a_\beta^\varkappa a_\gamma^\lambda \cdots \qquad (\iota + \varkappa + \lambda + \cdots = p) .$$

Si donc dans l'identité

$$J(a) = \frac{J(a')}{r^\lambda} ,$$

$J(a)$ désignant un invariant quelconque d'un système de formes, on remplace les coefficients de transformation (α), (β), (γ) $\cdots$ respectivement par les n systèmes différents (x), (y), (z) $\cdots$ de variables cogrédients, le déterminant $(\alpha\beta\gamma \cdots)$ devient $(xyz \cdots)$ et les coefficients transformés deviendront toutes les polaires des formes primitives par rapport aux n systèmes de variables.

De là suit le théorème suivant:

On peut exprimer rationellement tous les invariants d'un système de formes par toutes les polaires des formes données par rapport aux n systèmes de variables (x), (y), (z) $\cdots$, en remplaçant pour chaque forme le coefficient symbolique $a_1^\iota a_2^\varkappa a_3^\lambda \cdots$ par la polaire corréspondante $a_x^\iota a_y^\varkappa a_z^\lambda \cdots$, et en divisant ensuite par une puissance du déterminant $(xyz \cdots)$. Réciproquement toute fonction rationelle entière, obtenue en divisant par une puissance de $(xyz \cdots)$ un aggrégat de polaires, aura toujours la propriété caractéristique des invariants: savoir que la fonction, formée des éléments transformés, ne diffère que par un facteur, qui est une puissance du déterminant de transformation r, de celle formée des éléments primitifs.

Si une telle fonction ne contient que des coefficients elle est donc un invariant, si elle contient des variables elle s'appelle un *covariant*.

Le théorème énoncé se démontre facilement. Soit F une fonction rationelle entière des polaires, divisible par $(xyz\cdots)^\lambda$, K le quotient de division, K' la transformée de celle-ci. Par une transformation quelconque F reste invariable, toutes les polaires restant invariables, tandisque, selon la règle de la multiplication des déterminants, $(xyz\cdots) = r(\xi\eta\zeta\cdots)$, $(\xi)(\eta)(\zeta)\cdots$ étant les variables transformés, corréspondents aux (x), (y), $(z)\cdots$. On aura donc

$$K' = \frac{F}{(\xi\eta\zeta\cdots)^\lambda} = \frac{F}{r^{-\lambda}(xyz\cdots)^\lambda} = r^\lambda \frac{F}{(xyz\cdots)^\lambda} = r^\lambda \cdot K,$$

ce qui fut à démontrer.

Parmi les covariants il faut compter, soit les formes elles mêmes et leurs polaires, pour lesquelles $\lambda = 0$, soit le déterminant $(xyz\cdots)$, qu'on nomme le covariant identique.

Tous les covariants, qui ne contiennent plus de n systèmes de variables cogrédients, peuvent être obtenus par la méthode développée, ce qu'on peut vérifier en remplaçant dans un covariant quelconque comme ci-dessus (α), (β), $(\gamma)\cdots$ réspectivement par (x), (y), $(z)\cdots$. Les coefficients (a') deviennent alors des polaires, les variables $(\xi)(\eta)(\zeta)\cdots$, qu'on obtient en résolvant les équations de transformation (13), deviennent égaux à l'unité ou s'annullent, et le covariant transformé se réduit à une fonction des polaires, qui divisée par $(xyz\cdots)^\lambda$ donne le covariant primitif.

Pour les covariants qui contiennent un nombre quelconque de systèmes de variables, on peut appliquer la même représentation, ce qui est évident selon le théorème de Clebsch sur la réprésentation symbolique des covariants et invariants*). — Je n'insisterai pas sur ce sujet.

La représentation développée à quelque interêt comme se rattachant immédiatement à la définition des fonctions en question; j'en donnerai ensuite une application importante.

3.

Jusqu'ici nous avons supposé que toutes les formes considérées soient des formes générales, considérons à présent des formes spéciales.

Si entre les coefficients d'une forme ou d'un système de formes il existe une seule relation homogène, $\varphi(a) = 0$, *invariable par une trans-*

---

*) Crelle's Journal Bd. 59. Une démonstration élémentaire de ce théorème important est donnée par M. Zeuthen dans le „Tidesskrift for Mathematik" Copenhague 1872.

formation linéaire, il faut nécessairement que $\varphi(a)$ *doit être un invariant.*

Car $\varphi(a) = 0$ devant entrainer $\varphi(a') = 0$ on aura

$$\varphi(a') = c \cdot \varphi(a),$$

donc $\varphi(a)$ est un invariant.

S'il-y-avait une relation homogène $\varphi(a) = 0$, $\varphi(a)$ n'étant pas un invariant, il-y-aura nécessairement d'autres relations analogues, afin que la même relation puisse subsister pour une forme quelconque transformée.

Car on aura pour toute transformation $\varphi(a') = 0$. Si pour (a') nous substituons leurs expressions en (a) et en les coefficients de transformation (α), nous obtiendrons $\varphi(a')$ sous la forme

$$\varphi(a') = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots\cdot c_m \varphi_m,$$

les (c) étant fonctions des (α), les (φ) des (a).

La transformation étant complètement arbitraire, les (c) sont des constants arbitraires. Afin que $\varphi(a')$ soit donc égal à zéro il faut nécessairement que simultanément

$$\varphi_1(a) = 0, \quad \varphi_2(a) = 0 \cdots\cdots \varphi_m(a) = 0.$$

Remplaçons, comme nous l'avons fait plus haut, les coefficients de transformation par n systèmes de variables $(x)\,(y)\,(z)\cdots$, alors $\varphi(a')$ devient une fonction invariable composée des polaires, conséquemment un covariant, dont les coefficients évidemment seront $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$ $\cdots\cdot \varphi_m(a)$. On voit ainsi que ce covariant doit s'évanouir identiquement si la relation $\varphi(a) = 0$ aura lieu pour toute transformation linéaire.

$\varphi(a)$ est du reste elle-même un des coefficients du covariant obtenu, ou au moins une fonction linéaire à coefficients numériques de ceux-ci. Car on l'obtient de $\varphi(a')$ en posant

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = k \\ 0 & \;\;\text{„} \quad i \gtrless k, \end{cases}$$

ce qui est le même que dans le covariant trouvé de poser

$$x_1 = y_2 = z_3 = \cdots\cdot = 1.$$

en égalant tous les autres variables à zéro.

Si la fonction proposée $\varphi(a)$ n'était pas homogène, on verrait facilement en la résolvant en des parties homogènes que chacune de celles-ci donnerait naissance à un covariant, qui devrait s'annuller séparément.

Ordinairement un covariant ainsi obtenu contient comme facteur une puissance du covariant identique $(xyz\cdots)$; en divisant par celle-ci

on obtient un covariant plus simple, dont les coefficients sont les mêmes que ceux du covariant obtenu en premier lieu.

Du développement précédent suit immédiatement le théorème suivant bien connu*), mais tant que je sais pas encore démontré.

Toutes les relations entre les coefficients d'un système de formes, qui sont invariables par des transformations linéaires seront exprimées par l'évanouissement identique d'un certain nombre de covariants, qui ne contiennent plus de n systèmes de variables cogrédients. — Particulièrement ces covariants peuvent devenir des invariants.

Réciproquement, *si un covariant d'un système de formes s'annulle identiquement, le même sera le cas pour le covariant corréspondant d'un système transformé.*

Cela suit immédiatement de l'identité $K' = r^\lambda K$, les coefficients de K' étant des fonctions linéaires des coefficients de K, ce que l'on voit en introduisant pour les variables (x) (y) (z) leurs expressions en (ξ) (η) (ζ), et en comparant ensuite les coefficients des mêmes combinaisons des variables transformés.

Le théorème énoncé montre aussi, que c'est une condition *nécessaire*, afin qu'on puisse transformer deux systèmes de formes speciales l'une dans l'autre, que pour les deux systèmes les mêmes covariants s'annullent identiquement.

Cette condition sera du reste en même temps que l'égalité des invariants absolus la condition suffisante.

Soit effectivement proposé un système de formes dont les coefficients soient au nombre μ, et un autre système de formes réspectivement des mêmes ordres. Les mêmes covariants (invariants) sont supposés de s'annuller pour tous les deux systèmes, ce qui corréspond pour chacun d'eux à ν relations indépendentes entre les coefficients. Conséquemment on doit avoir $\mu - \nu - n^2$ conditions pour la possibilité de la transformation.

En même temps, entre les $\mu - n^2$ invariants absolus de chaque système de formes il subsistera ν relations en conséquence des ν relations entre les coefficients; il n'y-a donc pour chaque système que $\mu - \nu - n^2$ indépendents entre les invariants absolus. L'égalité des invariants absolus indépendents, qui seront formés de la même manière des coefficients de chaque système, sera donc la condition nécessaire et suffisante pour la transformation en question. — D'où le théorème suivant**):

*) Voir par exemple Clebsch: Binäre Formen p. 91.

**) Cfr. Clebsch: Binäre Formen p. 365. Il faut remarquer, que l'égalité des invariants absolus renferme que les mêmes *invariants* s'annullent, mais point toujours que les mêmes covariants s'évanouissent identiquement. De là viennent les cas spéciales par la théorème comme l'a énoncé Clebsch.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse transformer l'un à l'autre deux systèmes de formes quelconques, sont 1°, que les mêmes covariants (et invariants) s'annullent identiquement pour tous les deux systèmes et 2°, que les invariants absolus soient égaux.

Ce théorème montre comment la théorie des covariants et invariants suffit pour discuter complètement la théorie des transformations linéaires.

Toutes les formes, qui ont les mêmes covariants et invariants zéro, auront toutes les mêmes propriétés caractéristiques, indépendentes des transformations linéaires. On peut donc sur cette circonstance fonder une classification naturelle des formes de même ordre suivant leurs covariants et invariants zéro; ce qui au fond revient au même principe que la classification des courbes suivant leurs singularités.

Si l'on connait pour une forme proposée les relations invariables $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \cdots$ qui doivent subsister entre les coefficients, la méthode indiquée plus haut donne le moyen de déterminer directement les covariants ou invariants, qui doivent s'annuller.

Dans une des fonctions φ on n'a qu'à substituer des polaires pour les coefficients (a) et à reduire par division par $(xyz\cdots)$ tant que possible. On obtient par là un covariant, qui corréspond à un certain nombre de relations. — Des relations non contenues dans le covariant trouvé, on prend une nouvelle et la traite de la même manière, ce qui donne un deuxième covariant qui corréspond également à plusieurs relations; et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les relations soient consommées. — Par là on verra aussi, si quelqu'une des fonctions φ serait un invariant.

Quand le nombre n des variables surpassè deux, il peut être avantageux pour les sous-déterminants d'ordres différents de $(xyz\cdots)$ d'introduire des variables cogrédients de différents classes, ainsi comme Clebsch l'a indiqué*). Il faut alors, que tous les coefficients de la forme intermédiaire, ainsi obtenue, s'annullent. On peut ensuite, si cette forme contiendrait plusieurs systèmes de variables de même classe, égaler tous ces systèmes, pourvu que l'évanouissement de la dernière forme entraîne nécessairement que la première s'évanouisse aussi.

Pour illustrer la méthode expliquée par un simple exemple connu, nous cherchons le covariant qui doit s'annuller identiquement, afin qu'une forme ternaire cubique soit un cube parfait**).

On aura entre les coefficients d'un cube de la forme linéaire ternaire a_x des relations suivantes de second degré

---

*) Clebsch: Ueber ein Fundamentalproblem der Invariantentheorie, Schriften der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1872.

**) Voir Gundelfinger: Mathematische Annalen Bd. IV, p. 571.

$$(a_1 a_2 a_3)^2 = a_1^2 a_2 \cdot a_2 a_3^2\,, \qquad a_1^3 \cdot a_2^3 = a_1^2 a_2 \cdot a_1 a_2^2\,,$$

et les autres analogues à celle-ci. Si donc la forme symbolique a_x^3 soit un cube parfait, on doit avoir les relations symboliques suivantes

$$a_1 a_2 a_3 \cdot b_1 b_2 b_3 = a_1^2 a_2 \cdot b_2 b_3^2\,; \quad a_1^3 \cdot b_2^3 = a_1^2 a_2 \cdot b_1 b_2^2 \text{ etc.}$$

La première donne le covariant

$$a_x a_y a_z b_x b_y b_z - a_x^2 a_y b_y b_z^2 = a_x a_y b_y b_z [a_z b_x - a_x b_z]\,.$$

En posant $(zxy) = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3$ on a l'identité $a_x b_y - a_y b_x = (abu)$, et on peut donc reduire le covariant trouvé à

$$(abu)\, a_x a_y b_y b_z\,,$$

qui est égal à

$$\tfrac{1}{2}(abu)\, a_y b_y [a_x b_z - a_z b_x] = \tfrac{1}{2}(abu)(abv)\, a_y b_y\,,$$

(v) étant cogrédient à (u). Ce covariant est la polaire de $(abu)^2 a_y b_y$ par rapport à v, donc il s'annulle avec ce-ci, et la relation proposée donne ainsi la forme intermédiaire

$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x\,,$$

qui doit s'évanouir identiquement.

De même la relation $a_1^3 b_2^3 - a_1^2 a_2 b_1 b_2^2 = 0$ donne le covariant

$$a_x^3 b_y^3 - a_x^2 a_y b_x b_y^2 = a_x^2 b_y^2 [a_x b_y - a_y b_x] = (abu)\, a_x^2 b_y^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(abu)[a_x^2 b_y^2 - a_y^2 b_x^2] = \tfrac{1}{2}(abu)^2 [a_x b_y + a_y b_x]\,,$$

qui est une polaire par rapport à (y) de la forme Θ obtenue en premier lieu. Toutes les autres relations étant tout à fait analogues aux deux relations considérées, elles ne peuvent donner quelque forme nouvelle. — La condition nécessaire et suffisante, afin qu'une forme ternaire cubique soit un cube parfait, est donc que la forme intermédiaire $\Theta = (abu)^2 a_x b_x$ soit identiquement égale à zéro.

Copenhague, Mai 1873.

Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen.

Von Paul du Bois-Reymond in Freiburg i. Br.

Lejeune-Dirichlet's Resultat, dass die Fourier'sche Reihe für einen Werth x_1 von x, an dessen beiden Seiten die darzustellende Function um ein Endliches verschiedene Werthe

$$\lim f(x_1 - \varepsilon) = f(x_1 - 0), \qquad \lim f(x_1 + \varepsilon) = f(x_1 + 0)$$

besitzt, deren Mittelwerth

$$\tfrac{1}{2}\big(f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0)\big)$$

annehme, ist einige Mal Gegenstand kritischer Bemerkungen gewesen*). Eine etwas eingehendere Untersuchung der sprungweisen Werthänderungen analytisch dargestellter Functionen wird daher nicht überflüssig erscheinen. Sie führt zu einem allgemeinen Satze über die Sprünge willkürliche Functionen darstellender Integrale und Reihen.

I. Allgemeine Bemerkungen über sprungweise Werthänderungen der Functionen.

1.

Die im Endlichen sprungweise sich ändernden expliciten Functionen einer reellen Veränderlichen sind Grenzwerthe analytischer Ausdrücke, z. B. Reihen mit in's Unendliche wachsender Gliederzahl oder Integrale, bei denen ein Parameter oder eine Grenze einen numerischen Grenzwerth annimmt. Bei unstetigen Functionen wie:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, \qquad f(0-0) = -1, \qquad f(0+0) = +1,$$

ist die unendliche Operation nur durch die Bezeichung verdeckt. Denn $f(x)$ ist der Limes ($n = \infty$) der für $x = 0$ stetigen Function:

---

*) Siehe u. A. H. Schläfli, Borchardt's Journal, Bd. 72, S. 284.

$$\frac{x^{n-1}+\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n!}}{2x^n+\frac{x^{n-1}}{1}+\cdots+\frac{1}{n!}}.$$

Wir können also allgemein die unstetige Function mit

$$f(x)=\lim_{h=\infty} f(x,h)$$

bezeichnen, wo im Falle z. B. einer Reihe h die unendlich werdende Gliederzahl vorstellt. Von der Function $f(x)$ werden wir annehmen, dass sie vor und nach der Sprungstelle stetig ist und nicht unendlich viele Maxima hat. Es wird zweckmässig sein, unsere Betrachtungen an ein einfaches Beispiel zu knüpfen und wir wählen dazu die bekannte Function:

$$f(x,h)=\operatorname{arctg} h(x_1-x).$$

2.

Um die Unstetigkeit von $\lim f(x,h)=\lim \operatorname{arctg} h(x_1-x)$ für $x=x_1$ wohl zu verstehen, haben wir zu beachten, in welcher Weise die unbestimmten Grössen x und h die bestimmten Werthe x_1 und ∞ annehmen. Wir können x den Werth x_1 ertheilen:

1) nachdem $h=\infty$ gesetzt worden,

2) bevor dies geschehen,

3) können wir gleichzeitig h unendlich und x_1-x Null werden lassen.

Diese drei Operationen schreiben wir in Formeln, wie folgt:

$$\lim_{\varepsilon=0}\lim_{h=\infty} f(x_1\pm\varepsilon,h), \quad \lim_{h=\infty}\lim_{\varepsilon=0} f(x_1\pm\varepsilon,h),$$
$$\lim_{\varepsilon=0,\,h=\infty} f(x_1\pm\varepsilon,h).$$

Sie führen zu folgenden drei Werthbestimmungen des $\lim \operatorname{arctg} h(x_1-x)$ für $x=x_1$.

1) Beschränkt man die unbestimmte Grösse x dahin, dass sie kleiner oder dass sie grösser als x_1 ist, so ergeben sich für den $\lim f(x,h)$ die Werthe $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$. Wenn man jetzt nachträglich (also nachdem $\lim f(x,h)$ einen der Werthe $\pm\frac{\pi}{2}$ angenommen) x von seinem unbestimmt gelassenen Werthe aus, den wir z. B. als $\frac{x_1}{2}$ uns denken können, bis x_1 wachsen lässt, so wird der $\lim f(x,h)$, welcher gleich $\frac{\pi}{2}$ ist und x gar nicht mehr enthält, auch nur $\frac{\pi}{2}$ bleiben können. *Daher fallen nach dem ersten Verfahren auf $x=x_1$ nur die Werthe $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ von* $\lim f(x,h)$. Noch evidenter wird dies, wenn wir dafür sorgen, dass der Limes nicht unabhängig von x wird, indem wir z. B. $f(x,h)=\operatorname{arctg} h(x_1-x)+x^2$ setzen.

2) Nach dem zweiten Verfahren setzen wir zuerst $x = x_1$, wodurch $f(x, \mathrm{h})$ Null wird. Setzt man darauf $h = \infty$, so bleibt für $x = x_1$ der Werth Null bestehen. Es kommen aber auf die nämliche Weise wie unter 1) die Werthe $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ hinzu, *so dass* $\lim f(x, h)$ *für* $x = x_1$ *jetzt die drei Werthe* $+\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{2}$ *repräsentirt.*

3) Nach dem dritten Verfahren endlich setzt man gleichzeitig $x = x_1$, $h = \infty$. Wird dabei keine besondere Beziehung zwischen dem Wachsthum von h und der Abnahme von $x_1 - x$ angenommen, so kann das Produkt $h(x_1 - x)$ an der Grenze jeden beliebigen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ erhalten, und $\lim f(x, h)$ stellt für $x = x_1$ alle Werthe zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ vor.

Den eben entwickelten drei Auffassungen entsprechen die drei Darstellungen:

Fig. 1.

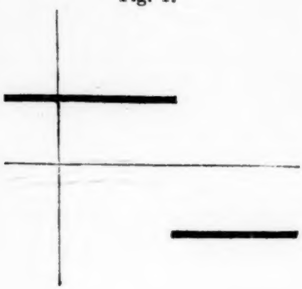


Fig. 2.

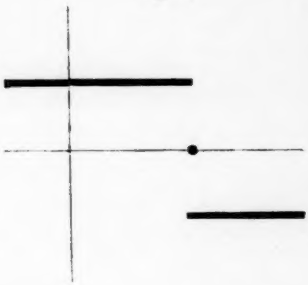
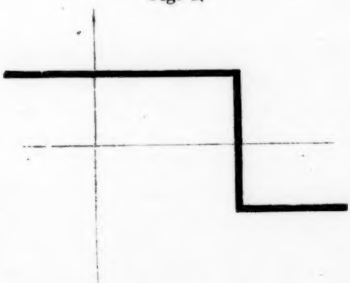


Fig. 3.



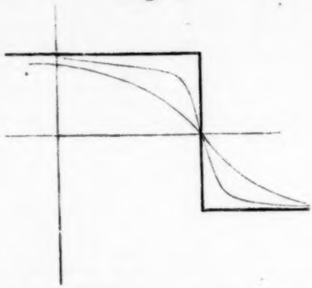
3.

Falls der $\lim f(x, h)$ in einem bestimmtem Problem auftritt, so wird dieses darüber entscheiden, wie man ihn aufzufassen hat. Tritt

aber die Frage an uns heran, was man sich, ganz allgemein zu reden, darunter zu denken habe, so ist dies Sache individuellen Beliebens. Mir persönlich sagt es am meisten zu, Fig. 3 als Darstellung des lim arctg $h(x_1 - x)$ mir zu denken. Ich kann meine Wahl durch folgende Gründe rechtfertigen.

Die gebrochene Linie ist offenbar die Grenzgestalt der stetigen Curve $y = \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$, wenn h noch nicht unendlich ist, wie dies Fig. 4 andeutet:

Fig. 4.



Dann lässt sich nach der dritten Auffassung die Gleichung

$$y = f(x) = \lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$$

umkehren. D. i. man kann daraus $x = \varphi(y)$ darstellen, was nach den beiden ersten Auffassungen nicht möglich ist. Denn, wie die Figur 3 zeigt, ist $x = x_1$ im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$. Nun ist auch

$$x = x_1 - \frac{\operatorname{tg} y}{h},$$

welches im nämlichen Intervalle den nämlichen lim x ergiebt.

Die dritte Auffassung erschöpft den ganzen in lim $f(x,h)$ enthaltenen Werthevorrath*), und wahrt die Stetigkeit der Reihenfolge dieser Werthe.

Diese Stetigkeit betreffend fällt noch Folgendes ins Gewicht. Die Unstetigkeiten der Fourier'schen Darstellungen willkürlicher Functionen (Reihen und Integral) sind, worauf bald des Genaueren eingegangen werden soll, ganz von derselben Beschaffenheit, wie die des lim arctg $h(x_1 - x)$. Hier lässt sich aber die dritte Auffassung besser den physikalischen Anschauungen anpassen als die beiden anderen. Denn wenn z. B. eine plötzliche Dichtigkeitsänderung eines Mediums darzustellen ist, so wird die erste Vorstellungsweise der Idee entsprechen, dass absolut ohne Uebergang zwei verschiedene Dichtigkeiten aneinander stossen. Die zweite wird in der Trennungsfläche ohne physikalischen Grund das Mittel der angrenzenden Dichtigkeiten setzen. Die dritte

*) Wie sich Hr. C. Neumann treffend ausdrückt.

wird einem in einer unendlich dünnen Schicht stattfindenden continuirlichen Uebergang der einen Dichtigkeit in die andere mathematisch sich anschliessen, und so dem „natura non facit saltum" in der analytischen Darstellung zu seinem Recht verhelfen. Hiernach ist die erste zur Noth, die dritte Vorstellung durchaus, die zweite gar nicht physikalisch gerechtfertigt. Aehnliches gilt von dem durch Fourier'sche Darstellungen auszudrückenden Anfangszustand einer Saite, der Grenzlinie einer elastischen Membran, u. s. w.

Aus allen diesen Gründen halte ich den Dirichlet'schen Mittelwerth an der Unstetigkeitsstelle — so lange man in der allgemeinen Theorie bleibt — für eine weniger natürliche Auffassung, als die geradlinige Verbindung der an die Unstetigkeitsstelle angrenzenden Werthe.

Ganz Aehnliches gilt auch von der sprungweisen Werthänderung des Differentialquotienten einer stetigen Function, wie im folgenden Artikel erörtert wird.

4.

Es möge bis zum Punkte x_1 der Differentialquotient $\frac{df}{dx} = f'(x)$ stetig sein und von da ab wieder, aber die Grösse $f'(x_1 + 0)$ sei nicht gleich $f'(x_1 - 0)$: die Curve $y = f(x)$ hat alsdann an der Stelle x_1 einen Knick. Eine kleine Veränderung der gewöhnlichen Definition des Differentialquotienten führt dazu, auch diese Unstetigkeit nach den obigen Principien behandeln zu können.

Statt unter der Ableitung $f'(x)$ den Limes ($\varepsilon = 0$) einer der Grössen:

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}, \quad \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

zu verstehen, wollen wir sie symmetrisch als:

$$\lim_{x=x'=x''} \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

auffassen, wo der Limes bedeutet, dass die unbestimmten Grössen x' und x'' auf beliebige Weise in den Werth x übergehen. Oder, was damit gleichbedeutend ist, wir setzen:

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon=0,\, \varepsilon_1=0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1}$$

wo die Grössen ε und ε_1 (die auch in Bezug auf ihre Zeichen beliebig sind) auf alle erdenklichen Weisen gleichzeitig oder nacheinander Null werden. Dies ist offenbar der allgemeinste, jeden anderen als speciellen Fall enthaltende Begriff vom Differentialquotienten.

Bilden wir nach dieser Definition den Differentialquotienten für eine Ecke x_1, so wird er, ε und ε_1 positiv vorausgesetzt:

$$\lim \frac{\varepsilon f'(x_1 + \eta) + \varepsilon_1 f'(x_1 - \eta_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

wo die Mittelwerthe η und η_1 den Bedingungen $0 \leqq \eta \leqq \varepsilon$, $0 \leqq \eta_1 \leqq \varepsilon_1$ genügen, oder unter Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung in Bezug auf ε und ε_1 wird er:

$$\lim \frac{\varepsilon f'(x_1 + 0) + \varepsilon_1 f'(x_1 - 0)}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

stellt also, wenn über das Nullwerden von ε und ε_1 gar nichts vorausgesetzt wird, jeden Werth zwischen $f'(x_1 - 0)$ und $f'(x_1 + 0)$, diese incl., vor. Daher diese Darstellung des Differentialquotienten der Vorstellung entspricht, dass die Ecke einen Uebergang der einen Tangenteneigung in die andere bei unendlich kleiner Krümmung vermittelt. Für $\varepsilon = \varepsilon_1$ geht der Differentialquotient an der Ecke in das Mittel $\frac{1}{2}\big(f'(x_1 + 0) + f'(x_1 - 0)\big)$ über, indessen ist die Annahme $\varepsilon = \varepsilon_1$ eine ganz willkürliche Beschränkung.

Es mag sich z. B. um die zweiten Differentialquotienten des Potentials V einer homogenen Kugel an deren Oberfläche handeln. Man hat:

$$\text{im Innern der Kugel } \frac{\partial V}{\partial x} = -\tfrac{4}{3}\pi D x, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{4}{3}\pi D$$

$$\text{im Aeusseren } \frac{\partial V}{\partial x} = -\tfrac{4}{3}\pi D \frac{R^3 x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \tfrac{4}{3}\pi D \frac{R^3(3x^2 - r^2)}{r^5}.$$

An der Oberfläche entsprechen $f'(x_1 + 0)$:

$$\tfrac{4}{3}\pi D \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2}$$

und $f'(x_1 - 0)$:

$$-\tfrac{4}{3}\pi D$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ in seiner allgemeinsten Auffassung ist somit:

$$\tfrac{4}{3}\pi D \frac{\varepsilon \cdot \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2} - \varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

Wenn $\varepsilon_1 = 0$ gesetzt wird, ist sein Werth:

$$\tfrac{4}{3}\pi D \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2},$$

so dass die Summe $\Delta V = 0$ wird. Dies ist der äussere Differentialquotient. Setzt man erst $\varepsilon = 0$, so wird $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi D$ und $\Delta V = -4\pi D$. Es sind das also die extremen Fälle. Durch alle übrigen Annahmen über das Nullwerden von ε und ε_1 erhält man alle Uebergänge von $\Delta V = -4\pi D$ in $\Delta V = 0$. Die Annahme $\varepsilon = \varepsilon_1$ ergiebt wieder den Mittelwerth $\Delta V = \frac{1}{2}(-\pi D + 0) = -2\pi D$, ist indessen, wie bemerkt, eine willkürliche Beschränkung. Wenn also Gauss den Mittelwerth $-2\pi D$ in der Oberfläche der Kugel offenbar mit Recht verwirft, so vermag ich doch nicht die der ersten Auffassung der vorigen Artikel ent-

sprechende unvermittelte Folge der Werthe $\Delta V = -4\pi D$ und $\Delta V = 0$ für die richtige oder doch die allein richtige Vorstellung zu halten. Sondern die unendlich rasche aber stetige Verwandlung von ΔV aus $-4\pi D$ in Null, wie sie der dritten Auffassung entspricht, erscheint gleichberechtigt und ist mir die angenehmere Vorstellung.

Ich habe nun noch zu zeigen, inwiefern diese Betrachtungen auf alle Integrale und Reihen Anwendung finden, welche willkürliche Functionen darstellen.

II. Ueber die sprungweisen Werthänderungen der willkürliche Functionen darstellenden Integrale und Reihen.

5.

Die Formel, um welche es sich handeln wird, lautet:

$$(\mathrm{I}) \qquad (G_- + G_+) f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_A^B d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x) \text{ *)}.$$

Sie setzt voraus, dass

$$G_+ = \int_0^\infty d\alpha \int_0^b d\beta \varphi(\alpha, \beta), \qquad G_- = \int_0^\infty d\alpha \int_{-a}^0 d\beta \varphi(\alpha, \beta)$$

von a und b unabhängig sind, und dass $A < x < B$. Ist x ausserhalb des Intervalls $A \cdots B$ gelegen, so ist das Integral rechts in (I) Null. Man kann die Formel auch schreiben:

$$(\mathrm{II}) \qquad (G_- + G_+) f(x) = \lim \int_A^B d\beta f(\beta) \Phi(\beta - x, h)$$

wo der lim bedeutet, dass im vollzogenen Integral $h = \infty$ zu setzen ist und wo:

$$\Phi(\beta, h) = \int_0^h d\alpha \varphi(\alpha, \beta).$$

6.

An ein paar Beispielen werde ich zunächst die Beziehungen dieser Formeln zum Gegenstand dieses Aufsatzes erläutern.

Man hat:

---

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, S. 65 und diese Annalen Bd. IV, S. 362.

$$\operatorname{arctg} h b = \int_0^h d\alpha \int_0^b d\beta \frac{1-\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha^2\beta^2)^2}$$

$$\operatorname{arctg} h a = \int_0^h d\alpha \int_{-a}^0 d\beta \frac{1-\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha^2\beta^2)^2}$$

Beide Integrale werden also $\frac{\pi}{2}$ für $h=\infty$ und von a und b unabhängig. Nach (I) hat man mithin:

$$\pi f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_A^B d\beta f(\beta) \frac{1-\alpha^2(\beta-x)^2}{(1+\alpha^2(\beta-x)^2)^2}.$$

Die Unstetigkeiten des Integrals sind also nur die der Function $f(x)$, wenn man diese ausserhalb des Integrals $A \cdots B$ Null annimmt. Falls z. B. $f(x)$ im Intervall $A \cdots B$ Eins ist, hat man:

$$\int_0^h d\alpha \int_A^B d\beta \frac{1-\alpha^2(\beta-x)^2}{(1+\alpha^2(\beta-x)^2)^2} = \operatorname{arctg} h(B-x) - \operatorname{arctg} h(A-x)$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{h(B-A)}{1+h^2(B-x)(A-x)}$$

woraus sofort klar ist, dass bei dieser besonderen Annahme über $f(x)$ die Sprünge von $f(x)$ für $x=A$ und $x=B$ ganz wie im Art. I. behandelt werden können.

Das zweite Beispiel sei eine jener Unstetigkeiten, die „durch Abänderung eines Functionalwerthes hebbare" genannt worden sind.

Durch geeignete Specialisirung von Formel (II) findet man:

$$f(0) \int_0^\infty \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \lim_{h=\infty} \int_0^\infty d\alpha f(\alpha) \frac{\varphi(\alpha h)}{\alpha}.$$

Setzen wir $\varphi(\alpha) = \sin \alpha^2$ und schreiben $f(x+\alpha)$ statt $f(\alpha)$, so ergiebt sich voraus:

$$\lim \int_0^\infty \frac{\sin h^2\alpha^2}{\alpha} f(x+\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{4} f(x+0).$$

Ferner

$$\lim \int_{-\infty}^0 \frac{\sin h^2\alpha^2}{\alpha} f(x+\alpha) d\alpha = -\frac{\pi}{4} f(x-0).$$

Also:

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(x+\alpha) \frac{\sin h^2\alpha^2}{\alpha} = \frac{\pi}{4} \{f(x+0) - f(x-0)\}$$

woraus:

$$\frac{\pi}{8}\{f(x+0)-f(x-0)\}=\int\limits_0^\infty d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\beta f(\beta)\alpha(\beta-x)\cos\alpha^2(\beta-x)^2\,.$$

Diese Formel hat folgende eigenthümliche Beschaffenheit. Das Integral rechter Hand ist Null überall, wo $f(x)$ stetig ist, und hat einen Werth nur, wo $f(x)$ springt. Setzen wir $f(x)$ Null von $-\infty$ bis a, und gleich $\frac{8}{\pi}$ von a bis ∞, so kann der Limes von

$$f(x,h)=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^h d\alpha\int\limits_a^\infty d\beta\,\alpha(\beta-x)\cos\alpha^2(\beta-x)^2=\frac{2}{\pi}\int\limits_{h^2(a-x)^2}^\infty\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha\,,$$

wie aus der zweiten $f(x,h)$ gegebenen Form ohne Weiteres zu ersehen, auf folgende drei Weisen aufgefasst werden. Setzt man $f(a)=\lim_{x=a}\lim_{h=\infty}f(x,h)$ so ist $f(x)$ für alle Werthe von x incl. $x=a$ Null. Setzt man $f(a)=\lim_{h=\infty}\lim_{x=a}f(x,h)$ so ist $f(x)$ sonst überall Null nur für $x=a$ ist $f(x)=1$. Setzt man endlich $f(a)=\lim_{x=a,\,h=\infty}f(x,h)$, so ist $f(x)$ sonst Null, nur für $x=a$ repräsentirt $f(a)$ alle Werthe von Null bis Eins.

Es sei z. B. $a=0$, ferner sei $z=f(x^2+y^2)$ die Gleichung einer Fläche, also:

$$z=\lim\frac{2}{\pi}\int\limits_{h^2(x^2+y^2)}^\infty\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha\,,$$

so ist diese Fläche nach der ersten Auffassung des Limes die xy-Ebene, nach der zweiten die xy-Ebene mit dem Punkt $x=0$, $y=0$, $z=1$, nach der dritten die xy-Ebene mit einem Loth von der Länge 1 im Punkt $x=0$, $y=0$ errichtet.

Was wir bei besondern willkürliche Functionen darstellenden Integralen und besonderen Annahmen über die willkürlichen Functionen oben gesehen, nämlich die Gültigkeit der drei Auffassungen des Art. 1. ist bei den allgemeinen Formeln (I) und (II) weiter zu verfolgen, wobei sich die Aufgabe stellt, wie folgt:

Wir schreiben statt I.:

$$(G_-+G_+)f(x,h)=\int\limits_0^h d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\beta f(\beta)\varphi(\alpha,\beta-x)\,,$$

wo $\lim f(x,h)=f(x)$, und statt A und B $-\infty$ und $+\infty$ gesetzt wurde, unter der Voraussetzung, dass das Integral nach β dann vermöge der Beschaffenheit von $f(\beta)$ convergirt, was z. B. der Fall sein wird, wenn $f(\beta)$, ausser in einem im Endlichen gelegenen Intervall, Null ist. Nun sei $f(x_1-0)$ für einen Werth $x=x_1$ nicht gleich $f(x_1+0)$. *Es ist der Limes von $f(x,h)$ zu finden, wenn die un-*

bestimmten Grössen $x_1 - x$ *und* h *auf irgend eine vorgeschriebene Weise die bestimmten Werthe* 0 *und* ∞ *annehmen.*

7.

Wir setzen, um die Aufgabe des vorigen Artikels zu lösen:

$$\int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(\alpha,\beta-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\Phi(\beta-x,h) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta+x)\Phi(\beta,h)$$

und schreiben $\psi(\beta)$ statt $f(\beta+x_1)$, so dass $\psi(\beta)$ für $\beta=0$ springt. Wir haben dann den Limes des Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta,h)$$

zu untersuchen, wenn ε und h Null und Unendlich werden.

Es sei zunächst $\varepsilon \gtreqless 0$, und wir untersuchen einzeln die Integrale:

$$J_1 = \int_0^\infty d\beta\, \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta,h), \quad J_2 = \int_\infty^0 d\beta\, \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta,h),$$

auf ihre Grenzwerthe. Das erste lässt sich auf die Form

$$\int_0^\infty d\beta\, \psi(\beta)\Phi(\beta,h) + \int_0^\infty d\beta \bigl(\psi(\beta+\varepsilon)-\psi(\beta)\bigr)\Phi(\beta,h)$$

bringen, deren erster Theil für $h=\infty$

$$\psi(+0)\,G_+$$

wird, während der zweite für $\varepsilon=0$, $h=\infty$, wie mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes leicht festzustellen, Null wird. So dass also:

$$\lim J_1 = \psi(+0)\,G_+ .$$

Um nun das Integral:

$$J_2 = \int_{-\infty}^0 d\beta\, \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta,h)$$

an der Grenze $\varepsilon=0$, $h=\infty$ zu bestimmen, schreiben wir es zunächst so:

$$\int_{-\infty}^0 d\beta\,\Phi(\beta,h)\bigl\{\psi(\beta+\varepsilon)+\varrho(\beta)\bigl(\psi(-0)-\psi(+0)\bigr)\bigr\}$$
$$+\bigl(\psi(+0)-\psi(-0)\bigr)\int_{-\varepsilon}^0 d\beta\,\Phi(\beta,h).$$

Hierin stellt $\varrho(\beta)$ eine unstetige Function vor, die Null ist für

$-\infty \leqq \beta < \varepsilon$ und Eins für $\varepsilon \leqq \beta \leqq 0$. Dann ist die Function

$$\psi(\beta+\varepsilon) + \varrho(\beta)\{\psi(-0) - \psi(+0)\},$$

vorausgesetzt, dass $\psi(\beta)$ nur für $\beta = 0$ unstetig wird, im ganzen Intervall $-\infty$ bis 0 stetig. Denn wenn $\psi(\beta+\varepsilon)$ für $\beta = -\varepsilon$ plötzlich den Zuwachs $\psi(+0) - \psi(-0)$ erhält, so wird dieser Zuwachs durch das zweite Glied gerade aufgehoben. Der Limes von

$$\int_{-\infty}^{0} d\beta\, \Phi(\beta, h)\{\psi(\beta+\varepsilon) + \varrho(\beta)(\psi(-0) - \psi(+0))\}$$

ist hiernach unabhängig von der Art des Nullwerdens von ε und $\frac{1}{h}$, wie dies bei dem Integral J_1 schon gezeigt wurde, und wird:

$$\psi(-0)\, G_- .$$

Es ist also

$$\lim \int_{-\infty}^{0} d\beta\, \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta, h) = \psi(-0)G_- + (\psi(+0) - \psi(-0)) \lim \int_{-\varepsilon}^{0} d\beta\, \Phi(\beta, h).$$

Setzen wir die ursprünglichen Bezeichnungen zurück, so ergiebt sich für ein positives ε:

$$\lim \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(\alpha, \beta - x_1 - \varepsilon)$$

$$= f(x_1+0)G_+ + f(x_1-0)G_- + \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \lim \int_0^h d\alpha \int_{-\varepsilon}^{0} d\beta\, \varphi(\alpha, \beta).$$

Ganz ebenso würde man für ein negatives ε erhalten haben:

$$\lim \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(\alpha, \beta - x_1 + \varepsilon)$$

$$= f(x_1+0)G_+ + f(x_1-0)G_- - \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \lim \int_0^h d\alpha \int_0^{\varepsilon} d\beta\, \varphi(\alpha, \beta).$$

Beide Formeln vereinigt geben den Satz:

Wenn $f(x)$ für $x = x_1$ den Zuwachs $f(x_1+0) - f(x_1-0)$ erhält, und Lim einen ganz beliebigen Grenzübergang der unbestimmten Grössen $x_1 - x$, h in die Werthe 0, ∞ bezeichnet, so ist:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \operatorname{Lim} \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(\alpha, \beta - x) \\ = f(x_1+0)G_+ + f(x_1-0)G_- - \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \operatorname{Lim} \int_0^h d\alpha \int_0^{x_1 - x} d\beta\, \varphi(\alpha, \beta), \end{cases}$$

welcher die am Schlusse des vorigen Artikels gestellte Aufgabe löst.

8.

Es ist zunächst leicht den Satz des vorigen Artikels im Falle eines successiven Grenzübergangs zu bestätigen. Setzt man erst $x = x_1$ und dann $h = \infty$, so wird das Integral rechts Null und der Werth des Integrals links ist:

$$f(x_1 + 0)G_+ + f(x_1 - 0)G_-\,,$$

welcher, falls $G_+ = G_-$ ist, in das Dirichlet'sche Mittel:

$$\frac{G_+ + G_-}{2}\{f(x_1 + 0) + f(x_1 - 0)\}$$

übergeht. Ist $x < x_1$ und man setzt zuerst $h = \infty$, so wird das Integral rechts hierdurch schon von vornherein G_+, und die rechte Seite wird:

$$(G_+ + G_-)f(x_1 - 0)\,,$$

welches also der Werth des Integrals links ist, wenn x bis x_1 wächst. Für $x_1 < x$ und $h = \infty$ ist das Integral rechts $-G_-$, so dass das Integral links, wenn x bis x_1 abnimmt, gleich:

$$(G_+ + G_-)f(x_1 + 0)$$

wird, wie dies Alles mit der bisherigen Theorie übereinstimmt.

Zu den drei Auffassungen des Art. 2. verhält sich also die allgemeine Formel (III) so. Setzt man:

$$f(x, h) = \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(\alpha, \beta - x)$$

so ist

$$\lim_{x=x_1} \lim_{h=\infty} f(x, h) = \begin{cases} (G_+ + G_-)f(x_1 - 0), & x \leqq x_1 \\ (G_+ + G_-)f(x_1 + 0), & x \geqq x_1 \end{cases}$$

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x=x_1} f(x, h) = G_+ f(x_1 + 0) + G_- f(x_1 - 0)$$

$\lim_{x=x_1,\, h=\infty} f(x, h)$ repräsentirt eine stetige Folge von Werthen, die je nach der Beschaffenheit des Integrals $\int_0^h d\alpha \int_0^{x_1 - x} d\beta\varphi(\alpha, \beta)$ die Werthe $(G_+ + G_-)f(x_1 - 0)$, $(G_+ + G_-)f(x_1 + 0)$ entweder nur verbinden, oder noch ausserhalb des Intervalls, welche diese Werthe einschliessen, sich erstrecken können. Denn das in der Formel (III) rechts auftretende Integral:

$$\int_0^h d\alpha \int_0^\varepsilon d\beta\varphi(\alpha, \beta)\,,$$

wie wir es kurz schreiben wollen, kann auf die Form

$$\lim_{x=0}\lim_{y=0}\{F(\varepsilon,h) - F(\varepsilon,y) - F(x,h) + F(x,y)\}\,, \text{ wo } \varphi(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

gebracht werden*). Hierin kann die Grösse $F(\varepsilon, h)$ wenn ε und $\frac{1}{h}$ gleichzeitig verschwinden, vermöge geeigneter Beschaffenheit der Function F jeden beliebigen Werth erhalten, der durchaus nicht an das Intervall

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^\varepsilon d\beta\,\varphi(\alpha, \beta) \cdots \int_0^\infty d\alpha \int_{-\varepsilon}^0 d\beta\,\varphi(\alpha, \beta)$$

gebunden ist, wie ich dies in einer Abhandlung, deren Gegenstand die *Stetigvieldeutigkeit* der Functionen ist, an mehreren Beispielen gezeigt und erklärt habe.**)

9.

Im Falle der gemeinen Fourier'schen Formel lautet die Formel (III)

$$\operatorname{Lim} \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, f(\beta) \cos\alpha(\beta - x)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{f(x_1+0) + f(x_1-0)\right\} - \left\{f(x_1+0) - f(x_1-0)\right\} \operatorname{Lim} \int_0^{(x_1-x)h} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

und im Falle der Sinus-Cosinus-Reihe:

$$\operatorname{Lim} \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\, f(\beta) \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\beta - x)}{\sin\frac{\beta - x}{2}}$$

$$= \pi \left\{f(x_1+0) + f(x_1-0)\right\} - \left\{f(x_1+0) - f(x_1-0)\right\} \operatorname{Lim} \int_0^{x_1-x} \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha,$$

wo der Lim den beliebigen Grenzübergang $x_1 - x = 0$, $n = \infty$ bedeutet. Das in dieser Formel auftretende Integral rechter Hand schreiben wir:

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\sin\alpha}\, d\alpha$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\alpha}\, d\alpha + \left(\frac{\frac{1}{2}(x_1-x)}{\sin\frac{1}{2}(x_1-x)} - 1\right) \cdot 2 \int_\xi^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\alpha}\, d\alpha,\ 0 < \xi < \tfrac{1}{2}(x_1 - x),$$

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, S. 70.
**) Borchardt's Journal, Bd. 70, S. 10.

nach dem zweiten Mittelwerthsatz. Das zweite Glied wird stets Null für $x_1 - x = 0$. Also ist:

$$\text{Lim}\int\limits_0^{x_1-x}\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha = \text{Lim}\,2\int\limits_0^{\frac{1}{2}(2n+1)(x_1-x)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \text{Lim}\,2\int\limits_0^{n(x_1-x)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Mithin findet man:

$$\text{Lim}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\,d\alpha + \cos x\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha + \cdots \cos nx\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big\{f(x_1+0)+f(x_1-0)\Big\} + \Big\{f(x_1+0)-f(x_1-0)\Big\}\,\text{Lim}\int\limits_0^{n(x-x_1)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Diese Formel enthält das Eingangs dieses Aufsatzes angeführte Dirichlet'sche Resultat vom Mittel der an die Sprungstelle angrenzenden Werthe als speciellen Fall, und muss als die eigentliche Werthbestimmung der Fourier'schen Reihe für Sprungstellen der darzustellenden Function angesehen werden, da sie jeden Werth des Limes der Reihe liefert, wie man auch der Sprungstelle sich nähern und dazu die Gliederzahl unendlich werden lassen möge.

Die in den Formeln für Sprungstellen der Fourier'schen Darstellungen auftretenden Integrale

$$\int\limits_0^{h(x_1-x)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha \qquad \int\limits_0^{n(x_1-x)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

können je nach der gegenseitigen Beziehung, gemäss welcher h und $x_1 - x$ oder n und $x_1 - x$ unendlich und Null werden, jeden Werth von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ annehmen. Also sind alle Werthe, welche die Fourier'sche Formel und die Fourier'sche Reihe an der Sprungstelle repräsentirt, eingeschlossen zwischen den Grenzen $\pi f(x_1 - 0)$ und $\pi f(x_1 + 0)$, ein Intervall, das sie continuirlich ausfüllen, und kein Werth liegt ausserhalb. Diese Eigenschaft kommt, wie im vorigen Artikel betont wurde, nicht allen darstellenden Formeln zu.

Die allgemeine Formel (III) hat eine gewisse Bedeutung in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, die ich zum Abschluss dieser Betrachtungen im folgenden Capitel entwickeln will. Es wird mir dadurch Gelegenheit gegeben, zunächst mit einigen Worten den Zusammenhang der Lehre von den darstellenden Integralen (I) und (II) Art. 5 mit jener Theorie anzudeuten.

III. Bemerkungen über Sprünge der Randfunctionen bei partiellen Differentialgleichungen.

10.

Die Auflösungen partieller Differentialgleichungen der Form:

$$R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+Zu=0,$$

wo die Coefficienten u nicht enthalten, pflegen bestimmt zu sein durch willkürlich gegebene Werthe von u und $\frac{\partial u}{\partial N}$ auf einer gegebenen Curve s, deren Normale mit N bezeichnet sei. Es ist dann die Form der Lösung:

$$u=\int ds f(s)\Phi(s,x,y)+\int ds f_1(s)\Phi_1(s,x,y),$$

die Integrale längs der Curve s genommen. Durch Stetigkeitsbedingungen etc. kann eines der Integrale in Wegfall kommen. Wenn die unbestimmten Veränderlichen x, y Werthe x_1, y_1 erhalten, welche einem Punkte s_1 der Curve s entsprechen, so muss das erste Integral sich auf $f(s_1)$, das zweite auf Null reduciren, während in:

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\int ds f(s)\frac{\partial\Phi}{\partial N}+\int ds f_1(s)\frac{\partial\Phi_1}{\partial N}$$

das erste Integral für $x=x_1$, $y=y_1$ Null wird und das zweite gleich $f_1(s)$.

Statt x, y wollen wir andere Coordinaten einführen, nämlich Curven ν, die senkrecht durch die Curve s hindurchgehen, und Curven σ, die senkrecht durch die ν gehen. Zu diesen wird s gehören und wir betrachten nur das erste Integral, welches werden möge:

$$\int ds f(s)\Psi(s,\sigma,\nu).$$

Wir wollen die ν so rechnen, dass sie in der Curve s gleich Null seien, während die Curven s von einer Curve ν an gerechnet werden.

Giebt man dem σ im vorstehenden Integral einen Werth σ_1 und macht dann $\nu=0$, so wird, wie bemerkt:

$$\text{(IV)}\qquad f(\sigma_1)=\lim_{\nu=0}\int ds f(s)\Psi(s,\sigma_1,\nu).$$

Aus der Formel (II) folgt:

$$f(x)=\lim_{h=\infty}\int d\beta f(\beta)\frac{\Phi(\beta-x,h)}{G_+ + G_-}.$$

Ein Blick auf beide Formeln zeigt, dass sie ganz dasselbe sind. Denn es entsprechen sich σ_1 ν, s und x, $\frac{1}{h}$, β. Wenn Ψ die Grössen s und

σ_1 in allgemeinerer Form enthält, so ist dies nur scheinbar, da Φ die Grösse x ausser in $\beta - x$ noch als Parameter enthalten darf. Es ist überdies nicht schwer nachzuweisen, dass, wenn eine Formel, wie (IV) bestehen soll, Ψ ganz denselben Bedingungen zu unterwerfen ist wie Φ. Die Unmöglichkeit, mit den bekannten Methoden Ausdrücke wie den obigen (IV) zu beherrschen, die Schwierigkeit sie nur zu verificiren (wovon neuere Abhandlungen Zeugniss ablegen), hat mich seiner Zeit bestimmt, die Analogie zwischen Formel (IV) und der Umformung der Fourier'schen Formel:

$$\pi f(x) = \lim_{h=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \frac{\sin h(\beta - x)}{\beta - x},$$

welche mich sehr überraschte, bis zu Aufstellung der Formeln (I) und (II) zu verfolgen. Diese Art der Auffassung der Fourier'schen Formel und der ihr nachgebildeten ist, beiläufig bemerkt, verschieden von den Anwendungen, die Fourier selbst gemacht, und deren Princip darin bestand, dass er seinem Doppelintegral einen Factor $\chi(\beta, x, y)$ gab:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\, \chi(\beta, x, y) \cos \alpha (\beta - x),$$

der an der Grenze 1 wird, so dass das Integral dort in $f(x)$ übergeht, und dass $\chi(\beta, x, y) \cos \alpha (\beta - x)$ der Differentialgleichung genügte.

11.

Um nun zum Gegenstand dieses Aufsatzes zurückzukehren, wollen wir den Fall ins Auge fassen, wo die in der Grenzcurve willkürlich gegebene Function $f(s)$ für $s = \sigma_1$ springt. Deshalb wird die Function

$$u = \int ds f(s)\, \Psi(s, \sigma, \nu)$$

nicht unstetig zu sein brauchen. Für die vollständige Erledigung des Problems der partiellen Differentialgleichung ist es aber nöthig festzustellen, zu welchem Werth man gelangt, wenn man auf irgend einem Wege $\lambda(\sigma, \nu) = 0$ das Integral u zum Punkte $\sigma = \sigma_1$, $\nu = 0$ der Grenzcurve führt. Diesen Werth findet man auf Grund der allgemeinen Formel (III) zu:

$$\text{(V)} \quad f(\sigma_1 + 0) G_+ + f(\sigma_1 - 0) G_- - \{f(\sigma_1 + 0) - f(\sigma_1 - 0)\} \operatorname{Lim} \int_0^{\sigma_1} ds\, \Psi(s, \sigma, \nu),$$

weil:

$$\int_0^{\sigma_1-\sigma} ds\,\Psi(s+\sigma,\sigma,\nu) = \int_\sigma^{\sigma_1} ds\,\Psi(s,\sigma,\nu)\,.$$

Es bedeutet in (V):

$$G_+ = \lim\nolimits_{\nu=0} \int_0^b ds\,\Psi(s+\sigma,\sigma,\nu)\,,\quad G_- = \lim\nolimits_{\nu=0} \int_{-a}^0 ds\,\Psi(s+\sigma,\sigma,\nu)\,,$$

welche Grössen von a und b abhängig sind, und ausserdem ist ja die Formel (V) so geschrieben, dass $G_+ + G_- = 1$ angenommen.

Als Beispiel wollen wir die schon öfter behandelte Lösung von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ für die Kreisfläche betrachten.

12.

Die mit den bekannten Stetigkeitsbedingungen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügende Function u, welche in der Peripherie des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ willkührlich gegeben ist, lautet:

$$2\pi u = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1-r^2)\,f(p)\,dp}{1 - 2r\cos(p-\varphi) + r^2}\,,$$

wo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Hierin entspricht $1 - r$ der Variabeln ν in (IV), $r\varphi$ der Variabeln σ, p dem s.

Um den Werth dieses Integrals für $r = 1$ zu finden, betrachten wir das einfachere:

$$\int_0^a \frac{dp\,(1-r^2)}{1 - 2r\cos p + r^2} = \operatorname{arctg} \frac{(1-r^2)\operatorname{tg} a}{1 - \frac{2r}{\cos a} + r^2}\,.$$

Es ist also nur der Werth des arctg für $r = 1$ festzustellen, ob er Null oder welches Vielfache von π er sei. Null ist er wahrscheinlich nicht, weil für $p = 0$ das Argument des Integrals $dp\,\frac{1+r}{1-r}$ wird, also für $r = 1$ einen unendlichen Werth annimmt*). Da ausserdem $r \leqq 1$, muss der arctg positiv sein.

---

*) In einer Abhandlung, Borchardt's Journal Bd. 73, S. 357, stellt Herr Prym die Behauptung auf, dass das Eingangs des Artikels verzeichnete Integral „auf dem Rande (für $r = 1$) versagt, indem es dort allenthalben den Werth Null liefert". Wenn man unter jenem Integral, unter dem doch r noch

Es sind die Werthe zu untersuchen, welche das Argument des arctg:

$$F(r,a) = \frac{(1-r^2)\,\mathrm{tg}\,a}{1 - \frac{2r}{\cos a} + r^2}$$

durchläuft, wenn a von Null bis zu einem davon verschiedenen Werthe a_1 geht und r von einem von Eins verschiedenen Werth $r_1 < 1$ bis 1

---

steht, sich das denkt, was das Zeichen bedeutet, nämlich das Resultat des *vollzogenen*, Integration genannten Grenzübergangs, so wird das Integral für $r = 1$ nicht versagen, sondern ist, wie im Texte gezeigt wird, gleich $2\pi f(\varphi)$. Wollte man einwenden, unter Integral auf dem Rande sei das zu verstehen, was aus dem Integral wird, wenn *vor* der Integration, also in der noch endlich zu denkenden Summe, $r = 1$ gesetzt wird, so würde jenes Integral dann doch nicht ***Null***, sondern ***unbestimmt***, weil der Nenner eines seiner Elemente Null ist.

Ich glaube jedoch nicht, dass es dem üblichen Sinne unserer mathematischen Bezeichnungen entspräche, wenn man sagte, das in Rede stehende Integral sei auf dem Rande unbestimmt. Genau mit demselben Rechte könnte man von dem Ausdruck:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta f(\beta) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\beta - x)}{\sin \frac{\beta - x}{2}}$$

behaupten, dass er für $n = \infty$ versage, indem er dort für jeden Werth von x einen unbestimmten Werth liefere, und dies ist auch wirklich von Hrn. **Frombeck** in Wien aufgestellt worden.

Wenn in dem Integral einer Function $f(x, h)$ der Parameter h einen Grenzwerth, z. B. den Werth $h = \infty$ erhält, so kann man, da hier zwei Grenzübergänge vorliegen (der von der Summe zum Integral, und der Grenzübergang $h = \infty$), wie im Art. 2. dreierlei Auffassungen mit diesen beiden Grenzübergängen verbinden und unterscheiden:

$$1.\ \lim_{\delta=0} \lim_{h=\infty} \Sigma_p f(p\delta, h), \qquad 2.\ \lim_{h=\infty} \lim_{\delta=0} \Sigma_p f(p\delta, h)$$
$$3.\ \lim_{\delta=0,\, h=\infty} \Sigma_p f(p\delta, h).$$

Nach der ersten Auffassung wird vorstehendes Integral (h für n gesetzt) unbestimmt, nach der zweiten $\pi f(x)$, nach der dritten wird es verschiedener bestimmter und unbestimmter Werthe fähig sein.

Gebräuchlich ist wohl bis jetzt, dass ein Autor, der ohne genauere Angaben das Zeichen $\int$ vor einen Ausdruck setzt, dem Leser damit anzeigen will, er denke sich den Grenzübergang, der Integration genannt wird, bereits vollzogen. Das Resultat dieses Grenzübergangs für ein unbestimmtes r im Integral des Textes, oder für ein solches n im Integral dieser Anmerkung, erhält aber keinen unbestimmten Werth, wenn man $r = 1$, $n = \infty$ setzt.

Will man jedoch mit dem $\lim \int f(x, h)\, dx$ einen von dem gebräuchlichen (dem zweiten) abweichenden jener drei Begriffe verbinden, so ist dagegen nichts einzuwenden, und rein analytisch gedacht, würde ich der dritten Auffassung consequenter Weise den Vorzug geben. Nur muss man dann sich und dem Leser zum Bewusstsein bringen, dass dem alten Zeichen eine neue Bedeutung beigelegt wird.

geht. Diese Werthefolge muss mit $a = 0$, $r = r_1$ anfangen, weil man das Integral bildet, *bevor* $r = 1$ gesetzt wird.

Die Werthefolge von $F(r, a)$ beginnt also und endigt mit Null. Statt sie von $\lim_{a=0} F(r_1, a)$ bis $\lim_{r=0} F(r, a_1)$ gehen zu lassen, können wir sie nur von

$$\lim_{r=0}\left(\lim_{a=0} F(r, a)\right) \text{ bis } \lim_{a=0}\left(\lim_{r=1} F(r, a)\right)$$

gehen lassen, weil durch diese neue Begrenzung nur Nullwerthe ausgeschlossen sind. Um die zwischenliegenden Werthe zu finden, habe ich in der Art. 8. citirten Abhandlung über Stetigvieldeutigkeit Methoden angegeben, welche hier vollständig genügen. Für ihre Anwendung ist es bequemer $F(r, a)$ algebraisch zu machen. Setzen wir $\cos a = 1 - y$, $\varrho = 1 - x$, so folgt:

$$F(\varrho, a) = F(x, y) = \frac{(2x - x^2)\sqrt{2y - y^2}}{-2y + 2xy + x^2 - x^2 y}.$$

Um jetzt alle zwischen „erst $y = 0$ dann $x = 0$“ und „erst $x = 0$ dann $y = 0$“ liegenden Werthe zu finden, hat man in F nach den Vorschriften jener Abhandlung (§ 6.) für y eine Function der Form:

$$\alpha_1 x^{\mu_1} + \alpha_2 x^{\mu_2} + \cdots$$

einzuführen, wo $\mu_1 < \mu_2 < \cdots$, und hat alsdann alle Werthe aufzusuchen, die F annimmt für $x = 0$ und für alle möglichen Annahmen über $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \mu_1, \mu_2, \cdots$. Man übersieht aber in allen solchen Fällen sehr schnell, welche Functionen y von x neue Werthe liefern. Hier ist es $y = \alpha x^2$, welche den ganzen Werthevorrath von $F(x, y)$ erschöpft. Man findet:

$$F(x, \alpha x^2) = \frac{(2 - x)\sqrt{2\alpha - \alpha^2 x^2}}{1 - 2\alpha + 2\alpha x - \alpha x^2}$$

und für $x = 0$, mithin $y = 0$:

$$F(x, \alpha x^2)_{x=0} = \frac{2\sqrt{2\alpha}}{1 - 2\alpha}.$$

Um die stetige Reihenfolge der Werthe $F(0, 0)$ zu erhalten, hat man α von 0 bis ∞ gehen zu lassen. Man erhält also die Werthe:

Substitution	$F(0, 0)$
1. erst $y = 0$, dann $x = 0$	0
2. $y = \alpha x^2$, dann $x = 0$ ergiebt:	
für $\alpha = 0$	0
für α von Null bis $\frac{1}{2}$	von 0 bis $+\infty$
für α von $\frac{1}{2}$ bis ∞	von $-\infty$ bis 0
3. erst $x = 0$, dann $y = 0$	0

In dem in Rede stehenden arctg $F(r,a)$ durchläuft also von $a=0$ bis $a=a$ für $r=1$ $F(r,a)$ die Werthe von 0 bis $+\infty$, von $-\infty$ bis Null, mithin ist

$$\lim_{r=1}\int_0^b \frac{(1-r^2)\,dp}{1-2r\cos p+r^2}=\pi=G_+.$$

Ebenso findet man:

$$\lim_{r=1}\int_{-a}^0 \frac{(1-r^2)\,dp}{1-2r\cos p+r^2}=\pi=G_-.$$

Nach Formel (I) und (II) folgt, weil G_- und G_+ von a und b unabhängig sind:

$$2\pi f(\varphi)=\lim_{r=1}\int_A^B \frac{(1-r^2)f(p)\,dp}{1-2r\cos(p-\varphi)+r^2},$$

falls $A<\varphi<B$. Also ist in der That die Auflösung

$$2\pi u=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(1-r^2)f(p)\,dp}{1-2r\cos(p-\varphi)+r^2}$$

nichts weiter als ein darstellendes Integral von der in Formel (I) Art. 5. enthaltenen Art.

Bestimmen wir noch den Grenzwerth von u, falls r und φ sich einem Punkte $1, \varphi_1$ der Grenze nähern, in dem $f(p)$ springt.

13.

Formel (V) wird in unserem Falle:

$$2\pi\,\mathrm{Lim}\,u=\pi\left\{f(\varphi_1+0)+f(\varphi_1-0)\right\}-\left\{f(\varphi_1+0)-f(\varphi_1-0)\right\}\mathrm{Lim}\int_0^{\varphi_1-\varphi}\frac{(1-r^2)\,dp}{1-2r\cos p+r^2},$$

wo der Limes sich auf die Relation $\lambda(r,\varphi)=0$ bezieht, der gemäss $r=1$, $\varphi=\varphi_1$ werden.

Den nämlichen Werth hat Hr. Prym in der Art. 12. citirten Abhandlung S. 351 unter einer anderen Form erhalten, die wir noch aus der obigen ableiten wollen. Wir setzen $\varphi_1-\varphi=\Delta\varphi$, so dass das Integral rechts wird:

$$\operatorname{arctg}\frac{(1-r^2)\operatorname{tg}\Delta\varphi}{1-\frac{2r}{\cos\Delta\varphi}+r^2}.$$

Das Argument dieses arctg geht vermöge der Substitutionen:

$$r=\sqrt{1-2\varrho\sin\tau+\varrho^2},\quad \operatorname{tg}\Delta\varphi=\frac{\varrho\cos\tau}{1-\varrho\sin\tau},$$

$$\cos\Delta\varphi=\frac{1-\varrho\sin\tau}{\sqrt{1-2\varrho\sin\tau+\varrho^2}},$$

die einfache in der citirten Abhandlung des Hrn. Prym angegebene Bedeutungen haben, über in:

$$\Gamma(\varrho, \tau) = \frac{2\sin\tau\cos\tau - \varrho\cos\tau}{2\sin^2\tau - 1 + \varrho\sin\tau}$$

und für $\varrho = 0$ in

$$\operatorname{tg}(-2\tau) = \operatorname{tg}(n\pi - 2\tau)\,.$$

Der arctg muss, wie die Discussion des vorigen Artikels lehrt, als $\pi - 2\tau$ aufgefasst werden. Denn lassen wir in $\Gamma(\varrho, \tau)$, ohne $\Delta\varphi$ zu verändern, $r = 1$ werden, so ist wie oben $\lim \operatorname{arctg} \Gamma(\varrho, \tau) = \pi$. Lassen wir darauf $\varrho = 0$ werden, so wird noch $\tau = 0$, und der arctg, der schon $= \pi$ ist, bleibt bei diesem Werth. Also muss in $\operatorname{arctg} \Gamma(0, \tau) = n\pi - 2\tau$, $n = 1$ sein. Somit ergiebt sich

$$\begin{aligned}2\pi \operatorname{Lim} u &= \pi\{f(\varphi_1 + 0) + f(\varphi_1 - 0)\} \\ &\quad - \{f(\varphi_1 + 0) - f(\varphi_1 - 0)\}(\pi - 2\tau) \\ &= 2\pi f(\varphi_1 - 0) + 2\tau\{f(\varphi_1 + 0) - f(\varphi_1 - 0)\}\,,\end{aligned}$$

welches die von Hrn. Prym gefundene Form ist.

Das in den beiden letzten Artikeln behandelte Beispiel gestattet, wie Hr. Christophel gezeigt hat*), eine allgemeinere andere Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ umfassende Behandlung, die sich auf die Eigenschaften dieser Differentialgleichung stützt. Ich habe mich indessen an ein Beispiel halten wollen, das zu einer rein analytischen, gerade von der Betrachtung der Differentialgleichung unabhängigen Durchführung geeignet ist.

Freiburg, September 1873.

---

*) Nachrichten der K. Gesellschaft in Göttingen, 1871, S. 438 sqq.

Ueber die allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche.

Von Siegmund Günther in Erlangen.

Von sämmtlichen Methoden, welche, besonders in neuester Zeit, für die näherungsweise Auflösung einer algebraischen Gleichung in Vorschlag gebracht wurden, dürfte sich vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus die Fürstenau'sche als die beste empfehlen. Sie ist die einzige, welche eine völlig bestimmte Wurzel jeder beliebigen *literalen* Gleichung sofort in deren Coefficienten auszudrücken gestattet, während alle übrigen Berechnungsweisen lediglich auf *numerische* Gleichungen sich anwenden lassen. Könnte man vielleicht auch mit der Begründung dieser Methode in der Form, wie sie der Verfasser giebt, nicht völlig einverstanden sein, indem es nicht hinreichend sicher erscheint, die für die Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen bestehenden Regeln ohne Weiteres auch auf den Fall eines unendlich grossen n anzuwenden, so ist jeder derartige Zweifel doch endgültig gehoben durch die Untersuchungen Schröder's*), welcher auf ganz andrem Wege zu einer allgemeinen Auflösungsformel gelangte, in welcher die von Fürstenau angegebene als specieller Fall enthalten ist. Das Einzige, was einer ausgebreiteteren Anwendung dieser Methode etwa noch im Wege stehen könnte, ist die allerdings ungewöhnliche Form, in welcher die Wurzel dargestellt wird; der Begriff unendlicher Determinanten tritt hier, wie Baltzer**) hervorhebt, zum erstenmale uns entgegen, und es müssen diese Ausdrücke ebenso, wie diess in früherer Zeit bezüglich der unendlichen Producte und Kettenbrüche der Fall war, sich ihr Bürgerrecht in der Wissenschaft erst erringen. Ein wesentlicher Schritt hiezu ist gethan, wenn es gelingt, ihre Verwandtschaft mit den uns bereits geläufigen analytischen Formen nachzuweisen; während bis jetzt nur auf die nahen Beziehungen hingewiesen wurde, in welchen diese Ausdrücke zu den recurrirenden

*) Schröder, diese Annalen, Bd. II., S. 347.
**) Baltzer in Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 6, Lit. Bericht, S. 11.

Reihen stehen, soll hier vorzüglich ihr Verhältniss zu den Kettenbrüchen discutirt, resp. ihre Identität mit diesen dargethan werden.

Die absolut kleinste Wurzel der Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

ist gleich folgendem Ausdruck näherungsweise

$$-a_0\frac{P}{R},$$

wo

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ist, während man unter P eine auf die nämliche Weise gebildete, nur um einen Grad niedrigere Determinante zu verstehen hat.

Der n^{te} Näherungsbruch des allgemeinen Kettenbruches

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \cdots + \frac{b_n}{a_n}}}$$

lässt sich, wie man auf dem Wege der Induction leicht findet, darstellen durch folgenden Quotienten*):

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & N_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & M_1 & a_3 & N_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & M_{n-3} & a_{n-1} & & N_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & M_{n-2} & & a_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & N_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ M_0 & a_2 & N_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & M_1 & a_3 & N_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & M_{n-3} & a_{n-1} & & N_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & M_{n-2} & & a_n \end{vmatrix},$$

wobei folgende Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} M_0 N_0 &= -\ b_2\,, \\ M_1 N_1 &= -\ b_3\,, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{n-3} N_{n-3} &= -\,b_{n-1}\,, \\ M_{n-2} N_{n-2} &= -\ b_n\,. \end{aligned}$$

Es kommt nun nur darauf an, die Determinanten P und R in die

*) Ich habe seitdem den Charakter dieser Umformung in einer besonderen Schrift (Erlangen, Besold 1873) näher dargelegt. [Januar 1874.]

hier vorliegende Form überzuführen, um sofort die Identität jener Determinanten-Quotienten mit den Näherungswerthen eines gewissen Kettenbruches hervortreten zu sehen.

Wir bedienen uns zu diesem Zwecke lediglich der beiden Sätze: Eine Determinante wird dadurch mit einer Zahl multiplicirt, dass man eine ihrer Horizontal- oder Verticalreihen mit dieser Zahl multiplicirt; der Werth jeder Determinante bleibt ungeändert, wenn man eine beliebige Colonne von einer andren subtrahirt. Der Kürze halber wollen wir ferner jede Zahlenreihe der Determinante, deren Verbindungslinie der Diagonale parallel läuft, als 1^{te}, 2^{te}, $\cdot\cdot$ n^{te} Diagonalreihe bezeichnen, die gewöhnlich so genannte eigentliche Diagonalreihe als erste genommen. Auch ist es vortheilhaft, die Determinanten P und R auf einen gleichen Grad zu bringen; wir erreichen diess, indem wir

$$-a_0 P = \begin{vmatrix} -a_0 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \end{vmatrix}$$

setzen.

Es seien die beiden Determinanten zunächst vom $(n-1)^{ten}$ Grade. Wir multipliciren die n^{te} Verticalreihe mit a_{n-1} und subtrahiren alsdann von ihr die $(n-1)^{te}$; ebenso verfahren wir hierauf mit der $(n+1)^{ten}$ und subtrahiren von ihr die n^{te}, und fahren so fort, bis wir jedes der n^{ten} Diagonalreihe angehörige Glied berücksichtigt haben.

Wir sehen so, dass schliesslich in dieser n^{ten} Diagonalreihe nur mehr Nullen vorkommen können, und anstatt $(n+1)$ mit Zahlen ausgefüllter Diagonalreihen haben wir deren nur noch n. Es könnte allerdings scheinen, als ob auch auf den Factor a_{n-1}, mit welchem in Folge der Multiplication jeder Term behaftet ist, Rücksicht genommen werden müsste; es steht jedoch nichts im Wege, jedesmal nach vollzogener Subtraction diesen allen Gliedern derselben Verticalreihe gemeinsamen Factor wieder vor die Determinante zu setzen. Wir bekommen so dieselbe multiplicirt mit

$$a_{n-1} \cdot \frac{1}{a_{n-1}}$$

und ihr Werth bleibt ungeändert.

Die nämliche Operation, welche wir hier mit der n^{ten} Diagonalreihe ausgeführt haben, können wir nunmehr fortsetzen für die $(n-1)^{te}$. Indem wir successive jeden dieser Reihe angehörigen Term mit dem links von ihm stehenden und jeden der $(n-2)^{ten}$ angehörigen mit dem rechts von ihm stehenden multipliciren und hierauf in der besprochenen Weise je zwei Verticalreihen von einander abziehen, werden schliesslich auch in der $(n-1)^{ten}$ Diagonalreihe ausschliesslich Nullen

enthalten sein. Auch lässt sich leicht zeigen, dass eine Werthänderung des in Frage kommenden Quotienten durch diese Multiplicationen nicht eintreten kann. Denn während von den Factoren, mit welchen in Folge derselben je zwei benachbarte Verticalreihen behaftet erscheinen, diejenigen, mit welchen die linksstehende dieser beiden Reihen multiplicirt wurde, sich auf die nämliche Weise herausheben, wie diess oben von dem Factor a_{n-1} gezeigt wurde, treten die andren allerdings zunächst vor; da aber im Nenner die nämlichen Operationen ausgeführt werden, wie im Zähler, und da es erlaubt ist, Zähler und Nenner eines Bruches mit der nämlichen Zahl zu multipliciren, so bleibt das Resultat gleichwohl dasselbe.

Fährt man in der hier erörterten Weise fort, so wird man schliesslich dahin gelangen, dass sämmtliche Diagonalreihen, von der n^{ten} bis zur 3^{ten} inclusive aus Nullen bestehen, und da bei dem nach demselben Gesetze gebildeten Nenner sich Alles entsprechend verhält, so erkennen wir, dass jeder nach der Fürstenau'schen Regel angebbare Näherungswerth der gesuchten Wurzel sich als Näherungsbruch eines gewissen Kettenbruches darstellen lässt.

Es bleibt uns nun noch übrig zu zeigen, dass die beiden Näherungsbrüche, welche wir für $\frac{-a_0 P}{R}$ erhalten, je nachdem $-a_0 P$ und R resp. vom $(n-1)^{ten}$ und n^{ten} Grade sind, auch ein und demselben Kettenbruche angehören; es muss also bewiesen werden, dass wenn

$$-a_0 P_{n-1} = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & q_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & p_1 & m_3 & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & m_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & p_{n-3} & m_{n-1} \end{vmatrix}$$

ist, dass alsdann

$$-a_0 P_n = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & q_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & p_1 & m_3 & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & m_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & p_{n-3} & m_{n-1} & q_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & p_{n-2} & m_n \end{vmatrix}$$

sein muss. Der Beweis hiefür ergiebt sich aber sofort, wenn man bedenkt, dass bei der zur Transformirung unsrer Ausdrücke angewandten Subtraction nie eine Verticalreihe von derjenigen abgezogen wurde, welche links, sondern stets von derjenigen, welche rechts von ihr stand. Der Umstand, dass zu den $(n-1)$ Verticalreihen der Deter-

minante für $-a_0 P_{n-1}$ noch eine weitere nach rechts hinzugefügt wurde, kann also durchaus keinen Einfluss üben; die Unterdeterminante des Terms m_n in der für $-a_0 P_n$ gefundenen Determinante ist $= -a_0 P_{n-1}$, und es sind somit

$$-a_0 P_{n-1} \text{ und } -a_0 P_n$$

zwei aufeinanderfolgende Näherungszähler eines Kettenbruches, dessen Bildungsgesetz allerdings nicht näher bekannt ist.

Das ganze Verfahren wird sofort übersichtlich werden, wenn wir es an einem Beispiele vollständig durchführen. Die biquadratische Gleichung

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

ergiebt als Näherungswerth für ihre kleinste Wurzel folgenden Ausdruck:

$$\frac{\begin{vmatrix} -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2^2 - a_1 a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_2 a_3 - a_1 - (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3^2 - a_2) \\ 0 & 0 & a_0 a_2 & a_1 a_3 - a_0 a_2 (a_3^2 - a_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2^2 - a_1 a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_2 a_3 - a_1 - (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3^2 - a_2) \\ 0 & 0 & a_0 a_2 & a_1 a_3 - a_0 a_2 (a_3^2 - a_2) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -a_0 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}};$$

und dieser Ausdruck ist wiederum, zufolge dem Obigen, gleich dem vierten Näherungswerthe des Kettenbruches

$$\frac{-a_0}{a_1} - \frac{a_0 a_2}{a_1} - \frac{a_0 (a_2^2 - a_1 a_3)}{a_1 a_2 - a_0 a_3} - \frac{a_0 a_2 [a_2 a_3 - a_1 - (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3^2 - a_2)]}{a_1 a_3 - a_0 a_2 (a_3^2 - a_2)} - \cdots$$

Baltzer (s. o.) hat als zwei wesentliche Punkte für die wissenschaftliche Sicherstellung der Fürstenau'schen Methode die folgenden bezeichnet: Discussion derselben für den Fall complexer Wurzeln, und Nachweis, dass von je zwei aufeinanderfolgenden Determinanten-Quotienten der eine kleiner, der andre grösser als der wahre Wurzelwerth sein müsse. Das Erste ist seitdem von dem Erfinder selbst geleistet worden*); der Beweis für jene zweite Eigenschaft ergiebt sich uns unmittelbar, indem wir die Identität jenes Quotienten zweier unendlich fortlaufender Determinanten mit einem unendlichen Kettenbruche dargethan haben. Wir haben so folgende beide Sätze erhalten, deren Beweis auf andrem Wege wohl wesentliche Schwierigkeiten darbieten dürfte:

---

*) Fürstenau: *Neue Methode zur Darstellung und Berechnung imaginärer Wurzeln der Gleichungen.* Marburg 1867.

1) *Drückt man die absolut kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung durch den Quotienten zweier unendlichen Determinanten aus, so ist der wahre Werth der Wurzel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerthen dieses Quotienten enthalten.*

2) *Die absolut kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung lässt sich darstellen durch einen aus den Coëfficienten der Gleichung gebildeten unendlichen aber convergirenden Kettenbruch.*

Es ist bei unsrer Transformation vorausgesetzt, dass sämmtliche Coëfficienten der Gleichung von 0 verschieden sind; wäre diess nicht der Fall, so würde dieselbe in der hier durchgeführten Weise nicht vor sich gehen können, indem natürlich die Multiplication einer Colonne der Determinante mit 0 unzulässig wäre. Würde z. B. in der obigen biquadratischen Gleichung $a_2 = 0$ sein, so würde der nach der Fürstenau'schen Vorschrift gebildete Näherungswerth nachstehende Gestalt annehmen

$$\begin{vmatrix} -a_0 & 0 & a_3 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 1 \\ a_0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

und eine Reduction auf Kettenbruch-Determinanten wäre unmöglich. Es würde auch in diesem Falle der oben entwickelte Kettenbruch zu dem unbrauchbaren Näherungswerthe

$$-\frac{a_0}{a_1}$$

führen. Während man also sonst, ehe man die Auflösung einer Gleichung in Angriff nimmt, dieselbe durch passende Substitutionen auf eine reducirte Form zu bringen bemüht ist, muss man dieselbe bei Anwendung dieser Methode in eine andre Gleichung transformiren, deren Coëfficienten sämmtlich von 0 verschieden sind.

Es könnte sich die Frage aufwerfen lassen, in welchem Zusammenhang diese Auflösungsmethode mit der von Lagrange gegebenen steht, welche sich bekanntlich ebenfalls der Kettenbrüche bedient. Ein eigentlicher Zusammenhang zwischen denselben besteht nicht; ihr Unterschied lässt sich dahin präcisiren: Die hier vorgetragne Methode lässt sich ohne Unterschied auf Buchstaben-, wie auf Zahlen-Gleichungen anwenden und liefert eine völlig bestimmte Wurzel; die Lagrange'sche dagegen beschränkt sich auf numerische Gleichungen, und dient nur zur genaueren Bestimmung einer Wurzel, deren Werth schon obenhin bekannt ist. Gelingt es also noch, das Bildungsgesetz des die Wurzel ausdrückenden Kettenbruches genau festzustellen, so ist in unserem Falle die independente Darstellung jedes beliebigen Näherungswerthes dieser Wurzel sofort gegeben, während bei Lagrange's Ver-

fahren zur Berechnung eines folgenden Näherungswerthes die Kenntniss aller vorhergehenden erforderlich ist.

Am deutlichsten charakterisirt sich der Unterschied beider Methoden, wenn wir die Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung, d. h. die Ausziehung der Quadratwurzel, vermittelst jeder derselben durchführen. Ist

$$x^2 = A\,,$$

so findet sich bekanntlich nach Lagrange

$$x = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{2\alpha_0} + x - \alpha_0\,,$$

wo $\alpha_0, \alpha_1 \cdots$ recurrirend berechnet werden müssen. Berechnet man hingegen für die Gleichung

$$x^2 - 2a_1 x = a_0$$

nach der gewöhnlichen Methode den kleinsten Wurzelwerth, so erhält man

$$x = a_1 - \sqrt{a_1^2 + a_0}\,.$$

Für diesen Werth stellen die Fürstenau'schen Determinanten sich sofort als Kettenbruchdeterminanten dar; wir finden

$$x = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -2a_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -a_0 & -2a_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -a_0 & -2a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -2a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -a_0 & -2a_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -a_0 & -2a_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -a_0 & -2a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und erhalten so in der That die anderweitig bekannte Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a_1^2 + a_0} = a_1 + \frac{a_0}{2a_1} + \frac{a_0}{2a_1} + \cdots$$

Erlangen, Anfang März 1873.

Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.

Von A. Brill und M. Nöther*).

Die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Functionen und das Werk von Clebsch und Gordan über denselben Gegenstand bieten eine reiche und für die Geometrie theilweise noch unbenutzte Quelle werthvoller algebraischer Sätze und Begriffe. Indem dieser Theorie der Begriff der algebraischen *Function* zu Grunde liegt, geht die Untersuchung auf solche Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden, deren wesentliche Eigenschaft die Unabhängigkeit von rationalen Transformationen ist. Es ist aber die Aufgabe der Algebra, diese interessanten Beziehungen direct und ohne die in den genannten Theorien angewandte Beihilfe transcendenter Sätze zu beweisen, um dieselben einerseits für ihr eigenes Gebiet zu erwerben, andererseits auch der Geometrie leichter zugänglich zu machen.

Indem die Verfasser sich die Aufgabe stellten, für die wichtigsten jener Sätze die algebraische Form und den algebraischen Beweis zu finden, war es ihre Absicht, einen Ausgangspunkt für die Entwicklung jenes theilweise einem fremden Gebiete entwachsenen Zweiges der Algebra zu finden**). Es genügte in dieser Beziehung, den bekannten Hilfsmitteln der Algebra einige wenige Begriffe hinzuzufügen. Um aber der Darstellung eine grössere Uebersichtlichkeit und Kürze zu verleihen, war es nöthig, auch einige neue Bezeichnungen einzuführen, welche man in den §§. 1. 2. 5. definirt finden wird.

*) Der vorliegende Aufsatz ist die Ausführung einer in den Göttinger Nachrichten (Febr. 1873) enthaltenen Note der Verfasser. — Ein Auszug aus dem Folgenden ist von Herrn Fiedler in die soeben erschienene Uebersetzung der 2. Ausgabe des Salmon'schen Werkes über höhere ebene Curven aufgenommen worden.

**) Wir bemerken, dass dieser Ausgangspunkt ganz verschieden ist von dem ebenfalls algebraischen, welchen Herr Weierstrass zur Aufstellung der Zahl p in seinen Vorlesungen nimmt.

Nach dem Vorgang von Clebsch und Gordan möge im Nachfolgenden die Gleichung, durch welche eine algebraische Function y der Variabeln x definirt wird, als Gleichung einer *Curve*, in den Cartesischen Coordinaten x, y (oder den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, wo $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$) geschrieben, aufgefasst werden (selbstverständlich ohne über die Realität der Variabeln, oder der in der Gleichung auftretenden Coefficienten irgend eine Voraussetzung zu machen). Die Vorzüge der an ein geometrisches Bild sich anlehnenden Darstellungsweise sind an anderen Orten genügend hervorgehoben worden, weshalb dies hier übergangen werden kann; ebensowenig scheint es nothwenig, an dieser Stelle über die mit den elementaren geometrischen Begriffen verbundenen Operationen an der Gleichung etwas zuzufügen. Wenn die hier gewählte Form der Definitionsgleichung für eine algebraische Function — die allgemeine Form der Gleichung einer Curve n.Ordnung — von der von Riemann gewählten Normalform abweicht, so sei erwähnt, dass nicht nur, vermöge der Annahme des § 1., diese letztere in unserer Darstellung mit inbegriffen ist, sondern dass auch alle Ausartungen der Riemann'schen Form, wie z. B. die auf hyperelliptische Functionen führenden Gleichungen, durch den letzten § (§ 7.) des I. Theiles in die Betrachtungen desselben mit hereingezogen worden sind. Diese Betrachtungen erfüllen die wesentliche Forderung, völlig unabhängig von Constantenzählung und somit auch für Curven mit beliebig speciellen Eigenschaften gültig zu sein.

Der erste Theil handelt von den Eigenschaften der Gruppe von Schnittpunkten, welche eine algebraische Curve mit irgend einer „ihr adjungirten", d. h. mit einer solchen Curve, die durch jeden ihrer Doppelpunkte einfach, durch einen i-fachen Punkt $(i-1)$-fach u. s. w. hindurchgeht, ausser diesen noch besitzt. Betrachtet man die Schaaren von Punkt-Gruppen, welche auf der gegebenen Curve durch *bewegliche* adjungirte Curven ausgeschnitten werden, so gelangt man zu einer Geometrie auf der Curve, vermöge deren es möglich wird, die bei eindeutiger Transformation der Curve ungeändert bleibenden Eigenschaften in einfacher Weise zu definiren. — Den Ausgangspunkt für diese Betrachtungen bildet der „Restsatz" (§ 1.), ein Satz über Punktgruppen auf einer Curve, welcher, dem Abel'schen Theorem nahe verwandt, dasselbe in seinen Anwendungen auf Geometrie in vielfacher Hinsicht zu vertreten geeignet ist. Sofern sich vermöge dieses Satzes aus einem vollständigen Schnittpunktsystem Theile desselben als selbständige Punktgruppen ausscheiden lassen, wird eine besondere Betrachtung der Schaaren von Punktgruppen, welche Curven verschiedener Ordnung aus der gegebenen Curve ausschneiden, nothwendig (§§ 2. 3.). Von besonderer Bedeutung erscheinen hierbei solche

„Special“-Gruppen, welche einer gewissen Ungleichung genügen (§ 3. a. E.). Von diesen wird (§ 4.) gezeigt, dass sie immer durch adjungirte Curven (n — 3). Ordnung (wenn n den Grad der gegebenen Curve bedeutet) ausgeschnitten werden können. Hieran anknüpfend wird (§ 5.) ein Satz bewiesen, der nach Riemann, von dem er zuerst ausgesprochen, und nach Roch, von dem er allgemein bewiesen wurde, im Nachstehenden der „Riemann-Roch'sche Satz“ genannt wird. Dieser Satz, der von hervortretender Wichtigkeit ist, ermöglicht den algebraischen Beweis aller der bereits aus der Theorie der Abel'schen Functionen bekannten Sätze über die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten Curven (n — 3). Ordnung, über die bei eindeutiger Transformation erhaltenen Eigenschaften einer Curve und der ihr adjungirten Curven (n — 3). Ordnung, die Erhaltung des Geschlechtes u. s. f. (§ 6.).

Im zweiten Theil, der sich vorzugsweise mit einer allgemeinen Curve ihres Geschlechtes beschäftigt, wird (§ 9.) das Problem der Special-Gruppen in algebraischer Form aufgestellt und zur Herstellung einer Ungleichung für dieselben benutzt. Für einen Grenzfall (§ 10.), der durch diese Ungleichung bezeichnet ist, lässt sich die Anzahl der Lösungen (§ 11.) jenes algebraischen Problems bestimmen und in einzelnen Fällen auf indirectem Wege bestätigen (§ 12.). In den §§ 13—16. werden die Moduln für eine Klasse von Curven definirt und in mehrfacher Weise, je anschliessend an eine der Normalformen (§ 10.), auf die man eine allgemeine Curve ihres Geschlechtes eindeutig transformiren kann, bestimmt und gezählt. Die gegen die Riemann'sche Zahl $3p - 3$ für die Moduln erhobenen Bedenken werden zerstreut und damit diese Frage, wie die Verfasser glauben, endgiltig erledigt.

Das Vorstehende gestattet noch einen Schluss auf die Anzahl der freien Bestimmungsstücke einer Raumcurve von gegebenem Grad und Geschlecht (zwischen denen jedoch eine Ungleichung besteht). (§ 17.)

Zum Schluss folgt eine uneingeschränkt gültige Anwendung der Theorie der Special-Gruppen auf die Definition der besonderen Punktgruppen in der Ebene, deren Untersuchung durch eine Bemerkung von Cayley (Proceed. Math. Soc. Dec. 1870) veranlasst worden war.

I. Theil.

§ 1.

Der Restsatz.

Die nachfolgenden Betrachtungen handeln von den Eigenschaften von Punktsystemen einer ebenen irreducibeln algebraischen Curve mit

beliebigen Doppel- und vielfachen Punkten*), die durch ihre Gleichung $f(x, y) = 0$ (in homogenen Coordinaten $f(x_1, x_2, x_3) = 0$), $f = 0$, oder kürzer durch f bezeichnet werden möge, und zwar beziehen sich dieselben insbesondere auf solche Punktsysteme, welche eine durch die Doppelpunkte von f einfach, die i-fachen Punkte $(i - 1)$-fach hindurchgehende, im Uebrigen aber willkührliche algebraische Curve (welche auch zerfallen kann) ausserdem noch ausschneidet. Curven dieser Art wollen wir „der Curve f adjungirte" oder kurzweg *„adjungirte Curven"* nennen**). Wenn wir uns in der Folge ausschliesslich mit den durch adjungirte Curven ausgeschnittenen Punktgruppen beschäftigen (unter *„Punktgruppe"* ein beliebiges Aggregat von einer endlichen Anzahl von Punkten auf f verstanden), so ist diese Beschränkung nur eine scheinbare; denn man braucht einer nicht adjungirten Curve nur eine solche feste Curve zuzufügen, welche das Aggregat Beider zu einer (zerfallenden) adjungirten Curve vervollständigt.

Man theile das System der Schnittpunkte, welche eine adjungirte Curve mit f ausser den (zur Charakterisirung der adjungirten Curve als solcher) in die *„singulären"* Punkte von f (wir fassen unter dieser Bezeichnung Doppel- und vielfache Punkte zusammen) fallenden Schnittpunkten besitzt, beliebig in zwei Gruppen G_R und G_Q von bez. R und Q Punkten. Mit Sylvester***) nennen wir dann die Gruppe G_Q das *„Residuum"* von G_R oder die zu G_R residuale Gruppe und umgekehrt, indem wir als Residuum einer Gruppe, die von einer adjungirten Curve ausgeschnitten wird, jede Gruppe von Punkten bezeichnen, welche mit den Punkten jener Gruppe und den singulären Punkten von f (jeden i-fachen Punkt von f als $i - 1$-fachen der adj. C. gerechnet) ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden. Legt man nun durch G_Q irgend eine andere adjungirte Curve (was immer möglich ist, wenn man nur den Grad hoch genug wählt) und nennt die Gruppe $G_{R'}$ von R' Punkten, welche diese noch ausserhalb der singulären Punkte ausschneidet, der Gruppe G_R *„corresidual"* in Bezug auf die Gruppe G_Q (weil sie das-

---

*) Wir setzen zunächst noch vielfache Punkte mit *getrennten* Tangenten voraus, werden indess in § 7. zeigen, wie man diese Beschränkung aufheben kann.

**) In unserer Note in den Göttinger Nachrichten werden dieselben „Curven vom Charakter der φ" genannt, indem dort unter „Curven φ" adjungirte Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung verstanden werden.

***) Man vergl. die Vorrede zu der (gleichzeitig mit dem Erscheinen unserer Note veröffentlichten) zweiten Ausgabe des Werkes von G. Salmon: Higher plane curves, woselbst jene Bezeichnung auf Curven 3. Ordnung angewendet wird; oder den Literaturnachweis zu Cap. V. der Uebersetzung dieses Werkes von Fiedler. — In Uebereinstimmung mit der hier adoptirten Bezeichnung wählten wir den Namen „Restsatz" statt des in unserer Note gebrauchten Wortes: „Aequivalenzsatz".

selbe Residuum G_Q wie jene besitzt), so kann man den folgenden *Satz* aussprechen:

Sind auf einer algebraischen Curve die Punktgruppen G_R, $G_{R'}$, $\cdots$ einander corresidual in Bezug auf eine Punktgruppe G_Q, so sind sie es in Bezug auf jede andere Punktgruppe $G_{Q'}$, welche zu einer von ihnen (etwa G_R) residual ist. Mit anderen Worten: „*corresiduale Gruppen*" ist ein Begriff, welcher von einem speciellen Residuum unabhängig ist. — Dabei ist noch zu bemerken, dass es gleichgiltig ist, ob die Gruppen G_R, $G_{R'}$, $\cdots$ und ebenso die Gruppen G_Q, $G_{Q'}$, $\cdots$ lauter verschiedene, oder theilweise je dieselben (festen) Punkte enthalten.

Um jenen Satz zu beweisen, nehmen wir an, die gegebene Curve sei $f = 0$; auf dieser werden ausgeschnitten die Punktgruppen:

$$\begin{array}{lll} G_Q \text{ und } G_R & \text{durch} & A = 0, \\ G_Q \text{ und } G_{R'} & \text{,,} & B = 0, \\ G_{Q'} \text{ und } G_R & \text{,,} & \alpha = 0, \end{array}$$

wo $A = 0$, $B = 0$, $\alpha = 0$ f adjungirte Curven seien. Wir werden nun zeigen, dass auch die Gruppen $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ auf einer und derselben adjungirten Curve liegen. Zunächst lassen sich*) immer zwei Curven $\beta = 0$, $\gamma = 0$ finden von der Beschaffenheit, dass man identisch hat:

$$\alpha \cdot B \equiv \beta \cdot A + \gamma \cdot f.$$

Denn die Gleichung $\alpha \cdot B = 0$ repräsentirt eine (zerfallende) Curve, welche durch alle nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkte von $A = 0$ und $f = 0$ hindurchgeht. Ausserdem aber erfüllt das Produkt $\alpha \cdot B$ auch in den singulären Punkten von $f = 0$ die Bedingungen**), an welche noch weiter die Möglichkeit geknüpft ist, dasselbe auf die Form der rechten Seite zu bringen. Dasselbe verschwindet nämlich in jedem i-fachen Punkte von $f = 0$ (wo $A = 0$ einen $(i - 1)$-fachen Punkt besitzt) $(2i - 2)$-fach, und besitzt somit alle Eigenschaften, um in die Form der rechten Seite übergeführt zu werden. Die hierbei sich ergebende Curve $\beta = 0$ ist nun aber nothwendig eine adjungirte. Denn das Verhalten von $\beta \cdot A$ muss, wenn die obige *Identität* besteht, dem von $\alpha \cdot B$ in jedem i-fachen Punkte

*) Diese Schlussweise ist zwar schon lange bekannt (vgl. z. B. Plücker, Theorie der algebr. Curven; Einleitung.); die Grenzen ihrer Berechtigung sind indessen erst in jüngerer Zeit angegeben worden. (S. d. folgende Note.)

**) Nöther, Math. Annalen Bd. VI. S. 351, wo gezeigt wird, dass die Curve $\alpha \cdot B = 0$, wenn sie auf die Form der rechten Seite soll gebracht werden können, in jedem i-fachen Punkt von $f = 0$, in welchem $A = 0$ einen k-fachen Punkt besitzt, entweder gewisse specielle Singularitäten oder wenigstens einen $k + i - 1$-fachen Punkt haben muss.

von $f=0$ auch den einzelnen Zweigen dieses Punktes gegenüber dasselbe sein. In einem solchen Punkte wird aber jeder Zweig von $f=0$ von der Curve $\alpha \cdot B=0$ in $2i-2$ Punkten getroffen. Die Curve $\beta=0$ muss somit jeden Zweig noch in $i-1$ Punkten schneiden, der Punkt also ein $(i-1)$-facher sein. Denn wäre derselbe etwa ein $(i-2)$-facher Punkt von $\beta=0$, dessen Zweige einzeln $i-2$ Zweige von $f=0$ berührten, so würden 2 Zweige nur in $2i-3$ Punkten getroffen werden. Noch weniger könnte der Punkt ein $(i-3)\cdots$-facher sein. Da nun der Ausdruck β ausser in den singulären Punkten bloss noch in den Punkten der Gruppen $G_{R'}$ und $G_{Q'}$ verschwindet, so liegen diese auf der adjungirten Curve $\beta=0$, q. e. d. Tritt an Stelle von $B=0$ eine *Schaar* von Curven $B=0$, welche alle durch G_Q gehen und f in einer Schaar von G_Q residualen Gruppen $G_{R'}$ treffen, so liefert derselbe Satz an Stelle von $\beta=0$ eine *Schaar* von Curven $\beta=0$, die alle durch $G_{Q'}$ gehen und $f=0$ in derselben Schaar von Gruppen $G_{R'}$ schneiden. Diese zweite Schaar hat dieselben willkührlichen Parameter, wie die erstere, und in derselben Form; sie ist in Bezug auf $f=0$ der ersteren vollständig *„äquivalent“*. Insbesondere gilt dies für die linearen Schaaren von Curven $B=0$ und $\beta=0$, die man durch G_Q, bez. $G_{Q'}$ legen kann; die Anzahl der linear von einander unabhängigen Curven $B=0$ und $\beta=0$ ist somit die gleiche, und charakteristisch für die Schaar der Gruppen $G_{R'}$, der wir sie später als Index beifügen werden.

Zur Aufstellung einer der Schaar der Curven $B=0$ äquivalenten Schaar $\beta=0$ kann für die Basisgruppe $G_{Q'}$ dieser letzteren eine beliebig specielle, der Gruppe G_R residuale Gruppe gewählt werden; indessen muss, wenn die Schaar $B=0$ die allgemeinste lineare Schaar durch G_Q war, auch für $\beta=0$ die allgemeinste lineare Schaar gewählt werden, welche $f=0$ in der Gruppe $G_{Q'}$ schneidet. So sind die allgemeinsten adjungirten Curven 4. Ordnung zu einer Curve 5. Ordnung $f=0$ mit 3-fachem Punkt P, für welche im Ganzen 12 Schnittpunkte in den letzteren fallen, nicht die in 4 Gerade zerfallenden Curven mit 4-fachem Punkt in P, denn diese bilden nur eine 4-fach unendliche Schaar, sondern diejenigen Curven 4. Ordnung, welche in P einen 3-fachen Punkt haben, dessen Tangenten mit denen von $f=0$ übereinstimmen. Dieselben bilden noch eine 5-fach unendliche Schaar; und somit ist auch die Schaar der zu jenen 12 in P fallenden Schnittpunkten residualen Gruppen G_8 noch eine 5-fach unendliche.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass, obgleich Irreducibilität der Gleichung $f=0$ vorausgesetzt ist, doch in dem Vorstehenden hiervon an keiner Stelle Gebrauch gemacht wurde und demnach *der Restsatz auch für reducibele Curven seine Geltung behält.*

§ 2.

Schaaren von Punktgruppen.

Durch den im Vorstehenden bewiesenen Restsatz sind Gruppen von Punkten, auch wenn dieselben nicht vollständige Schnittpunktsysteme bilden, in solcher Weise unabhängig von der sie ausschneidenden Schaar von Curven definirt, dass eine Betrachtung derselben an und für sich nicht umgangen werden kann.

Die beweglichen Schnittpunkte einer durch irgend welche Bedingungen nicht vollständig festgelegten adjungirten Curve bilden auf f eine *ein- oder mehrfach unendliche Schaar von Punktgruppen*, für welche sich folgende zunächstliegenden Unterscheidungsmerkmale aufstellen lassen:

1. Die Zahl der in jeder Gruppe der Schaar befindlichen Punkte (die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der adjungirten Curve).

2. Die Mannigfaltigkeit der Schaar (die Zahl der willkührlichen Parameter in der Gleichung jener Curve).

3. Der Grad, bezw. die Form, in welcher diese Parameter in die Gleichung eingehen.

Mit Rücksicht auf den Grad kann man z. B. von *„linearen"*, *„quadratischen"*, ... *Schaaren von Punktgruppen* reden. So bilden die Gruppen von je 3 Punkten, welche alle Geraden aus einer Curve 3. Ordnung ausschneiden, eine lineare 2-fach unendliche (∞^2-)Schaar von je 3 Punkten. Die Punkte, in welchen die Tangenten eines Kegelschnitts eine Curve 3. Ordnung treffen, eine quadratische 1-fach unendliche (∞^1-)Schaar von je 3 Punkten; ein einzelner gegebener Punkt einer solchen Curve eine lineare ∞^0-Schaar von 1 Punkt. Dagegen gehört ein Punkt einer Curve 3. Ordnung mit Doppelpunkt einer linearen ∞^1-Schaar von je 1 Punkte an, u. s. w.

Sei jede der Gruppen von je Q Punkten, welche die Schaar bilden sollen, σ Bedingungen unterworfen, so wird die Schaar eine $(Q-\sigma)$-fach unendliche, da durch $Q-\sigma$ beliebig anzunehmende Punkte einer Gruppe auf $f=0$ die übrigen σ Punkte der Gruppe auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmt sind.

Mit Hilfe des Restsatzes ist es nun möglich, insbesondere die *linearen* Schaaren, mit denen wir uns in der Folge vorzugsweise zu beschäftigen haben, vor den übrigen noch weiter auszuzeichnen. Jede *lineare* Schaar ist offenbar zugleich eine Schaar corresidualer Gruppen. Irgend eine Gruppe G_Q, welche σ Bedingungen genügt, möge durch den Restsatz zu einer linearen q-fach ($q \leqq Q-\sigma$) unendlichen Schaar von Gruppen von je Q Punkten führen, die alle G_Q corresidual sind und zugleich den σ Bedingungen genügen. Jede Gruppe innerhalb dieser Schaar ist alsdann durch irgend q Punkte von $f=0$ eindeutig

festgelegt. Von den Punkten irgend einer Gruppe, welche den σ Bedingungen genügt, waren aber $Q - \sigma$ Punkte ganz willkührlich anzunehmen, die daraus hervorgehende $\infty^{Q-\sigma}$-Schaar von Gruppen zerfällt also in ∞^{τ} Systeme von linearen ∞^{q}-Schaaren, wobei $\tau = (Q - \sigma) - q$ ist. Für $\tau = 0$ erhält man so eine endliche Anzahl von linearen Schaaren, die im Allgemeinen einander nicht corresidual sind; und zwar dieselben, von welchen $Q - \sigma = q$ Punkten man auch ausgegangen ist.

Die Q Punkte einer Gruppe kann man sich demnach in 3 Theile zerlegt denken: q Punkte, welche die Gruppe innerhalb der Schaar festlegen, τ Punkte, welche sodann die Schaar, eindeutig oder mehrdeutig, bestimmen, die übrigen σ Punkte, welche durch die σ Bedingungen mit bestimmt sind.

So gehören irgend 3 Punkte einer Curve 3. Ordnung einer ∞^2-Schaar von je 3 Punkten an, für welche bei beliebiger Lage der Punkte $\sigma = 0$, also $\tau = 3 - 2 = 1$ ist. Es giebt demnach noch ein ∞^1-System von solchen ∞^2-Schaaren. Darunter befindet sich auch die Schaar der durch die Geraden der Ebene ausgeschnittenen Gruppen, für welche $\sigma = 1$, $\tau = 0$ ist.

Der Kürze halber möge in der Folge eine *lineare* ∞^q-*Schaar* von Gruppen von je Q Punkten durch $g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, $\cdots$, und die *einzelne Gruppe* einer solchen Schaar entsprechend durch $G_Q^{(q)}$, $\Gamma_Q^{(q)}$, $\cdots$ bezeichnet werden. Auch möge, wenn nicht Anderes ausdrücklich zugefügt ist, unter einer ∞^q-Schaar eine *lineare* ∞^q-Schaar verstanden werden. — Die durch die Geraden der Ebene auf einer Curve 3. Ordnung ausgeschnittene Schaar von Gruppen ist demnach eine Schaar $g_3^{(2)}$.

§ 3.

Die linearen Schaaren.

Sind durch den Restsatz die linearen Schaaren von Punktgruppen von den sie ausschneidenden Curvenschaaren unabhängig gemacht, so giebt es doch eine gewisse Grenze für den Grad derjenigen Curven, durch die eine gegebene Schaar ausgeschnitten werden kann. Ehe wir indess auf diese Frage eingehen, betrachten wir die durch gegebene adjungirte Curve ausschneidbaren Schaaren, um einen Ueberblick über die einfachsten Punktgruppen überhaupt zu erhalten.

Die Curve $f = 0$ sei von der n. Ordnung $(n > 3)$, nicht zerfallend, und besitze α_2 Doppel-, α_3 dreifache-, $\cdots$ α_i i-fache Punkte je mit getrennten Tangenten. Sei die adjungirte Curve $\varphi = 0$ von der s. Ordnung, und setzt man zunächst $s \geq n$ voraus, so geht durch die Schnittpunkte derselben mit $f = 0$ auch noch die Curve:

$$\psi \equiv \varphi + A \cdot f = 0$$

hindurch, wo A ein noch unbestimmter Ausdruck $(s-n)$. Ordnung ist. Ist es nun möglich, mit Hilfe der

$$\tfrac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)=x$$

Coefficienten von A ebensovielen Coefficienten von ψ specielle Werthe zu ertheilen, so kann man an Stelle des Ausdrucks φ, welcher wenigstens*)

$$\frac{s(s+3)}{2}-\Sigma\alpha_i\cdot\frac{i(i-1)}{2}=y$$

willkührliche Coefficienten besitzt, den Ausdruck ψ (mit übrigens denselben Eigenschaften gegenüber $f=0$) mit wenigstens

$$y-x=ns-\Sigma\alpha_i\cdot i(i-1)-p$$

$$\left(\text{wo } p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\Sigma\alpha_i\cdot\frac{i(i-1)}{2} \text{ gesetzt wird}\right)$$

noch unbestimmten Coefficienten setzen. Im Fall also, dass man über alle Coefficienten in $A=0$ in der gewünschten Weise verfügen kann, sind von den nicht in die singulären Punkte von $f=0$ fallenden Schnittpunkten von $\varphi=0$ mit $f=0$ höchstens p durch die Uebrigen bestimmt, sofern diese nicht eine besondere Lage haben. Im Falle jedoch, dass jene Voraussetzung bezüglich $A=0$ nicht eintritt (wo dann statt $y-x$ eine grössere Zahl steht), sowie für besondere Lagen der $y-x$ ersten Schnittpunkte (wenn eine oder mehrere Gleichungen eine Folge der Uebrigen sind) werden jedenfalls weniger als p Punkte durch die Uebrigen bestimmt sein.

Eine Verminderung der Coefficientenanzahl der adjungirten Curve wird nicht mehr möglich, wenn $s<n$ ist. Nichtsdestoweniger gelten für die Fälle $s=n-1$ und $s=n-2$ die obigen Betrachtungen noch, weil für sie die Zahl x verschwindet.

Für $s=n-3$ wird die Zahl $y=p-1$; und weil dann die Anzahl der nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkte $=2p-2$ wird, so sind höchstens $p-1$ Punkte durch die Uebrigen bestimmt**), sofern diese Letzteren nicht eine besondere Lage besitzen***).

---

*) Für besondere Lage der vielfachen Punkte von $f=0$ könnte z. B. die Zahl der Bedingungen dafür, dass $\varphi=0$ eine adjungirte Curve ist, geringer als $\Sigma\alpha_i\cdot\frac{i(i-1)}{2}$ sein, und alsdann φ mehr als y willkührliche Coefficienten besitzen.

**) Für besondere Curven $f=0$ kann es eintreten, dass *Jeder* der $p-1$ angenommenen Punkte je noch *einen* anderen mit bestimmt, wie für die (hyperelliptische) Curve 5. Ordnung mit einem dreifachen Punkt, wo die adj. Curven $(n-3)$. Ordnung zerfallen, für eine gewisse (hyperelliptische) Curve 6. Ordnung mit 7 Doppelpunkten u. s. w.

Die nachfolgenden Betrachtungen haben übrigens für Curven, für welche die Zahl $p=0$ oder $=1$ ist, keine Bedeutung mehr, weil im 1. Fall überhaupt keine, im 2. keine Schaaren von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung existiren. Es gelten dann jedoch analoge Betrachtungen für adj. Curven $(n-2)$. Ordnung.

***) Auf einer Curve 5. Ordnung mit 2 Doppelpunkten $(p=4)$ nehme man

Man kann das Vorstehende dahin zusammenfassen, dass *von den nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkten einer adjungirten Curve s. Ordnung mit $f=0$:*

I. *Für $s > n-3$: höchstens p durch die übrigen*

$$ns - \Sigma\alpha_i \cdot i(i-1) - p = n\alpha + p - 2 \quad (\alpha = s-(n-3))$$

Schnittpunkte bestimmt sind;

II. *für $s = n-3$: höchstens $p-1$ durch die übrigen $p-1$ Schnittpunkte bestimmt sind.*

Legt man also durch gewisse Punkte einer Curve $f=0$ eine adjungirte Curvenschaar, so wird für die durch diese Curven ausgeschnittene Schaar $g_Q^{(q)}$

im Fall I., $q \geqq Q-p$

im Fall II., $q \geqq Q-p+1$

sein.

Wir setzen hierbei keineswegs voraus, dass die adjungirten Curven nicht zerfallen. Darum ist es aber auch nicht nothwendig, Curven von niederer, als der $(n-3)$. Ordnung besonders zu betrachten, da man solche durch Zufügen einer festen Curve immer zu einer adjungirten Curve der $(n-3)$. oder höherer Ordnung machen kann.

§ 4.

Adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung.

Im vorstehenden § werden Ungleichungen zwischen dem oberen und unteren Index einer linearen Schaar hergeleitet, welche den Fall, wo die adjungirte Schnittcurve von der $(n-3)$. Ordnung ist, vor den übrigen Fällen in gewisser Weise auszeichnet. In diese Ungleichungen ging eine bloss von den Eigenschaften von f abhängige Zahl ein, die wir nach dem Vorgang von Riemann, Clebsch u. A. mit dem Buchstaben p bezeichnet haben und in der Folge mit Clebsch das *Geschlecht* der Curve f nennen wollen, indem wir uns vorbehalten, an späterer Stelle die eigentliche Bedeutung dieser Zahl zu erörtern.

In diesem § soll nun die Umkehrung des am Ende des vorigen entwickelten Satzes bewiesen werden, nämlich: *dass eine q-fach unendliche Schaar $g_Q^{(q)}$ von Punktgruppen von je Q Punkten* (unter welchen sich auch solche befinden können die für alle Gruppen *dieselben* sind) *immer dann durch eine Schaar von adjungirten Curven* $(n-3)$. *Ordnung ausgeschnitten werden kann, wenn:*

$$q \geqq Q-p+1, \quad \text{also } Q-q \leqq p-1$$

$p-1=3$ Punkte in einer Geraden durch einen der Doppelpunkte an, dann bilden die 3 übrigen Schnittpunkte noch eine $g_3^{(1)}$. Wegen anderer Beispiele vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, S. 213.

*ist**). Wir werden diesen Satz für alle durch Curven von höherer als der $(n-3)$. Ordnung ausgeschnittenen Gruppen zu beweisen haben.

Ist zunächst $Q \leqq 2p-2$, so kann man zeigen:

1. Dass der Satz richtig ist für jede Schaar $g_Q^{(q)}$, wenn er richtig ist für Schaaren $g_{Q-1}^{(q-1)}$, immer vorausgesetzt, dass $q \geqq Q-p+1$ ist.

2. Ist sofort klar, dass derselbe für $Q \leqq p-1$ und $q=0$ giltig ist; denn durch eine vollständig bestimmte *einzelne* Gruppe von $p-1$ und weniger Punkten lässt sich immer eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung legen.

Um nun auch die erste Behauptung zu erweisen, bemerken wir zunächst, dass, wenn die Schaar $g_{Q-1}^{(q-1)}$ durch Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, die Schaar $g_Q^{(q)}$ durch ein System $(n-2)$. Ordnung ausgeschnitten werden kann. Denn man nehme irgend eine Gruppe $\Gamma_Q^{(q)}$ der letzten Schaar, lege durch einen beweglichen Punkt α derselben eine Gerade A und durch die übrigen $Q-1$ Punkte, welche eine Gruppe $\Gamma_{Q-1}^{(q-1)}$ bilden, eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung C_{n-3}. Das Residuum R der Gruppe Γ_Q, welches aus den weiteren $2p-2-(Q-1)$ Schnittpunkten von C_{n-3} und den übrigen $n-1$ Schnittpunkten der Geraden A besteht, ist zugleich Residuum für jede Gruppe der Schaar $g_Q^{(q)}$, weil es dies für eine derselben ist (§ 1.); die Schaar $g_Q^{(q)}$ wird somit in der That durch eine Schaar von durch R gehenden Curven $(n-2)$. Ordnung C'_{n-2} ausgeschnitten, die noch zudem Alle in die Gerade A und eine Curve $(n-3)$. Ordnung zerfallen, weil $n-1$ Punkte einer Curve $(n-2)$. Ordnung nicht auf einer Geraden liegen können, ohne dass Zerfallen eintritt. Betrachtet man nun statt der Gruppe $\Gamma_Q^{(q)}$ irgend eine beliebige der corresidualen $g_Q^{(q)}$, *welche den Punkt α nicht enthält*, die aber gleichfalls durch eine der zerfallenden C'_{n-2} muss ausgeschnitten werden können, so erkennt man, dass, da A unbeweglich ist, dies nur durch eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung geschehn kann. Q. e. d.

Der vorstehende Beweis macht an keiner Stelle Gebrauch von der Ungleichung $Q \leqq 2p-2$. Er gilt demnach auch für den Fall, dass dieselbe nicht erfüllt ist. Weil nun aber adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung nicht existiren, welche in mehr als $2p-2$ Punkten die Curve f (wenn diese nicht zerfällt) schneiden, so schliesst man rückwärts, *dass Punktgruppen $G_Q^{(q)}$ von mehr als $2p-2$ Punkten, für*

*) Nach diesem Satz lässt sich beispielsweise jede Schaar $g_3^{(1)}$ auf einer Curve 5. Ordnung mit 2 Doppelpunkten, für welche also $p=4$ ist, durch adjungirte *Kegelschnitte* ausschneiden. Soll aber ein Kegelschnittbüschel mit der Curve 5. Ordnung ausser den beiden Doppelpunkten noch 3 feste Schnittpunkte besitzen, so muss jeder Kegelschnitt der Schaar zerfallen. Daher sind die einzigen Gruppen $g_3^{(1)}$ auf der Curve diejenigen beiden Schaaren, welche von den durch die Doppelpunkte gehenden Strahlen ausgeschnitten werden.

welche $q \geqq Q - p + 1$ *ist, nicht existiren;* und die eingangs des Beweises ausgesprochene Beschränkung $Q \leqq 2p - 2$ fällt somit von selbst weg.

Die zuletzt ausgesprochene Bemerkung kann man zum Beweis eines wichtigen Satzes gebrauchen. Gruppen G_Q, welche von einer adjungirten Curve $(n - 3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, bilden, dem § 3. zufolge, mindestens eine $(Q - p + 1)$-fach unendliche Schaar; also Gruppen G_{2p-2} *mindestens* eine ∞^{p-1}-Schaar. Wir wollen nun zeigen, dass sie zugleich *höchstens* eine solche Schaar bilden. Denn bildeten sie z. B. eine ∞^p-Schaar, so könnte man durch Hinzunahme eines willkührlichen *festen* Punktes β von f eine Schaar $g_{2p-1}^{(p)}$, (in deren Gruppen allen der Punkt β vorkäme) herstellen, welche indess zufolge der oben gemachten Bemerkung nicht existiren kann. Somit giebt es auch keine Schaar $g_{2p-2}^{(p)}$, und umsoweniger solche $g_{2p-2}^{(p+1)}$, u. s. w. *Es giebt also nur eine $(p-1)$-fach unendliche Schaar d. h. nur p linear von einander unabhängige adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung.*

§ 5.

Der Riemann-Roch'sche Satz.

Wir haben oben in § 3. solcher Punktgruppen gedacht, für welche $q > Q - p + 1$ ist. Dieselben werden nach dem vorstehenden § immer durch adjungirte Curven $(n - 3)$. Ordnung ausgeschnitten, besitzen indess auch diesen gegenüber einen speciellen Charakter, wie wir unten näher sehen werden, indem die Lage der einzelnen Punkte einer jeden Gruppe der Schaar nicht beliebig ist, sondern durch Einige derselben die Uebrigen bestimmt sind. Wir wollen daher eine solche Punktgruppe, welche einer ∞^q-Schaar $g_Q^{(q)}$ angehört, für die

$$q > Q - p + 1$$

ist, eine *„Specialgruppe“*, und die Schaar selbst eine *„Special-Schaar“* nennen. Beispiele folgen unten (vgl. z. B. § 10.). Die Systeme der Specialgruppen auf einer gegebenen Curve lassen sich nun in merkwürdiger Form zu je zweien in der Weise gruppiren, dass jedes aus dem anderen eindeutig abgeleitet werden kann.

Der Satz, nach welchem diese Gruppirung vorgenommen werden kann, ist von Riemann in Nr. 5 seiner Abel'schen Functionen (Borch. Journ. Bd. 54) für den Fall $q = 1$ gegeben, und von Roch (Borch. J. Bd. 64) auf dem von Riemann eingeschlagenen Wege allgemein bewiesen worden. Riemann hat in Nr. 3 seiner Abhandlung „Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen“ einen zweiten Beweis des Satzes, ebenfalls für einen speciellen Fall: $Q = p, p - 1$ und $p - 2$ gegeben, der sich indess ohne wesentliche Aenderung auf den allgemeinen Fall ausdehnen lässt. Ausserdem kann man den Satz

aus den Differentialgleichungen des Umkehrproblems, für den unbestimmten Fall desselben, schliessen. Wir geben hier zwei algebraische Beweise. In seiner allgemeinen Form lautet der Riemann-Roch'sche Satz folgendermassen:

Legt man durch die Gruppe $G_Q^{(q)}$ einer Special-Schaar $g_Q^{(q)}$ auf der Curve f, für welche $q = Q - p + 1 + r$ sein mag (r irgend eine ganze positive Zahl $< p - 1$), *eine adjungirte Curve* ($n - 3$). *Ordnung, so schneidet dieselbe in $2p - 2 - Q = R$ weiteren Punkten, die ihrerseits wiederum einer Special-Schaar $g_R^{(r)}$ von Gruppen $G_R^{(r)}$ angehören, für welche r den aus obiger Gleichung sich ergebenden Werth $r = R - p + 1 + q$ besitzt*).*

Zum Beweis dieses Satzes füge man zu jeder Gruppe der Schaar $g_Q^{(q)}$ noch r festliegende, aber beliebig gewählte (und zwar zu *jeder* Gruppe *dieselben*) Punkte von $f = 0$ hinzu. Man erhält so eine Schaar $g_{Q+r}^{(q)}$, für welche die Anzahl der willkührlichen Parameter sich nicht vermehrt hat, wohl aber die Anzahl der Punkte in den einzelnen Gruppen. Durch eine Gruppe $G_{Q+r}^{(q)}$ dieser Schaar lässt sich noch eine adjungirte Curve ($n - 3$). Ordnung legen, weil die Bedingung des § 4. erfüllt ist. Da nun aber die Lage jener r festen Punkte beliebig ist, so muss sich durch die Gruppe $G_Q^{(q)}$ noch mindestens eine ∞^r-Schaar von adjungirten Curven ($n - 3$). Ordnung legen lassen, und die durch dieselben ausgeschnittenen Gruppen $G_R^{(\varrho)}$ bilden mindestens eine ∞^r-Schaar, d. h. es ist ϱ mindestens $= r$. Dass aber andererseits ϱ nicht $> r$ sein kann, erkennt man aus der Umkehrung der eben angestellten Betrachtungen, indem man von einer Gruppe $G_R^{(\varrho)}$ ausgeht. Man gelangt so zu Gruppen $G_Q^{(\varkappa)}$, wo wieder $\varkappa$ mindestens $= Q - p + 1 + \varrho$ sein muss. Dieselben können aber nach dem Restsatze von der Schaar $g_Q^{(q)}$ nicht verschieden sein. Man hat somit $\varkappa = q$, daher auch $\varrho = r$, q. e. d.

*Corollar. Haben R Punkte G_R auf einer nichtzerfallenden Curve f eine solche specielle Lage, dass die durch sie gehenden adjungirten**) Curven* ($n - 3$). *Ordnung noch eine q $[> (p - 1 - R)]$-fach unendliche Schaar bilden* (q *eine positive ganze Zahl*), *wobei sie die Schaar $\gamma_Q^{(q)}$*

---

*) Auf einer Curve 7. Ordnung mit 9 Dp. ($p = 6$) kann man (wie weiter unten gezeigt wird) Gruppen von 4 Punkten G_4 so bestimmen, dass durch sie noch eine ∞^2-Schaar von adjungirten C_4 geht. Diese schneiden in einer Schaar $g_6^{(2)}$, die demnach eine Specialschaar ist. Nach dem oben ausgesprochenen Satz *gehört aber dann auch die Gruppe G_4 einer Special-Schaar $g_4^{(1)}$ an; d. h. durch jede Gruppe der Schaar $g_6^{(2)}$ lässt sich noch ein ∞^1-Büschel von adj. C_4 legen.*

**) Was unter „adjungirten Curven" für den Fall einer Curve f mit besonderen Singularitäten zu verstehen ist, wird unten (§ 7.) näher definirt. Mit Rücksicht hierauf haben wir den obigen Satz gleich in seiner *allgemeinen* Form ausgesprochen.

ausschneiden ($Q = 2p - 2 - R$), *so gehört die Gruppe* G_R *einer* ∞^r-*Schaar* $g_R^{(r)}$ *an, für welche* $r = R - p + 1 + q = p - 1 - Q + q$ *ist, indem durch jede Gruppe* $\Gamma_Q^{(q)}$ *der Schaar* $\gamma_Q^{(q)}$ *noch eine* ∞^r-*Schaar von adjungirten Curven* ($n - 3$). *Ordnung hindurchgeht, welche* $g_R^{(r)}$ *ausschneidet.*

Dies Corollar folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satze. Dasselbe ist insofern weniger allgemein, wie dieser, als es nur von Punktgruppen handelt, die von Curven ($n - 3$). Ordnung ausgeschnitten werden. Freilich folgt aus § 4., dass dies die *allgemeinsten Specialgruppen* sind. Man kann indess auf diese Erkenntniss, wie überhaupt auf den Inhalt der §§ 4. und 5. verzichten und doch das vorstehende Corollar allgemein beweisen.

Man füge nämlich zu der Gruppe G_R eine andere G_{q+1} von $q + 1$ beliebigen Punkten und bilde daraus die Gruppe G_{R+q+1}. Alsdann kann man eine mindestens r-fach unendliche Schaar von Gruppen Γ_{r+p} (es ist $r + p = R + q + 1$) finden, welche G_{R+q+1} corresidual ist. Denn man lege durch diese Gruppe eine adjungirte Curve C (von genügend hoher Ordnung), und durch deren übrige Schnittpunkte und r willkührliche Punkte eine andere adjungirte C' derselben Ordnung; so ist (§ 3.) die Gruppe Γ_p der p noch übrigen Schnittpunkte unmittelbar [oder doch, in besonderen Fällen, nach willkührlicher Annahme einer Anzahl, etwa von π, weiteren Punkten] vollständig bestimmt, und bilden mit jenen r zusammen eine Gruppe $\Gamma_{r+p}^{(r)}$ [in jenen Fällen eine Gruppe $\Gamma_{r+p}^{(r+\pi)}$]. Man kann nun zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen die Gruppe G_{q+1}, welche ein Bestandtheil von G_{R+q+1} ist, ein solcher auch von Γ_p und somit von Γ_{r+p} ist. Alsdann bilden aber die übrigen $r + p - (q + 1) = R$ Punkte von Γ_{r+p} noch eine r-fach [$(r + \pi)$-fach] unendliche Schaar, welche der Gruppe G_R corresidual ist, und von einer ∞^r [$\infty^{r+\pi}$-] Schaar von adjungirten Curven ($n - 3$). Ordnung ausgeschnitten wird. — Dass aber auch in jedem besonderen Fall $\pi = 0$ sein muss, erkennt man, indem man noch die obigen Betrachtungen auf die erhaltenen Gruppen $\Gamma_{r+p}^{(r+\pi)}$ anwendet, von denen man denn zu einer mindestens $\infty^{q+\pi}$-Schaar gelangt, welche aber mit der ∞^q-Schaar $\gamma_Q^{(q)}$, von der wir oben ausgingen, übereinstimmen muss. Man schliesst so $\pi = 0$.

Es muss noch bewiesen werden, dass die Gruppe G_{q+1} ein Bestandtheil von Γ_p ist [wie man auch jene π Punkte angenommen hat]. Nach dem Restsatz ist die Wahl der Curve C ohne Einfluss auf die Lage der p Punkte Γ_p [nachdem die π Punkte fest angenommen sind], es genügt somit, für eine specielle Schnittcurve nachzuweisen, dass *ein beliebiger Punkt* x von G_{q+1} in Γ_p auftritt; was von diesem gilt, gilt von allen $q + 1$. Lässt man aber C aus einer durch x gehenden beliebigen Geraden und einer durch die übrigen q Punkte

von G_{q+1} und durch G_R gehenden adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung bestehn (letztere ist nach Voraussetzung construirbar), so enthält auch die an die Stelle der obigen Curve $(n-2)$. Ordnung C' tretende Curve diese Gerade, und somit den Punkt x als Bestandtheil (während die zu C' gehörige Curve $(n-3)$. Ordnung durch die $r+\pi$ willkührlichen Punkte anderweitig bestimmt ist). Der Punkt x ist somit ein Bestandtheil der Gruppe Γ_p. Q. e. d.

Die Gleichungen des Riemann-Roch'schen Satzes lassen sich in folgende übersichtliche Gestalt bringen:

$$Q+R=2p-2;$$
$$Q-R=2q-2r.$$

Zu jedem Werthepaar Q, q, welches der Bedingung genügt, einer Special-Punktgruppe der erwähnten Art zuzugehören, lässt sich demnach nur *ein* Werthepaar R, r der entsprechenden Schaar $G_R^{(r)}$ bestimmen.

Selbstverständlich sind indess nur solche Special-Schaaren $G_Q^{(q)}$, $G_R^{(r)}$ in dieser Weise eindeutig einander zugeordnet, für welche zwischen den Q, bez. R Punkten der einzelnen Gruppen *keine weiteren Bedingungen* bestehen, als die, dass sie einer gegebenen unter ihnen *corresidual* sind, mit anderen Worten: solche Schaaren, welche *alle* Gruppen umfassen, die einer unter ihnen corresidual sind.

§ 6.

Die eindeutigen Transformationen.

Die im Vorstehenden entwickelten Sätze über Punktgruppen gewinnen ein weiteres Interesse durch das Verhalten der Punktgruppen bei der Ueberführung der gegebenen Curve in eine andere, welche ihr eindeutig und Punkt für Punkt (wie der Curve die Evolute) entspricht.

Hat man die Gleichung einer algebraischen Curve in homogenen Coordinaten: $f(x_1 x_2 x_3)=0$ oder kürzer $f(x)=0$ gegeben, so kann man die Coordinaten eines Punktes y einer neuen Curve mit denen eines Punktes x der gegebenen in Beziehung setzen durch die Relationen:

(1) $$y_1 : y_2 : y_3 = \Theta_1(x) : \Theta_2(x) : \Theta_3(x),$$

wo die $\Theta(x)$ ganze homogene Functionen der Coordinaten des Punktes x sind. Eliminirt man dann mit Hilfe der Gleichung:

(2) $$f(x)=0$$

die Coordinaten x, so gelangt man zu der Gleichung einer Curve

(3) $$F(y)=0,$$

welche der gegebenen eindeutig entspricht, sofern nicht zwischen den Coefficienten der Θ und der Gleichung $f=0$ solche Relationen bestehen, dass die eindeutige Darstellung der Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ durch die y aus den Gleichungen (1), (2) unmöglich wird. Wir werden unten ein Beispiel dieses Ausnahmefalls, von dem wir zunächst abstrahiren, kennen lernen.

Den *beweglichen* Schnittpunkten der ∞^2-Curvenschaar:

$$\alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \alpha_3\Theta_3 = 0$$

entsprechen alsdann die Schnittpunkte der Geraden

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

mit $F(y) = 0$, deren Grad somit gleich der Anzahl jener beweglichen Punkte der Schaar ist. Setzt man in (3) die aus (1) sich ergebenden Werthe der y ein, so muss wiederum (2) bis auf einen Factor zum Vorschein kommen, wenn Eindeutigkeit stattfindet, man hat also:

$$F(\Theta(x)) = M \cdot f(x) .$$

Wird auf der Curve $F(y) = 0$ durch eine Schaar von linearen (adjungirten) Curven:

$$\Sigma\alpha\Phi(y) \equiv \alpha_1\Phi_1(y) + \alpha_2\Phi_2(y) + \cdots \alpha_{q+1}\Phi_{q+1}(y) = 0$$

eine Schaar $g_Q^{(q)}$ von Gruppen ausgeschnitten, und transformirt man jene Schaar mit Hilfe der Gleichungen (1) in:

$$\Sigma\alpha\Phi(\Theta(x)) = 0,$$

so besitzt diese, somit auch die transformirte Schaar von Punktgruppen, dieselbe Mannigfaltigkeit wie jene; zugleich muss die Anzahl der beweglichen Punkte für beide Schaaren übereinstimmen, wie gleichfalls aus dem Begriff der eindeutigen Transformation folgt, und man kann demnach sagen, *dass bei eindeutiger Transformation einer Curve f eine lineare ∞^q-Schaar $g_Q^{(q)}$ auf f von Q beweglichen Punkten in eine ebensolche $\gamma_Q^{(q)}$ auf F übergeht.*

Ein bemerkenswerthes Verhalten bei eindeutiger Transformation von f zeigen die adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung. Punktgruppen, welche von diesen Curven auf $f=0$ ausgeschnitten werden, gehen in solche über, welche aus der transformirten Curve F (wenn diese vom Grad N ist) von adjungirten Curven $(N-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, oder, wie man sagen kann:

Die Anzahl p der verschiedenen linear von einander unabhängigen Curven $(n-3)$. Ordnung, die zu einer gegebenen Curve n. Ordnung gehören (eine Zahl, die wir als *„Geschlecht"* dieser Curve bezeichnet haben), *ist für alle durch eindeutige Transformation auseinander herleitbaren Curven dieselbe.*

Sei p das Geschlecht von f, P das von F. Wäre nun $P > p$,

so liesse sich zu einer Gruppe G_P von P auf $f=0$ beliebig angenommenen Punkten immer eine corresiduale mindestens ∞^{P-p}-Schaar finden (vgl. § 3.), welcher nach Obigem auf $F=0$ eine ebensolche entspräche. Für diese wäre für $P>p$ zugleich die Bedingung erfüllt, dass die Mannigfaltigkeit der Schaar $\geqq P-P+1$, also $\geqq 1$ ist, so dass sich (§ 3.) dieselbe durch adjungirte Curven $(N-3)$. Ordnung ausschneiden liesse. Eine solche Curve besitzt aber nur $P-1$ Bestimmungsstücke (§ 4.), und es wäre demnach unmöglich, mehr als $P-1$ Punkte einer der corresidualen Gruppen, also mehr als $P-1$ Punkte von G_P anzunehmen, während wir P willkürlich angenommen haben.

Somit liegt in der Annahme $P>p$ ein Widerspruch. Von der umgekehrten Annahme $p>P$ lässt sich das nämliche auf demselben Wege nachweisen, es bleibt also nur $P=p$*).

Der hiermit bewiesene fundamentale Satz von der Erhaltung des Geschlechtes einer Curve bei eindeutiger Transformation lässt den invarianten Charakter der adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung deutlich hervortreten und auf einen engen Zusammenhang dieser Curven mit den Invarianten bei eindeutiger Transformation schliessen. Wir werden weiter unten noch hiervon zu sprechen haben.

Man überzeugt sich übrigens leicht davon, dass die p linear unabhängigen Curven $(n-3)$. Ordnung ausser in den singulären Punkten auf f keinen Allen gemeinsamen Punkt besitzen. Denn wäre dies der Fall, so bildeten die übrigen $2p-3$ Schnittpunkte eine Schaar von Gruppen $G_{2p-3}^{(p-1)}$, deren jede nach dem Riemann-Roch'schen Satz die Basispunkte einer (s. d. Corollar): $(p-1)-(2p-3)+(p-1)=1$-fach unendlichen Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung liefern könnte, was der Annahme, dass auch der $(2p-2)$. Punkt fest ist, widerspräche.

Sind die Gleichungen von p linear unabhängigen der Curve $F(y)=0$ adjungirten Curven $(N-3)$. Ordnung, in beliebiger Auswahl:

$$\Phi_1(y)=0,\quad \Phi_2(y)=0\cdots\Phi_p(y)=0,$$

ebenso die von ebensolchen $(n-3)$. Ordnung, welche $f(x)=0$ adjungirt sind:

---

*) Ein gleichfalls die invarianten Eigenschaften der Curven $(n-3)$. Ordnung benutzender Beweis dieses Satzes gründet sich auf den Nachweis der Identität:

$$D(x)\cdot\Phi\big(\Theta(x)\big)\equiv M\cdot\varphi(x)+C\cdot f(x),$$

wo $\varphi(x)=0$ eine zu $f(x)=0$, $\Phi(y)=0$ eine zu $F(y)=0$ adjungirte Curve ist, $D(x)$ die Functionaldeterminante der Transformationsausdrücke $\Theta(x)$ nach den Coordinaten x; M der oben ebenso bezeichnete Factor von $f(x)$ ist (vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen § 14. (S. 52) und Nöther, Math. Annalen II., S. 314 und VI., S. 351.

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \cdots \varphi_p(x) = 0,$$

so kann man, wenn f und F sich eindeutig entsprechen, immer die unbestimmten Factoren α so bestimmen, dass man hat:

$$\Phi_1(y) : \Phi_2(y) : \cdots : \Phi_p(y) = \Sigma\alpha_{1k}\varphi_k(x) : \Sigma\alpha_{2k}\varphi_k(x) : \cdots : \Sigma\alpha_{pk}\varphi_k(x),$$

wo

$$k = 1, 2, \cdots p.$$

Von diesen Gleichungen können je zwei die Transformationsgleichungen (1) ersetzen, was von Bedeutung ist, wenn es sich z. B. darum handelt, zu untersuchen, ob zwei gegeben vorliegende Curvengleichungen eindeutig in einander transformirbar sind.

Die durch adjungirte Curven ($n-3$). Ordnung ausgeschnittenen Gruppen $G_Q^{(q)}$ haben (§ 3.) die Eigenschaft, dass für einen gegebenen Werth von q die Zahl Q möglichst klein wird.

Handelt es sich also darum, die Formeln (1) so zu bestimmen, dass, für $q = 2$, Q, d. h. der Grad der transformirten Curve, ein möglichst niedriger wird, so hat man adjungirte Curven ($n-3$). Ordnung an Stelle der Θ zu setzen. Wir werden weiter unten die näheren Bedingungen angeben, denen diese Curven dann noch zu unterwerfen sind, wollen aber hier eines Ausnahmefalles gedenken, für welchen eine *eindeutige* Transformation durch adjungirte Curven ($n-3$). Ordnung unmöglich wird.

Wenn nämlich auf der Curve f je zwei Punkte einander derart zugeordnet sind, dass (wie dies z. B. bei Curven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt der Fall ist) *alle* adjungirten Curven ($n-3$). Ordnung, welche durch einen beliebigen Punkt gehn, damit von selbst durch einen oder mehrere diesem zugeordnete Punkte gehen, so wird die eindeutige Umkehrung der Formeln (1) auch mit Hilfe von f in der Weise unmöglich, dass sich die Variabeln x durch die y nicht mehr rational, sondern nur noch mit Hilfe von Wurzelzeichen (oder überhaupt Irrationalitäten) ausdrücken lassen, und das Entsprechen hört auf eindeutig zu sein.

Man überzeugt sich indess leicht davon, dass man höhere Irrationalitäten, als Quadratwurzeln (also den Uebergang zu *mehr* als zweideutig entsprechenden Curven) vermeiden kann. Denn wenn jedem *beliebig* gegebenen Punkte α auf f etwa i Punkte in der Weise entsprechen könnten, dass alle adjungirten Curven durch α auch durch jene Punkte hindurchgingen, so könnte man, da eine solche Curve $p-1$ Bestimmungsstücke besitzt, $(i+1)(p-1)$ Schnittpunkte durch Annahme von $p-1$ bestimmen, während es doch nur $2(p-1)$ Schnittpunkte giebt. Daher ist i höchstens $= 1$.

In der angegebenen Weise kann also höchstens *ein* weiterer Punkt einer Curve durch einen gegebenen mit bestimmt sein. Die Curven,

für welche dies eintritt, sind nun aber keine anderen als die *hyperelliptischen*. Denn diese sind definirt durch die Bedingung, eine Schaar $g_2^{(1)}$ zu besitzen. Die beiden Punkte einer einzelnen Gruppe $g_2^{(1)}$ sind dann nach dem Riemann-Roch'schen Satz die Basispunkte von ∞^{p-2} adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, d. h. jede durch einen beliebigen Punkt von $f=0$ gelegte adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung geht noch durch einen zweiten, durch den ersten eindeutig bestimmten Punkt. Sämmtliche adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung schneiden f also in Punktepaaren, von welchen es eine ∞^1-Schaar giebt. Soll nun die Transformation einer hyperelliptischen Curve $f=0$ eine eindeutige sein, so muss man demnach adjungirte Curven von mindestens der $(n-2)$. Ordnung an Stelle der 3 Ausdrücke $\Theta=0$ setzen. Legt man denselben noch die Bedingung auf, durch $n+p-4$ feste Punkte von $f=0$ zu gehen, so sind noch 2 Bestimmungsstücke derselben willkührlich, durch welche dann noch $p+2$ weitere Schnittpunkte bestimmt sind. Die Ordnung der transformirten Curve ist demnach $=p+2$, und zwar besitzt die letztere einen p-fachen Punkt, wie der Restsatz ergiebt. Alle Curven vom Geschlecht p, mit Ausnahme der hyperelliptischen, können ähnlich durch adjungirte Transformationscurven $\Theta=0$ von der $(n-3)$. Ordnung mit $p-3$ gemeinsamen Basispunkten, die indess beliebig auf f angenommen sein können, auf eine Curve $(p+1)$. Ordnung mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten transformirt werden.

§ 7.

Berücksichtigung der singulären Punkte.

Wir haben bisher bezüglich der Singularitäten der Curve f die Voraussetzung gemacht, dass die einzelnen Zweige vielfacher Punkte *getrennt* seien.

In diesem § wollen wir zeigen, wie man durch eine von Nöther*) angegebene Methode in den Stand gesetzt wird, diese Beschränkung aufzuheben.

Wendet man auf eine Curve f, die einen singulären Punkt in P besitzt, eine beliebige eindeutige Transformation an, für welche P ein gemeinsamer Punkt der 3 Transformationscurven Θ ist, so entsprechen dem j-fachen Punkt von f, der in P fallen mag, j Punkte der transformirten Curve F, welche getrennt liegen, wenn die j Zweige von P getrennte Tangenten besitzen. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, der Punkt P liege in dem Eckpunkte des Coordinatendreiecks $x_1=0$, $x_2=0$, und die angewandte Transformation sei die quadratische:

---

*) Gött. Nachrichten 1871, S. 217.

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 .$$

Dann entspricht dem Punkt $x_1 = x_2 = 0$ das Werthsystem:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{0}{0} = \frac{dx_2}{dx_1}; \quad y_3 = 0 .$$

Den j Zweigen in P entsprechen somit die j Punkte $\frac{y_1}{y_2} = \frac{dx_2}{dx_1}$ auf der Geraden $y_3 = 0$. Fallen zwei oder mehrere Tangenten in P zusammen (also in Rückkehrpunkten), so berührt F die Gerade $y_3 = 0$ ein- oder mehrfach.

Weil nun durch das Zusammenrücken zweier oder mehrerer Schnittpunkte dieser Geraden mit F den F adjungirten Curven keine Bedingung auferlegt wird, so haben auch die diesen Curven entsprechenden f adjungirten Curven wegen des einfachen Zusammenfallens mehrerer Tangenten der Zweige des vielfachen Punktes keinerlei Bedingungen zu genügen, und in die frühere Definition der Zahl p, der adjungirten Curven etc. ist keine Modification aufzunehmen.

Es kann nun aber weiter vorkommen, dass die Schnittpunkte der Geraden $y_3 = 0$ mit F, welche den Zweigen von P entsprechen, sich selbst theilweise oder alle wieder zu singulären Punkten vereinigen. Sie entsprechen alsdann Punkten von derselben Beschaffenheit, welche man als in P hereingerückt sich vorstellen muss, und welche durch die Transformation von P selbst und von einander getrennt werden. Die Fortsetzung des Transformationsverfahrens löst auch diese entweder in einzelne Punkte oder in einfachere Singularitäten auf. Ein gänzliches Auflösen der Singularitäten der Curve wird aber darum unmöglich, weil sich bei der Transformation immer wieder neue vielfache Punkte bilden, welche man indess, durch solche Wahl der Seiten des Transformationsdreiecks, dass dieselben ausser in den Eckpunkten des Dreiecks keine Singularitäten der zu transformirenden Curve enthalten, von allen aussergewöhnlichen Eigenthümlichkeiten frei erhalten kann.

Hat man auf diesem Wege die einzelnen vielfachen Punkte, aus welchen sich eine höhere Singularität P auf f zusammensetzt, erkannt, so ist damit die Curve auf eine solche, wie wir sie in dem Früheren vorausgesetzt haben, zurückgeführt, und es ist nunmehr leicht, das Verhalten einer adjungirten Curve in dem Punkt P so zu fixiren, dass alle Sätze, die wir oben abgeleitet haben, namentlich also auch der Restsatz, noch giltig sind. Wäre nämlich in Bezug auf F eine Curvenschaar durch eine äquivalente mit Hülfe des Restsatzes zu ersetzen, so hätte diese zweite Schaar, was die besonderen singulären Punkte auf $y_3 = 0$ betrifft, nur der Bedingung zu genügen, auch in diesen Punkten F adjungirt zu sein. Die quadratische Transformation zeigt nun sogleich, dass, wenn es sich darum handelt, in Bezug auf f eine Curvenschaar durch eine äquivalente zu ersetzen, das Verhalten

dieser zweiten Schaar in dem singulären vielfachen Punkte ebenfalls keiner andern Bedingung unterliegt, als der, ein adjungirtes zu sein; nämlich dass die zweite Schaar in dem zusammengerückten vielfachen Punkte sich ebenso verhalten muss, als ob die Punkte getrennt lägen. Die adjungirte Curve muss also in jedem j-fachen Punkte von f einen $(j-1)$-fachen Punkt besitzen; wenn noch weiter ein i-facher Punkt mit diesem vereinigt liegt, in demselben noch einen $(i-1)$-fachen Punkt etc. In einem Selbstberührungspunkt von f muss demnach die adjungirte Curve die gemeinsame Tangente berühren; ebenso in einem Rückkehrpunkt 2. Art, u. s. w.

Berücksichtigt man in dieser Weise die einzelnen Bestandtheile eines höheren singulären Punktes, so behalten der Restsatz und damit alle im Vorhergehenden entwickelten Sätze ihre uneingeschränkte Giltigkeit.

II. Theil.

§ 8.

Begrenzung der nachfolgenden Betrachtungen.

Die im I. Theil dieses Aufsatzes entwickelten Sätze über Punktgruppen auf einer Curve bedurften ihrer Natur nach keiner besonderen Voraussetzungen über den Grad der Allgemeinheit der Curve, auf welche sich dieselben bezogen.

Wenn wir in diesem II. Theil (mit Ausnahme der geometrischen Anwendung des letzten § 18.) zur Aufsuchung der im § 4. definirten Special-Punktgruppen auf einer gegebenen Curve f übergehn, so bedarf es einer Unterscheidung zwischen solchen Curven, welche die allgemeinsten ihres Geschlechtes sind und Curven mit speciellen Moduln, d. h. Curven, auf welchen Schaaren von Gruppen existiren, die nicht auf jeder ihres Geschlechtes ebenfalls vorkommen. Während diese letzteren Schaaren zur Charakterisirung der besonderen Curve von vornherein mit gegeben sein müssen, führt die Aufsuchung jener Special-Gruppen auf der allgemeinen Curve zu algebraischen Problemen, mit denen wir uns insbesondere im Nachfolgenden beschäftigen werden.

Beispielsweise sind demnach von der folgenden Untersuchung ausgeschlossen die im Früheren schon als „hyperelliptische" bezeichneten Curven, welche Schaaren $g_2^{(1)}$ besitzen. Ausgeschlossen sind ferner alle Curven, deren Ordnungszahl *unter* einer gewissen von p abhängigen Zahl m liegt (wo m später bestimmt werden wird), Curven, welche eine Schaar $g_{m-i}^{(2)}$ $(i>0)$ besitzen, die in der allgemeinen Curve vom Geschlecht p nicht vorkommt. — Durch eine eindeutige Transformation kann, wie wir gesehen haben, *jede* Curve vom Geschlecht

p, mit Ausnahme der hyperelliptischen, in eine Curve $(p+1)$. Ordnung mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten transformirt werden. Schliessen wir also jene aus, so können wir unsere Betrachtungen auf Curven $(p+1)$. Ordnung vom Geschlecht p, oder vielmehr auf die durch beliebige eindeutige Transformation aus ihnen hervorgehenden Curven beschränken. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass auch für Curven mit speciellen Moduln je eine Reihe der Resultate ihre Giltigkeit behalte.

§ 9.

Das Problem der Special-Gruppen.

Die algebraische Aufgabe, auf einer gegebenen Curve $f=0$, n. Ordnung mit je α_i i-fachen Punkten, die nun eine allgemeine ihres Geschlechtes sein soll, Schaaren von Special-Gruppen $G_R^{(r)}$ (für $r > R - p + 1$ und jedenfalls $r > 0$) aufzufinden, führt nach dem Riemann-Roch'schen Satze auf die andere zurück, Gruppen G_R zu finden, durch die, als Basispunkte genommen, noch ∞^q adjungirte Curven $n-3$. Ordnung gelegt werden können, wo

$$q = r - (R - p + 1)$$

ist; und ebenso umgekehrt. Die letztere Aufgabe verallgemeinern wir noch zu folgender:

Gegeben sei eine ∞^t-Schaar von adjungirten Curven. Man soll auf $f=0$ R Punkte G_R so bestimmen, dass die durch sie gehenden Curven der Schaar noch eine ∞^q-Schaar bilden.

Die R Punkte sind demnach durch die Lage von $t-q$ unter ihnen eindeutig bestimmt.

Sei die Gleichung der ∞^t-Schaar:

$$0 = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_{t+1}\varphi_{t+1} \equiv \Phi\,.$$

Dieselbe erfüllt die R Gleichungen:

$$\text{(A)}\qquad \Phi(x^{(1)}) = 0 \quad \Phi(x^{(2)}) = 0 \cdots \quad \Phi(x^{(R)}) = 0,$$

wo unter $x^{(1)}$ (homogene Coordinaten: $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$), $x^{(2)} \cdots x^{(R)}$ die Punkte der Gruppe G_R verstanden sind, für welche noch weiter die Gleichungen bestehn: $f(x^{(1)}) = 0 \cdots f(x^{(R)}) = 0$. Von jenen Gleichungen (A) sind zur Bestimmung der Verhältnisse der α nur $t-q$ verwendbar, weil aus je $t-q+1$ Jede eine identische Folge der Uebrigen sein soll. Aus dieser letzten Bemerkung folgt aber weiter, dass in dem aus den Coefficienten der α_i der Gleichungen (A) zu bildenden System:

$$\text{(B)}\qquad \left\|\begin{matrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_1(x^{(R)}) & \varphi_2(x^{(R)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(R)}) \end{matrix}\right\|,$$

sämmtliche $(t - q + 1)$-gliedrige Determinanten verschwinden. Wie bekannt (vgl. Kronecker in Baltzer's Determinanten, 3. Aufl. S. 42) ist hierzu nothwendig, dass z. B. alle Determinanten von der Form:

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(1)}) & \varphi_i(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(2)}) & \varphi_i(x^{(2)}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdots & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_1(x^{(t-q)}) & \varphi_2(x^{(t-q)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(t-q)}) & \varphi_i(x^{(t-q)}) \\ \varphi_1(x^{(k)}) & \varphi_2(x^{(k)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(k)}) & \varphi_i(x^{(k)}) \end{vmatrix},$$

wo

für i alle Werthe der Reihe $t - q + 1,\ t - q + 2, \cdots\cdot\ t + 1,$

„ k „ „ „ „ $t - q + 1,\ t - q + 2, \cdots\cdot\ R$

zu setzen sind, *zugleich* verschwinden. Aus dem System der so erhaltenen Lösungen sind dann nur noch die überflüssigen, welche nicht zugleich auch *sämmtliche* $(t - q + 1)$ gliedrigen Determinanten des Systems (B) befriedigen, auszuscheiden.

Nun liefert aber das Schema (C)

$$(q + 1)(R - t + q)$$

von einander unabhängige Gleichungen mit R Unbekannten (die Coordinaten der R Punkte sind je durch die Gleichungen: $f(x^{(i)}) = 0$ verbunden). Von diesen bleiben also willkührlich:

$$R - (q + 1)(R - t + q),$$

eine Zahl, die jedenfalls nicht negativ sein darf:

$$(\mathrm{D}) \qquad R \geq (q + 1)(R - t + q).$$

Für den Fall, dass die Curven $\Phi = 0$ von der $(n - 3)$. Ordnung sind, für welche dann der Riemann-Roch'sche Satz gilt, erhält man noch eine andere Grenze für die Möglichkeit des Problems. Wir wollen dieselben bestimmen unter der weiteren Voraussetzung, dass $t = p - 1$ ist, indem wir hiermit zu der früher gestellten Aufgabe, Gruppen $G_R^{(r)}$, für welche $r > R - p + 1$ ist, zu finden, zurückkehren. Die Determinanten (C) werden in diesem Fall $(p - q)$-gliedrige, und von den R Punkten, welche in den durch das Verschwinden dieser Determinanten des Systems (B) gelieferten Gleichungen auftreten, sind noch:

$$R - (q + 1)(R + q - p + 1)$$

willkührlich annehmbar. Diese Zahl kann indess nicht beliebig klein angenommen werden. Denn wenn jene R Punkte noch einer ∞^r-Schaar von Gruppen angehören sollen, so darf die obige Zahl nicht unter r herabsinken, wenn das Problem keinen Widerspruch (nicht Null Lösungen) enthalten soll, oder man hat:

(E) $$R - (q+1)\cdot r \geqq r,$$
und hieraus:
(E′) $$R \geqq \frac{r(r+p+1)}{r+1},$$
oder auch:
(E″) $$p \geqq (q+1)(r+1).$$
Die Differenz der rechten und linken Seite dieser Ungleichungen:
(F) $$\tau = R-(q+1)r-r = R(r+1)-r(r+p+1) = p-(q+1)(r+1)$$
kann nunmehr beliebig auf Null herabgedrückt werden. Diese Zahl τ giebt (vgl. § 2., wo τ dieselbe Bedeutung hat) die Anzahl derjenigen noch willkührlich annehmbaren Punkte einer Gruppe G_R an, welche, nachdem die übrigen r willkührlichen fest angenommen sind, aus einem ∞^τ-System von ∞^r-Schaaren, die alle den gegebenen Bedingungen genügen, eine endliche Anzahl solcher ∞^r-Schaaren ausscheidet.

Den Gruppen G_R sind durch den Riemann-Roch'schen Satz Gruppen $G_Q^{(q)}$ residual zugeordnet in der Weise, dass, wenn R und r der obigen Ungleichung (E′) entsprechend angenommen sind, sich Q und q aus den Gleichungen bestimmen:

$$Q + R = 2(p-1),$$
$$Q - R = 2(q-r).$$

Jeder *Schaar* $g_R^{(r)}$ von corresidualen Gruppen G_R entspricht somit eine ebensolche $g_Q^{(q)}$ und umgekehrt, und zwar so, dass jede Gruppe der einen Schaar jeder der anderen residual ist. Nun giebt es nach Vorstehendem ∞^τ-Schaaren $g_R^{(r)}$ von Gruppen $G_R^{(r)}$; mithin ebenso viele Schaaren $g_Q^{(q)}$, welche *einzeln* den $g_R^{(r)}$ entsprechen. Die ∞^τ-Schaaren von Gruppen G_R haben die Eigenschaft, dass keine mit der andern eine vollständige Gruppe gemein hat (da irgend eine Gruppe die Schaar, der sie angehört, vollständig und eindeutig bestimmt); Aehnliches gilt von den Schaaren $G_Q^{(q)}$.

Für $\tau = 0$ findet man aus den Gleichungen (A), bez. aus dem Verschwinden der Determinanten (C), zu r gegebenen Punkten eine *endliche* Anzahl α von Gruppen von je $R - r = r(q+1)$ Punkten (von denen jede mit den r zusammen eine Gruppe $G_R^{(r)}$ bildet), wenn man eine Gleichung α^{ten} Grades löst, deren Coefficienten noch die Coordinaten von r willkührlichen Punkten enthalten. Alle möglichen Gruppen $G_R^{(r)}$ theilen sich demnach hierbei in α-Schaaren, welche den α Wurzeln dieser Gleichung zugeordnet sind, und, von einander völlig getrennt, auch nicht durch unendlich kleine Veränderungen (continuirlich) in einander übergeführt werden können. Den α Schaaren von Gruppen $G_R^{(r)}$ sind alsdann ebensoviele Schaaren von Gruppen $G_Q^{(q)}$ auf $f=0$ als Residuen eindeutig zugeordnet, und umgekehrt. Die Aufsuchung dieser Schaaren führt somit auf eine Gleichung desselben

Grades wie die der $G_R^{(r)}$; die Anzahl der Lösungen ist für beide Probleme gleich gross, und die Lösungen der beiden Gleichungen gehen eindeutig aus einander hervor, wenn gleich die Probleme vom algebraischen Standpunkte als völlig verschiedene erscheinen.

Ist dagegen τ von Null verschieden, so findet ein derartiges Entsprechen zweier bestimmter Probleme nicht mehr statt. Denn existirt auch eine endliche Anzahl von Gruppen $G_R^{(r)}$ zu $r+\tau$ gegebenen Punkten, so führen diese durch den Riemann-Roch'schen Satz auf Gruppen $G_Q^{(q)}$, welche zwar q, aber keine $q+\tau$ Punkte gemeinsam haben können. Nimmt man demnach $q+\tau$ Punkte beliebig an, und sucht zu diesen die Gruppen $G_Q^{(q)}$, so sind sie zwar in endlicher, aber von jener Zahl verschiedener Anzahl vorhanden. Wohl aber existiren, wie oben bemerkt, zu gegebenen r Punkten ∞^τ-Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_R^{(r)}$, welchen zu beliebig gegebenen q Punkten ∞^τ-Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_Q^{(q)}$ eindeutig entsprechen.

§ 10.

Grenzfälle.

Die Gleichung (E) des vorigen §. giebt die Minimalwerthe der Zahl R von Punkten an, für welche eine Special-Gruppe $G_R^{(r)}$ bei gegebenem r auf der Curve $f=0$ bestehen kann. Wir ordnen, der Uebersichtlichkeit halber, diese Zahlen in einer Tabelle an, indem wir die zugehörigen Werthe von q und Q für die Residualgruppen hinzufügen. Die letzte Colonne enthält noch die Zahl τ der Mannigfaltigkeit der Doppelschaar von Gruppen $G_R^{(r)}$, $G_Q^{(q)}$ (vgl. den vorstehenden §.). Sollen ganze Zahlen für R u. s. w. zum Vorschein kommen, so muss man auf die Gestalt der Zahl p Rücksicht nehmen. π sei eine ganze positive Zahl.

für $p=$	r	Minimalwerth von R	Zugehöriger Werth von q	Zugehöriger Werth von Q	τ
2π	1	$p-\pi+1$	$\pi-1$	$p+\pi-3$	0
$2\pi+1$					1
3π	2	$p-\pi+2$	$\pi-1$	$p+\pi-4$	0
$3\pi+1$					1
$3\pi+2$					2
4π	3	$p-\pi+3$	$\pi-1$	$p+\pi-5$	0
$4\pi+1$					1
$4\pi+2$					2
$4\pi+3$					3

etc.

So existiren z. B. auf einer Curve 5. Ordnung mit 2 Doppelpunkten ($p = 4$) zwei von einander verschiedene ∞^1-Schaaren von Gruppen G_3, ausgeschnitten von den Geradenbüscheln durch je einen der Doppelpunkte. Sind auch diese beiden *Geraden*schaaren durch die Gerade, welche beide Doppelpunkte verbindet, stetig in einander überführbar, so ist dies doch mit den durch sie ausgeschnittenen *Gruppen* keineswegs der Fall. — Die beiden Schaaren lassen sich übrigens zugleich als durch den Riemann-Roch'schen Satz einander zugeordnete Schaaren aufzufassen. Denn sie gehören einer ∞^2-Schaar von Kegelschnitten an, welche durch die beiden Doppelpunkte und einen *beliebigen* weiteren Punkt der Curve 5. Ordnung gelegt werden kann.

Auf der Curve 6. Ordnung C_6 mit 5 Doppelpunkten $a_1 \cdots a_5$ existiren zu 2 willkührlichen Punkten der Curve 5 Special-Gruppen $G_4^{(1)}$. Denn transformirt man die Curve mittelst der ∞^2 Curven 3. Ordnung, welche durch die a und die 2 Punkte b gelegt werden können, so erhält man wieder eine Curve 6. Ordnung, die 5 Doppelpunkte haben muss, und deren auf der Curve C_6 entsprechende Punktepaare bilden mit $b_1 b_2$ zusammen die Basispunkte für Curven 3. Ordnung, die C_6 in Schaaren $g_4^{(1)}$ schneiden. Man erhält auf C_6 im Ganzen ∞^1 Systeme von Schaaren $g_4^{(1)}$. Eine derselben besteht z. B. aus den Gruppen, welche von dem durch a_1 gehenden Geradenbüschel ausgeschnitten werden; die Residualschaar derselben sind die Gruppen $G_4^{(1)}$, welche von dem durch $a_2 a_3 a_4 a_5$ gehenden Kegelschnittbüschel ausgeschnitten werden.

§ 11.

Ueber die Lösung des Problems der Special-Gruppen.

Wir haben oben (§ 9.) das Problem der Special-Punktgruppen in algebraischer Form aufgestellt, ohne weiter zu untersuchen — abgesehen von der in Formel (E) desselben § aufgestellten Bedingung — ob auch die angegebenen Gleichungen (mit ebensovielen Unbekannten), auf welche das Problem führt, keinen Widerspruch enthalten, oder, auf der anderen Seite, ob dieselben nicht etwa unendlich viele Lösungen zulassen. Auch die letztere Möglichkeit, welche der Zahl τ einen anderen Werth ertheilen würde, als wir oben (§ 9.) festgestellt, muss, wenn die späteren Anwendungen zulässig sein sollen, ausgeschlossen sein.

Man hat nun aber zweierlei Wege, um die Widerspruchslosigkeit und die Endlichkeit der Anzahl von Lösungen eines algebraischen Problems festzustellen: entweder, indem man aus der Discussion der Gleichungen selbst den numerischen Ausdruck für die Anzahl der Lösungen ableitet, oder indem man an dem durch irgend welche besondere Annahme der Constanten specialisirten Problem, bei welchem

man sich von der Existenz von Lösungen direct überzeugen kann, nachweist, dass dasselbe nicht unendlich viele Lösungen besitzt. Denn wenn durch Specialisirung der Constanten eine etwa vorhandene Functionalbedingung zwischen den Gleichungen (vermöge deren im allgemeinen Problem *keine* Lösungen vorhanden sind) identisch erfüllt wird, so wird die Anzahl der Gleichungen vermindert und die der Lösungen somit unendlich.

Durch die Formel (E, § 9.):

$$R - r(q+1) \geqq r$$

haben wir bereits alle diejenigen Probleme als unmöglich ausgeschlossen, bei welchen die *beiden* Ungleichungen:

$$[A] \qquad r > R - r(q+1) \geqq 0$$

zugleich erfüllt sind, Probleme, für welche nach dem Riemann-Roch'schen Satz sich im Voraus erkennen liess, dass sie unendlich viele Lösungen besitzen müssen, wenn sie *eine* haben, die also im Allgemeinen *Null* Lösungen besitzen.

Was nun zunächst die Anwendung der *ersten* der oben erwähnten Methoden auf unser Problem angeht, so scheinen die Schwierigkeiten, die sich der allgemeinen Discussion des Gleichungssystems, auf welches das angegebene Problem führt, entgegenstellen, dermalen noch unüberwindlich. Diese Discussion und die Aufstellung der Anzahl der Lösungen ist bisher nur für einige der hierher gehörigen Probleme möglich gewesen*), jedoch in der Weise, dass sich aus den erhaltenen Formeln auf die für eine wichtige Classe der obigen Probleme bestehende allgemeine Formel schliessen lässt.

Diese Formeln beziehen sich auf den Fall der Special-Gruppen $G_R^{(1)}$, für den das Problem als solches auch von Clebsch und Gordan (Abel'sche Functionen § 61.) schon algebraisch formulirt worden war; und zwar handelt es sich um Gruppen G_R, durch die noch $\infty^q = \infty^{p-R}$ adjungirte Curven gehn. Jene Formeln umfassen somit den von Riemann (Abel'sche Functionen § 5.) betrachteten Fall ($r = 1$ der Tabelle), in welchem R zugleich möglichst klein, nämlich $= \frac{1}{2}(p+2)$, bez. $= \frac{1}{2}(p+3)$ wird, während q bez. $= \frac{1}{2}(p-2)$ und $= \frac{1}{2}(p-3)$ wird.

Bezeichnet man die Anzahl der Lösungen, welche die R-gliedrigen Determinanten eines Systems von der Form (B, § 9.), das aus R Horizontalreihen und $(R+i)$ Verticalreihen ($i \geqq 0$) besteht, sämmtlich

*) S. Brill, Math. Annalen, Bd. VI. S. 61 ff. (Einen in der Formel für $(7)_4$ (S. 63) befindlichen Fehler verbessere man nach dem Druckfehler-Verzeichniss des VI. Bandes.)

zum Verschwinden bringen (wobei die Punkte $x^{(i)}$ immer auf $f = 0$ zu liegen haben), mit $(R + i)_R$, ist ferner M die Anzahl der nicht *allen* Curven $\varphi = 0$ gemeinsamen Schnittpunkte *einer* derselben mit f (für den erwähnten Fall eines Minimalwerthes von R ist im System (B) $t = p - 1$, oder $i = p - R = q$ zu setzen, sowie $M = 2p - 2$), ist endlich:

$$k = M - R + 1, \quad (\text{für jenen Fall} = 2p - 1 - R = Q + 1)$$

und:

$$\binom{l}{m} = \frac{l(l-1)\cdots(l-m+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots m},$$

so hat man für die Anzahl der gemeinsamen Lösungen:

$$[\mathrm{B}] \quad (R+i)_R = \binom{k}{i+1} - \binom{p}{1}\binom{k-2}{i-1} + \binom{p}{2}\binom{k-4}{i-3} - \cdots\cdots$$

$$\cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{i}{2}} \cdot \binom{p}{\frac{1}{2}i} \cdot \binom{k-i}{1} \cdots\cdots (i \text{ gerade}) \\ (-1)^{\frac{i+1}{2}} \cdot \binom{p}{\frac{1}{2}(i+1)} \cdot \cdots\cdots (i \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Die directe Ableitung dieser Formel sei für eine andere Gelegenheit vorbehalten, indem es hier genügen möge, darauf hinzuweisen, dass a. a. O. bereits ein strenger Beweis derselben für die Fälle $i = 0, 1, 2, 3$ gegeben worden ist. Wir wollen jedoch hervorheben, dass sich eine leicht ausführbare Verification dieser Formel [B] aus der Bemerkung ergiebt, dass für den (in der Tabelle des § 10. nicht mehr enthaltenen) Fall: p ungerade und:

$$r = 1, \quad R = \frac{p+1}{2}, \quad i = q = \frac{p-1}{2}, \quad k = \frac{2p-3}{2},$$

die Zahl der Lösungen $(R + i)_R$ *Null* sein muss, weil für diesen Fall, welches auch der Werth von p sein mag, die *beiden* obigen Ungleichungen [A]

$$r > R - r(q+1) \geqq 0$$

erfüllt sind. In der That erhält man Null, wie man leicht erkennt, wenn man die Formel, welche für diesen Fall aus [B] hervorgeht, durchaus in i anschreibt, und dann, vom ersten Glied anfangend, addirt. Die Summe der $\lambda + 1$ ersten Glieder der rechten Seite lässt sich nämlich alsdann durch die Formel darstellen:

$$[\mathrm{B}'] \qquad \binom{2i}{\lambda}\binom{3i-2\lambda}{i-2\lambda+1}\frac{(i-2\lambda+1)(i-2\lambda)}{i(i+1)},$$

wie man durch einen Schluss von λ auf $\lambda + 1$ beweist. Dieser Ausdruck wird aber $= 0$ für $\lambda = \frac{i+1}{2}$ und $\lambda = \frac{i}{2}$ (für welche Werthe der zweite Klammerausdruck in [B′] bez. den Werth 1 und $2i$ erhält), d. h. wenn man die Summe (für ungerade, bez. gerade i) bis zum letzten Glied erstreckt. Q. e. d.

Mit der Formel [B.] ist nun die Frage sowohl nach der Möglichkeit, wie nach der Bestimmtheit des Problems für $r = 1$ und $p > 1$ erledigt, indem dann der Ausdruck $(R + i)_R$ eine positive, ganze Zahl ergiebt, sofern nur die Constanten, die in den Gleichungen auftreten, allgemeine Werthe besitzen.

In gleicher Weise ist durch Vermittlung des Riemann-Roch'schen Satzes die Existenz der residualen Punktgruppen $G_Q^{(Q-p+2)}$, insbesondere auch der Maximalgruppen, durch welche noch eine einfach unendliche Schaar von adjungirten Curven $(n - 3)$. Ordnung möglich ist, und für die $Q = \frac{1}{2}(3p - 6)$, bez. $\frac{1}{2}(3p - 7)$ und $q = \frac{1}{2}(p - 2)$, bez. $= \frac{1}{2}(p - 3)$ ist, erwiesen, was durch directe Inangriffnahme des betr. algebraischen Problems ungleich schwieriger gewesen wäre.

Der zweite im Früheren erwähnte Weg, um die Möglichkeit der auftretenden algebraischen Probleme zu erkennen, nämlich der der Untersuchung der Curve unter Voraussetzung einer Lösung des Problems, führt in vielen einzelnen Fällen zum Ziel, ohne dass sich deshalb eine zusammenfassende Methode angeben liesse. Wir erwähnen hier nur der Bestimmung der Gruppen $G_6^{(2)}$ für $p = 6$, die, an der Curve 6. Ordnung mit 4 Doppelpunkten ausgeführt, auf die Zahl 5 der Lösungen sogleich führt.

§ 12.

Ueber eine indirecte Bestimmungsweise der Minimal-Gruppen $G_R^{(1)}$.

Wenn eine Special-Gruppe $G_R^{(1)}$ aus der kleinsten Anzahl $R = \frac{1}{2}(p + 2)$, bez. $\frac{1}{2}(p + 3)$, von Punkten besteht, welche nach der Tabelle des § 10. noch für $r = 1$ zulässig ist, so kann man das Problem, die Anzahl α der zu 1 gegebenen Punkte möglichen Gruppen G_R zu finden, auf ein anderes zurückführen, welches zuweilen leichter zu lösen ist als das erstere, und umgekehrt.

Sei zunächst p gerade, also $R = \frac{1}{2}(p + 2)$. Wir nehmen an, es seien 2 verschiedene der α zu einem gegebenen Punkt construirbaren Gruppen G_R gegeben, so gehört die Gruppe G_{2R}, welche sich aus beiden zusammensetzt, einer ∞^3-Schaar an, welche durch adjungirte Curven $(n - 3)$. Ordnung ausgeschnitten werden kann. Denn seien $\varphi - \varkappa\,\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\,\psi' = 0$ die beiden Büschel von adjungirten Curven $(n - 3)$. Ordnung, welche bez. die Schaaren, welchen jene beiden Gruppen G_R angehören, ausschneiden, so wird die Gruppe G_{2R} ausgeschnitten von einer Curve der ∞^3-Schaar:

$$\mu \cdot \varphi\psi + \nu \cdot \varphi'\psi' + \varrho \cdot \varphi\psi' + \sigma \cdot \varphi'\psi = 0,$$

ist also eine Gruppe $G_{2R}^{(3)}$. Eine solche kann aber nach dem Satze des § 4. durch eine Curve $(n - 3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, welche in noch $p - 4$ weiteren Punkten schneidet, die ihrerseits wiederum einer ∞^0-Schaar angehören, wie sich sofort aus dem Riemann-

Roch'schen Satz ergiebt. Zu jedem Paar von Gruppen G_R, die einem Paar von Wurzeln jener Gleichung α. Grades entsprechen, gehört sonach eine einzige Gruppe Γ_{p-4}. Andererseits ordnen sich jeder einzelnen der α Gruppen G_R die $\alpha - 1$ übrigen durch Vermittlung von $\alpha - 1$ Gruppen Γ_{p-4} zu. Geht man also von einer *einzelnen* Gruppe G_R aus, und fragt nach *denjenigen Gruppen* G_{p-4}, *welche mit* G_R *zusammen die Basispunkte einer* ∞^1-*Schaar von adjungirten Curven* $(n - 3)$. *Ordnung bilden*, so muss man zu jenen $\alpha - 1$ Gruppen Γ_{p-4} gelangen. Dass aber diese Aufgabe andererseits auch in der algebraischen Form, in welche dieselbe nach § 9. gebracht werden kann, eine völlig bestimmte und endliche ist, geht daraus hervor, dass die für diesen Fall in Betracht kommende Ungleichung (D) des § 9. (in welcher $R = p - 4$, $q = 1$, $t = \frac{1}{2}(p - 2)$ zu setzen ist) erfüllt ist. Das Problem, die Gruppen Γ_{p-4} zu einer gegebenen Gruppe G_R zu finden, *enthält somit eine Lösung weniger*, als das Problem, die Gruppen G_R selbst zu finden. Diese Bemerkung kann in vielen Fällen für die indirecte Bestimmung der Anzahl der Lösungen des einen oder des anderen Problems von Nutzen sein; und es ist interessant, dass auch die Gleichung $(\alpha - 1)$. Grades, welche nach Ausscheidung eines Factors übrig bleibt, noch diese geometrische Deutung zulässt.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für ungerade p anstellen. Dort existirt zu jeder Gruppe G_R noch eine endliche Anzahl von Gruppen Γ_{p-5} von $p - 5$ Punkten, die mit G_R zusammen die Basispunkte einer ∞^1-Schaar von adjungirten Curven $(n - 3)$. Ordnung bilden, welche noch in weiteren Gruppen G_R schneiden. Durch eine einzelne Gruppe Γ_{p-5} geht eine ∞^4-Schaar von adjungirten Curven $(n - 3)$. Ordnung, die f in Punktgruppen schneiden, unter welchen die von $(\varphi - \varkappa\varphi')(\psi - \lambda\psi') = 0$ ausgeschnittenen enthalten sind. Es giebt aber ∞^2 solcher Gruppen Γ_{p-5}, die einander nicht corresidual sind.

§ 13.

Normalcurven.

Die im § 11. (am Ende) erwähnten Maximal-Punktgruppen $G_Q^{(Q-p+2)}$ sind es, welche Riemann zur Transformation der Curve f auf eine Normalform benutzt hat: eine Curve $(p + 2)$. Ordnung (bez. $(p + 3)$. Ordnung) mit zwei $\frac{1}{2}(p + 2)$- (bez. $\frac{1}{2}(p + 3)$-)fachen Punkten und noch $\frac{1}{4}p(p - 4)$ (bez. $\frac{1}{4}(p - 1)^2$) Doppelpunkten. Die Punkte einer solchen Gruppe sind nämlich die Basispunkte eines Büschels von adjungirten Curven $(n - 3)$. Ordnung, welches in der Minimalzahl $R = \frac{1}{2}(p + 2)$ (bez. $\frac{1}{2}(p + 3)$) von beweglichen Punkten die Curve f schneidet. Seien $\varphi - \varkappa\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\psi' = 0$ zwei solche Büschel, deren Basispunkte jedoch nicht corresidual sein dürfen. Diese Gleichungen, mit $f = 0$ verbunden, ergeben in den neuen Coordinaten

$\varkappa$, λ die Riemann'sche Normalcurve, deren vielfache Punkte in $\varkappa = \infty$ und $\lambda = \infty$ liegen. Man kann indess, indem man $\varkappa = \frac{x_1}{x_3}$, $\lambda = \frac{x_2}{x_3}$ setzt, die beiden Büschel auch mittelst:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi\psi' : \varphi'\psi : \varphi'\psi' : \varphi\psi\,,$$

wo noch:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

ist, zur Transformation von f in eine auf dem Hyperboloid $x_1x_2 - x_3x_4 = 0$ gelegene Raumcurve $(p+2)$. (bez. $(p+3)$.) Ordnung benutzen (die ebenfalls noch wirkliche Doppelpunkte erhält). Diese Transformationen sind eindeutig, d. h. die beiden Büschel $\varphi - \varkappa\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\psi' = 0$ haben immer nur je *einen* beweglichen Punkt gemein; denn die Basispunkte sollen nicht corresidual sein, und man kann immer Curven schon direct angeben, bei welchen dann jene Eigenschaft wirklich eintritt, wie bei der oben genannten Normalcurve selbst, bei denen die beiden Geradenbüschel in den vielfachen Punkten dieselbe besitzen. (Ausgenommen sind die Fälle $p = 1$ und $p = 2$.)

Projicirt man diese Raumcurve von einem ihrer Doppelpunkte aus auf eine Ebene, so ergiebt sich eine Normalcurve p. (bez. $(p+1)$.) Ordnung mit zwei $\frac{1}{2}(p-2)$- (bez. $\frac{1}{2}(p-1)$-)fachen Punkten und $\frac{1}{4}p(p-4) - 1$ (bez. $\frac{1}{4}(p-1)^2 - 1$) Doppelpunkten. (Ausgenommen von dieser Transformation ist noch der Fall $p = 4$.)

Diese Umformung ist identisch mit einer quadratischen Transformation der Riemann'schen Normalform, deren drei Fundamentalpunkte in die beiden vielfachen Punkte und einen Doppelpunkt derselben gelegt werden. Es ist noch zu bemerken (worauf wir später zurückkommen werden), dass für die Transformation von Curven mit ungeradem p in jedem der beiden Büschel noch $\tau = 1$ willkührliche Punkte zur Bestimmung der betreffenden Schaar vorhanden sind, denen entsprechend noch zwei willkührlich zu bestimmende Parameter zur Verfügung stehen.

Wie der Fall $r = 1$ der obigen Tabelle zur Transformation von f auf eine Curve führt, bei der Geradenbüschel existiren, welche in Gruppen von möglichst wenigen beweglichen Punkten schneiden, so dient der Fall $r = 2$ zur Transformation von f auf eine Curve, bei der die ∞^2-Schaar der Geraden der Ebene in möglichst wenigen Punkten schneidet, also zur Transformation auf die *Normalcurve niedrigster Ordnung*. Man hat zu diesem Zwecke nur die durch eine der dort angegebenen G_Q gehenden adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung den Geraden der Ebene entsprechen zu lassen. Die Normalcurve wird also eine Curve der Ordnung $p - \pi + 2$, mit $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$ Doppelpunkten, wo $p = 3\pi$, bez. $= 3\pi + 1$ und $= 3\pi + 2$ gesetzt ist. Diesen 3 Fällen entsprechend hat man zur Wahl der Schaar der Transformationscurven keinen, einen oder zwei Parameter zur Verfügung.

Die allgemeine Formel zur Bestimmung der Anzahl der Schaaren (wenn $\tau + r$ Bestimmungsstücke gegeben sind), von denen eine hier zur Transformation angewendet wird, ist noch nicht aufgestellt. Die niedrigsten Fälle, insbesondere für $p = 6, 7, 8$, sind indess schon mittelst der obigen Formel ([B] in § 11.) erledigt. Zu beachten ist jedoch, dass die Gleichungen, auf welche das Problem führt, von derselben Art sind, wie die im Vorigen betrachteten, dass also die Schwierigkeit der Abzählung nur eine formelle ist, und dass eine Formel von der Art der [B] offenbar auch hier existiren muss. Da die bisher bekannten Formeln für wachsende p rasch steigende Zahlenwerthe ergeben, für $p = 6, 7, 8$ aber hier schon ganze, steigende Zahlen erhalten werden, so dürfen wir annehmen, dass die hier gültige Formel diese Eigenschaft ebenfalls besitzen muss.

Man kann zufügen, dass man auch hier durch besondere Betrachtungen an speciellen Curven einzelne dieser Zahlen leicht erhalten kann, die nach dem früher Gesagten alsdann auch für die allgemeinen Fälle ihre Geltung behalten.

Für den vorliegenden Fall gilt dasselbe, was wir im Früheren über die Verwendbarkeit der betreffenden Schaaren zu *eindeutigen* Transformationen bemerkt haben; es lassen sich schon immer zu speciellen Curven wirklich existirende Schaaren angeben, welche die zur Transformation erforderlichen Eigenschaften besitzen, wie z. B. die Geraden bei der Normalcurve.

In ähnlicher Weise kann man die weiteren Curvenschaaren: $r = 3, 4, \cdots$, welche die Tabelle liefert, zur Transformation von f in Normalcurven benutzen, welche in einem Raum von bez. $3, 4, \cdots$ Dimensionen gelegen sind. So ist also in einem Raum von 3 Dimensionen *die Raumcurve niedrigster Ordnung* bei gegebenem p, welche einer ebenen Curve mit allgemeinen Moduln (s. den folgenden §) entspricht, von der Ordnung $p - \pi + 3$, wo $p = 4\pi$, bez. $= 4\pi + 1$, $4\pi + 2$, $4\pi + 3$ gesetzt ist. Für $p = 4\pi$ kann dabei, abgesehen von den linearen Transformationen im Raum, die Transformation nur auf eine endliche Anzahl von Arten stattfinden.

§ 14.

Die Moduln einer Classe von algebraischen Curven. Riemann's Bestimmungsweise.

Riemann hat die algebraischen Curven vom Geschlechte p in *Classen* geordnet. In dieselbe Classe gehören alle diejenigen Curven, welche sich eindeutig in einander transformiren, also auch aus irgend einer Curve der Classe durch eindeutige Transformation ableiten lassen. Eine Classe eindeutig einander entsprechender Curven hängt von einer bestimmten Anzahl von stetig veränderlichen Parametern ab,

die als *Moduln* dieser Classe bezeichnet werden (Riemann, Abel'sche Functionen, Nr. 12 in Bd. 54 des Journ. Crelle-Borchardt). Wenn ein genau definirter algebraischer Process*) auf irgend eine der eindeutig in einander transformirbaren Curven der Classe angewendet, auf dieselben Werthe einer endlichen Anzahl von Parametern führt, und *umgekehrt* durch diese Werthe auch eine solche Classe von Curven eindeutig oder doch endlich vieldeutig bestimmt ist, so sind diese Parameter als die Moduln dieser Classe zu betrachten. Dieselben haben somit Invarianten-Eigenschaft bei eindeutiger Transformation. Je nach der Art der im Voraus zu definirenden algebraischen Operation erhält man verschiedene Systeme von Grössen als Moduln.

Offenbar muss nach dem, was (in § 6.) über den Invarianten-Charakter der adjungirten Curven (n — 3). Ordnung gesagt worden ist, dieser Process sich auf das *Verhalten der Curve f zu diesen Curven* beziehen. Wir werden mehrere solcher Operationen (bei welchen es gleichgültig ist, von welcher Curve der Classe man ausgeht) nach einander anführen und zeigen, *dass dieselben sämmtlich auf die Zahl $3p - 3$ von Moduln führen.*

Des Zusammenhangs wegen erwähnen wir zunächst die bisher in dieser Frage angestellten Betrachtungen, und beginnen mit dem Verfahren Riemann's. Dasselbe bezieht sich auf das Verhalten von f zu einer ∞^1-Schaar von adjungirten Curven (n — 3). Ordnung, die man durch $p - 2$ feste Punkte $x_1, x_2, \cdots x_{p-2}$ von f gelegt hat. Die ∞^1-Schaar der Gruppen von p weiteren Schnittpunkten hängt von $p - 2$ Parametern ab, denn durch Veränderung der Lage auch nur eines der $p - 2$ Punkte x geht die ∞^1-Schaar in eine andere ihr nicht corresiduale, das Büschel also in ein nicht äquivalentes über. In dem Büschel giebt es $4p - 2$ Curven, welche f berühren. Denn die Berührungspunkte werden durch den Schnitt von f mit der Jacobi'schen Curve (Functionaldeterminante) von f, φ, φ' (wenn $\varphi - \lambda\varphi' = 0$ das Büschel ist) bestimmt, einer Curve von der Ordnung $3n - 9$, die f in jedem der i-fachen Punkte $3i(i-1)$-punktig, in jedem der Punkte x 2-punktig trifft. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{4p-5}$ irgend $4p - 5$ von einander unabhängige Doppelverhältnisse der $4p - 2$ Parameter λ dieser Curven; dieselben werden zwar von linearen Transformationen unabhängig, aber im Allgemeinen noch Functionen der $p - 2$ Punkte x sein. Unter der Voraussetzung nun, dass es $p - 2$ unter ihnen giebt, welche als von einander unabhängige Functionen der Coordinaten dieser $p - 2$ Punkte auftreten, kann man, mittelst Elimination dieser Coordinaten, $(4p - 5) - (p - 2) = 3p - 3$ Functio-

*) An sich sind hierbei auch transcendente Operationen (von denen Riemann ebenfalls Gebrauch macht) zulässig. Wir sehen jedoch in unseren algebraischen Betrachtungen von denselben ab.

nen der Doppelverhältnisse angeben, welche unabhängig sind von dem speciellen Büschel, das hier benutzt wird. Nimmt man den Riemann'schen, freilich transcendenten (aber auch leicht direct algebraisch durchführbaren (siehe unten)) Nachweis hinzu, dass sich zu beliebigen Werthen der λ_i eine *endliche**) Zahl von Classen in einander transformirbarer Curven finden lässt, so kann man also die $3p-3$ Functionen der λ_i als Moduln ansehn.

Wäre die erwähnte Voraussetzung nicht erfüllt, wären also die Coordinaten der $p-2$ Punkte nur in weniger als $p-2$ Combinationen in den Gleichungen enthalten, so würde die Zahl der Moduln $3p-3$ übersteigen. Wie sich diese Zahl in der That in speciellen Fällen modificiren kann, zeigt z. B. der Fall der hyperelliptischen Curven. Irgend ein Büschel von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung durch $p-2$ Punkte von f geht hierbei noch durch $p-2$ weitere feste Punkte von f, und in demselben giebt es nur $2p+2$ Berührungscurven. Da diese sämmtlichen Büschel hier weiter äquivalent sind, so sind die $2p-1$ Doppelverhältnisse der Parameter dieser Berührungscurven unabhängig von der Wahl der festen Punkte, und sie sind die $2p-1$ Moduln der hyperelliptischen Curve.

§ 15.

Modification der Riemann'schen Bestimmungsweise der Moduln.

Riemann hat den algebraischen Beweis der Zahl $3p-3$ fallen gelassen wegen der Schwierigkeit, die oben erwähnte Voraussetzung im allgemeinen Fall direct zu untersuchen. Wir wollen zeigen, dass diese Untersuchung in der That und zwar auf mehrfache Weise geleistet werden kann.

Wir schreiben der adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung vor, die gegebene Curve f in einem Punkte p-punktig zu treffen**). Diese Aufgabe hat, für $p>1$, immer eine endliche Anzahl von Lösungen. Denn sie kann nie, auch wenn man eine Lösung voraussetzt, *unendlich* viele Lösungen zulassen, da es alsdann ∞^p adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung geben müsste. Uebrigens kann die Zahl der Lösungen selbst*) durch die Formel angegeben werden:

*) Ist nämlich nur die Lage der Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche gegeben, so können zwar für *jede* der zugehörigen algebraischen Functionen diese Punkte als *dieselben* Blätter verbindend angesehen werden (s. Lüroth, Math. Ann. Bd. IV, S. 181 und Clebsch ibid. Bd. VI, S. 216), aber die Art des Zusammenhangs der einzelnen Blätter (die Lage der „Verzweigungsschnitte") kann immer noch eine wesentlich verschiedene sein. Vgl. Thomae, Borchardt's Journal Bd. 75, S. 224.

**) Dieser Weg ist vor längerer Zeit schon von Herrn Weierstrass eingeschlagen worden.

***) Vgl. Jonquières, in Borchardt's Journal Bd. 66, wo indess der vorlie-

$$(p-1)\,p\,(p+1).$$

Sei nun C_{n-3} eine der hier gefundenen Curven. Dieselbe trifft f noch in $p-2$ Punkten, welche wir als Basispunkte x der oben bezeichneten ∞^1-Schaar annehmen. Unter den $4p-2$ Berührungscurven dieser Schaar fallen jetzt $p-1$ in die C_{n-3} zusammen. Wir haben daher die $p-2$ Basispunkte des Büschels nun so bestimmt, dass von den $4p-5$ Doppelverhältnissen der Parameter λ_i $p-1$ gleiche Werthe annehmen. Die $3p-3$ Parameter, die hier noch die Classe bestimmen, sind die Moduln.

Dass umgekehrt durch die Werthe dieser $3p-3$ Parameter eine Classe endlich bestimmt ist, kann man gleichfalls algebraisch und zwar durch die folgenden, einer Schlussweise des Herrn Cayley (in den Proceedings of the London Math. Soc. Vol. I. Oct. 1865) nachgebildeten Betrachtungen zeigen. Die Curve, für welche man jene $3p-3$ Parameter als bekannt annehmen will, möge in folgender Weise aus f hergeleitet werden: Man transformire f durch eine ∞^2-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die man durch $p-3$ der zuletzt bestimmten $p-2$ Punkte gehn lässt. Die transformirte Curve F wird von der $(p+1)$. Ordnung sein, mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten und der Eigenthümlichkeit, dass sie einen Punkt P besitzt, in welchem eine Gerade p-punktig berührt, eine Eigenschaft, die $p-3$ Beziehungen zwischen den absoluten Invarianten der Curve darstellt. Die in P berührende Gerade trifft die Curve F noch in einem Punkte P', welcher der Scheitel des Geradenbüschels ist, der dem im Vorhergehenden gefundenen Büschel von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung für f entspricht. Nun hat diese Curve F, welche den Bedingungen genügt, von der $(p+1)$. Ordnung zu sein, $\frac{1}{2}p\,(p-3)$ Doppelpunkte zu besitzen, durch den Punkt P' hindurchzugehn und die gegebenen $3p$ Geraden des durch P' gehenden Büschels, und zwar eine derselben in der $(p-1)$. Ordnung, zu berühren, noch:

$$\tfrac{1}{2}(p+1)(p+4)-\tfrac{1}{2}p\,(p-3)-(4p-2)-1=3$$

Constanten. Sei aber $F'=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve, welche diesen Bedingungen genügt, in den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 geschrieben, und seien $x_1=0$, $x_2=0$ die Coordinaten des Punktes P'. Jede Curve $F=0$, die aus $F'=0$ durch die lineare Transformation, bei der $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3$ an Stelle von x_3 in $F'=0$ eingesetzt wird, hervorgeht, erfüllt ebenfalls noch die Bedingungen und enthält 3 willkührliche Constanten, woraus folgt, dass alle Curven, welche den Bedingungen genügen, aus einer endlichen Zahl von

gende Fall adjungirter Berührungscurven nicht unmittelbar berücksichtigt ist, sowie Brill, Ueber zwei Berührungsprobleme, Math, Annalen IV, S. 530.

Curven F' durch lineare Transformation müssen abgeleitet werden können. Wenn eine solche Curve F' noch irgend 3 durch lineare Transformation zerstörbare Bedingungen erfüllt (z. B. durch irgend 3 Punkte hindurchgeht, deren Coordinaten Zahlenwerthe sind), so besitzt sie nur $3p-3$ Constanten, welche dann bestimmte (irrationale) Functionen der $3p-3$ Parameter λ_i sind, was zu beweisen war. Statt dieser könnte man auch irgend $3p-3$ von einander unabhängige absolute Invarianten der Curve F (welche von den 3 in der Gleichung noch vorhandenen durch lineare Transformation zerstörbaren Constanten unabhängig sein müssen) oder endlich die $3p-3$ Constanten der Curve F' als Moduln definiren; die letztere Bestimmungsweise zeichnet sich vor den beiden anderen noch insofern aus, als sie, wenn die Coefficienten der Gleichung der Curve, also diese vollständig gegeben ist, die Classe *eindeutig* bestimmt.

Wir mögen hier anschliessend kurz den Einwand erledigen, den Herr Cayley in der oben citirten Note gegen die Zahl $3p-3$ erhoben hat. Sei eine der eben angeführten analoge Transformation von f auf eine Curve F mittelst einer ∞^2-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die aber durch $p-3$ beliebige Punkte $x_1, x_2, \cdots x_{p-3}$ von f gehen, ausgeführt. Dann ergiebt sich durch den oben benutzten Schluss, dass $4p-6$ Functionen der $4p-5$ Parameter λ_i der Berührungscurven, welche durch noch einen festen Punkt x_{p-2} gehen, existiren, die unabhängig sind von der Wahl des Basispunktes x_{p-2}; denn die $4p-6$ absoluten Invarianten von F sind unabhängig von der Wahl des dem Punkt x_{p-2} entsprechenden Scheitels des Tangentenbüschels. Da nun die Punkte $x_1, x_2, \cdots x_{p-3}, x_{p-2}$ für den Curvenbüschel auf f, welcher dem Tangentenbüschel entspricht, symmetrisch eingehen, so schliesst Cayley, dass jene $4p-6$ Functionen unabhängig seien von der Lage der $p-2$ Punkte. Dies wäre gerechtfertigt, wenn auch die $4p-6$ Functionen selbst symmetrisch abhängen von den $p-2$ Punkten, wie die $4p-5$ Doppelverhältnisse, aus denen sie eben *durch Elimination eines der Punkte* sich ergaben. Dass diess in der That nicht der Fall ist, ergiebt sich gerade aus dieser Elimination. Hiernach aber erscheint es auch nicht erforderlich, zur Hebung des gedachten Widerspruchs auf den Begriff der imperfecten Invarianten (Cayley, Math. Annalen Bd. 3, S. 270) einzugehen.

§ 16.

Andere Bestimmungsweise der Moduln.

Ein Mittel anderer Art, um die von Riemann angedeutete Schwierigkeit zu erledigen, bildet die im Früheren (§ 11.) durchgeführte Untersuchung der auf einer allgemeinen Curve f liegenden Minimalgruppen $G_R^{(1)}$. Sie führt für gerade p direct auf die Zahl $3p-3$,

für ungerade p bleibt noch *ein* weiterer Parameter zurück, dessen Beseitigung durch anderweitige Betrachtungen erfolgt.

Wir bedienen uns eines Büschels von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, dessen Basispunkte eine der Gruppen G_Q der Tabelle § 10., für $r=1$, bildet. In diesem Büschel giebt es noch $3p$, bez. $3p+1$ (für p gerade, bez. ungerade), Berührungscurven. Die $3p-3$ Doppelverhältnisse der Parameter λ_i dieser Curven sind, *wenn p gerade ist*, als *Moduln* aufzufassen. In der That gelangt man nur zu einer endlichen Anzahl von Werthen dieser $3p-3$ Grössen, wie auch die Basispunkte G_Q gewählt sein mögen; denn es giebt nur eine endliche Anzahl von Schaaren corresidualer Gruppen G_Q; die Curven äquivalenter Büschel entsprechen einander aber projectivisch, jene $3p-3$ Doppelverhältnisse sind daher für corresiduale Gruppen G_Q dieselben und nur für die Gruppen aus verschiedenen Schaaren verschieden. Weiterhin ist aber auch umgekehrt durch $3p-3$ gegebene Werthe der Doppelverhältnisse die Classe endlich vieldeutig bestimmt. Der algebraische Nachweis dieser Behauptung ist für $p \gtreqless 6$ identisch mit dem Nachweis, dass die (früher aus der Riemann'schen Normalform abgeleitete) Curve p. Ordn. mit zwei $\frac{1}{2}(p-2)$-fachen und $\frac{1}{4}p(p-4)-1$ Doppelpunkten, welche eben durch Benutzung zweier der Minimalschaaren $g_R^{(1)}$ entstanden ist (abgesehen von 8 durch die linearen Transformationen einzuführenden Constanten), noch $3p-3$ Constanten besitzt, welch' letzteres durch directe Abzählung bestätigt wird. Eine Curve der erwähnten Art genügt somit auf eine endliche Anzahl von Arten der Bedingung, dass $3p-3$ Doppelverhältnisse der Tangenten, die sich von einem ihrer vielfachen Punkte aus legen lassen, vorgeschriebene Werthe haben.

Ebenso hätte man auch die $3p-3$ absoluten Invarianten der Riemann'schen Normalform als die Moduln der aus ihr ableitbaren Classe bezeichnen können.

Für den Fall der *ungeraden* p hängen die $3p-2$ Doppelverhältnisse der Parameter λ_i der Berührungscurven des niedrigsten Büschels, welcher oben erwähnt wurde, von dem einen willkührlichen Parameter ab, der die Schaar der Basispunkte G_Q bestimmt ($\tau=1$ in der Tabelle).

Diesen Parameter kann man nun (ähnlich wie oben § 15.) dazu verwenden, um in den Berührungscurven zwei zusammenfallen zu lassen. Dies kann auf zwei verschiedene Arten geschehen, entweder so, dass in dem Büschel eine Curve vorkommt, die in 2 verschiedenen Punkten berührt, oder so, dass eine solche die gegebene Curve in 3 auf einander folgenden Punkten trifft, also osculirt. Diese Aufgaben sind also eine Verallgemeinerung der Aufgabe, die Doppeltangenten, bez. die Wendetangenten einer gegebenen Curve zu finden; auf welch letztere Aufgabe sie auch für $p=3$ direct zurückkommen. Algebraisch

führt das Problem wieder auf ein simultanes System von Gleichungen von der Form des Systems (B. § 9.), wobei indess entweder zweimal zwei Punkte oder drei Punkte als unendlich benachbart anzunehmen sind. Für den Fall $p = 5$ führen diese Aufgaben auf die Bestimmung der Werthe M_{22}, bez. M_{13} des Aufsatzes „über zwei Berührungsprobleme" (im IV. Bd. der Math. Ann. S. 548, Formel 6., und S. 547 unten) zurück, und ergeben beide 120 für die Zahl der Lösungen. — Wenn man für $p \geqq 5$ zwei solcher speciellen Büschel zur Transformation von f auf die § 13. erwähnte Normalform, eine Curve $F(p+1)$. Ordnung mit zwei $\frac{p-1}{2}$-fachen und $\frac{1}{4}(p-1)^2 - 1$ Doppelpunkten, anwendet, so erhält diese Curve die Eigenschaft, dass in dem Strahlenbüschel von jedem der beiden vielfachen Punkte aus sich je eine Gerade befindet, welche F doppelt, bez. in einem Wendepunkte berührt. Die Curve hat dann ebenfalls nur $3p - 3$ Parameter, welche hier als die Moduln der aus F abgeleiteten Classe zu betrachten sind.

Man kann noch andere dem Riemann'schen analoge Wege zur Bestimmung der Moduln einschlagen, jedoch unter Anwendung von ∞^2-Schaaren adjungirter Curven. So ist oben bereits gezeigt worden, wie man die $p - 3$ Basispunkte einer solchen Schaar auf f derart wählen kann, dass die transformirte Curve $(p+1)$. Ordnung einen Punkt besitzt, in welchem eine Gerade p-punktig trifft.

Cremona hat (in einer gemeinschaftlich mit Casorati verfassten Note: osservazioni etc. Rend. Ist. Lombard. 1869) die $p - 3$ Basispunkte so zu bestimmen versucht, dass in der transformirten Curve $(p+1)$. Ordnung von den $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten $p - 3$ solche zu Rückkehrpunkten werden. Indess sind die Gleichungen, auf welche dieses Problem führt, zu verwickelt, um die Möglichkeit und Bestimmtheit des Problems im allgemeineren Fall untersuchen zu können*).

Die oben (§ 13.) aufgestellten *Normalcurven niedrigster Ordnung* von der $(p - \pi + 2)$. Ordnung, wo p bez. $= 3\pi$, $3\pi + 1$ oder $3\pi + 2$ ist, eignen sich gleichfalls zur Definition der Moduln. Diese Curven enthalten nämlich noch:

$$\tfrac{1}{2}(p-\pi+2)(p-\pi+5) - \left\{\tfrac{1}{2}(p-\pi)(p-\pi+1) - p\right\} - 8 =$$
$$= 3p - 3 \text{ (bez. } 3p-2,\ 3p-1)$$

Parameter. Für $p = 3\pi$ sind diese Grössen direct als Moduln anzusehn. Für $p = 3\pi + 1$ (bez. $3\pi + 2$) hat man dagegen für die Wahl der ∞^2-Schaar des Transformationscurven noch einen (bez. zwei) Parameter zur Verfügung. Diese Parameter wird man wieder so bestimmen, dass in der ∞^2-Schaar eine Curve enthalten ist, welche f in 4

*) Selbst der Fall $p = 5$ kann noch nicht als auf diesem Wege erledigt angesehen werden, da, wie es scheint, in den bez. Betrachtungen der erwähnten Note ein Versehen mit untergelaufen ist.

(bez. 5) benachbarten Punkten trifft. Die Normalcurve enthält dann noch einen Punkt, in welchem eine Gerade 4- (bez. 5-) punktig berührt, eine Bedingung, die noch einen (bez. zwei) Parameter absorbirt. Für $p=5$ kommt diese Bestimmung genau auf die oben gegebene zurück. Der allgemeine Fall lässt sich aber auch auf diesem Wege nicht völlig durchführen.

§ 17.

Die zu einer Classe gehörigen Raumcurven.

Wir benutzen die hier bewiesenen Constantenzählungen noch dazu, um die Gesammtheit der Raumcurven von gegebener Ordnung R mit gegebenem Geschlecht p, welche derselben ebenen Curve $f(x)=0$ eindeutig entsprechen, welche also einer gegebenen *Classe* von algebraischen Curven zugehören, zu ermitteln.

In § 13. (am Ende) ist eine der Tabelle ($r=3$) des § 10. entnommene untere Grenze für den Grad R einer Raumcurve, welche einer ebenen Curve f von gegebenem Geschlecht entspricht, angegeben. Sei diese Bedingung erfüllt, und seien die Transformationsgleichungen durch irgend eine ∞^3-Schaar von Curven φ in folgender Weise gegeben:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x) : \varphi_4(x)\,; \qquad f(x)=0\,,$$

so hat man zu bestimmen, wie viele Constanten (ausser den $3p-3$ Parametern der Classe) durch die Transformation eingeführt werden können. Zunächst hängt jene ∞^3-Schaar der Transformationscurven ab von irgend einer der Gruppen $G_R^{(3)}$, in welchen f von einer derselben geschnitten wird. Für $R \leqq p+2$ sind adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung (n sei der Grad von f) zur Transformation zu benutzen. Es giebt aber (nach § 9., Formel (F.)) noch:

$$\tau = 4R - 3(p+4)$$

solcher Schaaren; und durch lineare Transformation sind noch 15 weitere Constanten einzuführen. Für $R > p+2$ (wo Curvenschaaren von höherer als der $(n-3)$. Ordnung benutzt werden müssen, für welche denn erst p Punkte durch die übrigen bestimmt sind) hat man die R Punkte *einer* Gruppe ganz willkührlich zu nehmen, und diese bestimmen sodann eine ∞^{R-p}-Schaar. Für die erste der 4 Transformationscurven $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ kann man daher hier alle R Punkte willkührlich annehmen, für die zweite, dritte und vierte, die aus der ∞^{R-p}-Schaar zu nehmen sind, noch je $R-p$ Punkte, welche sie dann vollständig bestimmen. Endlich kann man diesen 3 Curven noch je einen willkührlichen Factor geben. Im Ganzen hat man also ebenfalls:

$$R + 3(R-p) + 3 = 4R - 3p + 3$$

Constanten eingeführt. Oder man kann sagen: die ∞^3-Schaar hängt

ab von $(R-3)+3\,(R-p-3)$ Parametern, zu denen sodann noch die 15 Parameter der linearen Transformation hinzutreten.

Zu derselben Classe von algebraischen Curven mit allgemeinen Werthen der Moduln gehören demnach $\infty^{4R-3p+3}$ *Raumcurven vom Geschlecht* p *und der Ordnung* R $(\geqq \frac{3}{4}(p+4))$; und *überhaupt giebt es* ∞^{4R} *Raumcurven* R^{ter} *Ordnung vom Geschlecht* p $(\leqq \frac{4}{3}R-4)$.

§ 18.

Special-Punktgruppen in der Ebene.

In vielen Anwendungen, insbesondere bei den eindeutigen Abbildungen von Flächen auf Ebenen, stösst man auf Systeme einer endlichen Anzahl von Punkten der Ebene von einer solchen speciellen Lage, dass sie von Curven einer gegebenen Ordnung, welche diese Punkte zu einfachen oder vielfachen festen Punkten besitzen sollen, eine höhere Schaar zulassen, als die directe Abzählung ergeben würde. Der Restsatz, sowie die §§ 3., 4. liefern die Mittel, die Construction solcher Curvenschaaren aus den Eigenschaften einer einzelnen Curve der Schaar abzuleiten.

Ist nämlich irgend eine Curve der Schaar, oder ein irreducibeler Theil f (n. Ordnung) einer zerfallenden Curve derselben gegeben, so geht die Aufgabe zuerst in die bisher behandelte über, auf f selbst diejenigen Gruppen, bez. Specialgruppen G_Q anzugeben, in welchen f von den übrigen Curven der Schaar geschnitten wird; erst dann sind die etwa noch vorhandenen die Schaar beschränkenden Bedingungen, welche von dem Schnitt mit f unabhängig sind, zuzufügen.

Seien die Punktgruppen G_Q, in welchen f von den übrigen Curven der Schaar geschnitten wird, zu einer ∞^q-Schaar gehörig. Welcher Art dieselben auch sein mögen, ob sie durch den Schnitt von Curven höherer oder, wenn es Specialgruppen auf f sind, von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung definirt sind: die sie ausschneidenden Curven lassen sich vermöge des Restsatzes immer durch äquivalente Curven s^{ter} Ordnung ersetzen, wenn s $(\geqq n)$ die Ordnung der Curven der gesuchten Schaar bedeutet. Wie wir indess schon früher bemerkt haben, sind diese Curven C_s, deren feste Basispunkte auf f in dieser Weise bestimmt sind, noch nicht völlig gegeben; vielmehr kann man statt ihrer auch:

$$C_s + A_{s-n}\cdot f = 0$$

setzen (wo $A_{s-n}=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve $(s-n)$. Ordnung ist), ohne den Schnitt der C_s mit f zu ändern. Es ist daher möglich, den Curven C_s noch:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)$$

äussere lineare Bedingungen vorzuschreiben, welche den Schnitt mit f, soweit derselbe von beliebig und fest anzunehmenden Schnittpunkten der C_s mit f abhängt, nicht beeinflussen — den σ Constanten von A entsprechend. Erst durch Einführung von mehr als σ linearen Bedingungen wird die Mannigfaltigkeit q der Schaar in Bezug auf $f=0$ selbst reducirt.

Die Bedingungen, welche man den Curven C_s vorschreiben kann, mögen nun von der Art sein, dass dieselben einen i-fachen Punkt von f zum k-fachen ($k \geqq i$) Punkt besitzen sollen. Das System von Curven C_s, welches f in einem solchen Punkte ik-punktig treffen soll, genügt aber dann schon der Bedingung, welche der Restsatz stellt, wenn die Curven C_s den i-fachen Punkt von f ebenfalls zum i-fachen Punkt besitzen, und ausserdem jeden Zweig von f noch in $k-i$ unendlich nahen Punkten treffen*). Soll an Stelle eines derartigen Verhaltens ein eigentlicher k-facher Punkt treten, so sind noch:

$$\varrho = \tfrac{1}{2} k(k+1) - \{\tfrac{1}{2} i(i+1) + i(k-i)\} = \tfrac{1}{2}(k-i)(k-i+1)$$

äussere Bedingungen von den Curven C_s zu erfüllen.

Sei $\Sigma\varrho$, auf alle vielfachen Punkte ausgedehnt, die Gesammtzahl der äusseren Bedingungen. Ist $\Sigma\varrho \leqq \sigma$, so haben dieselben weder einen Einfluss auf die übrigen festen Basispunkte der C_s, noch auf die Gruppen der beweglichen Punkte, in welchen f von diesen Curven geschnitten wird. Ist aber $\Sigma\varrho > \sigma$, so bilden diejenigen Curven C_s, welche allen jenen Bedingungen genügen, mit Hülfe von $f=0$ nur noch eine $\infty^{q-\Sigma\varrho+\sigma}$-Schaar, welche linear aus der ∞^q-Schaar ausscheidet.

Die Gleichung der Gesammtschaar von Curven C_s, welche den oben vorgeschriebenen Bedingungen genügen, hat die Form:

$$C_s + A_{s-n} \cdot f = 0\,.$$

wo A_{s-n} noch die allgemeinste Curve $(s-n)$. Ordnung ist, welche die i-fachen Punkte von f, die für C_s k-fache Punkte sein sollen, zu $(k-i)$-fachen Punkten besitzt. Für $\Sigma\varrho \geqq \sigma$ wird A_{s-n} zu Null; die Gesammtschaar selbst ist aber *immer* eine $\infty^{q-\Sigma\varrho+\sigma}$-Schaar.

Nimmt man zur Curve f beispielsweise die hyperelliptische Curve 6. Ordnung für $p=3$, deren Gleichung die Form besitzt: $\Sigma c_i c_k \alpha_{ik}=0$ — wo die α Constante sind, i und k die Werthe 1, 2, 3 annehmen, und $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=0$ die Gleichungen von 3 durch 7 gemeinsame Punkte $a_1, a_2, \cdots a_7$ gehenden Curven 3. Ordnung sind — so kann man, für speciellere Fälle mit Hülfe der Punktepaare, in welchen f von den Curven der Schaar $c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 = 0$ getroffen wird,

*) Vgl. die Schlussbemerkungen zum Restsatz, § 1.

auf dieser Curve f Gruppen von Basispunkten für besondere Schaaren von Curven 7. Ordnung C_7 angeben. Es bedeute z. B. $\{[a_1^2]a_2^3 a_3 \cdots a_7\}$ eine Curve 7. Ordnung, welche a_1 zum Doppelpunkt mit denselben Tangenten wie f, a_2 zum 3-fachen, $a_3 \cdots a_7$ zu einfachen Punkten besitze. Dann bilden die Curven C_7:

$$\{[a_1^2]a_2 \cdots a_7\}; \quad \{[a_1^2]\,[a_2^2]a_3 \cdots a_7\}; \quad \{[a_1^2]\,[a_2^2]\,[a_3^2]\,a_4 \cdots a_7\};$$
$$\{[a_1^2]\,[a_2^2]\,[a_3^2]\,[a_4^2]a_5 \cdots a_7\},$$

bezüglich eine

$$\infty^{23}; \quad \infty^{20}; \quad \infty^{16}; \quad \infty^{12}\text{-Schaar.}$$

Dagegen bilden die Curven C_7

$$\{a_1^3 a_2 \cdots a_7\}; \; \{a_1^3 a_2^3 a_3 \cdots a_7\}; \; \{a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4 \cdots a_7\}; \; \{a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5 \cdots a_7\},$$

bezüglich eine

$$\infty^{24}; \quad \infty^{18}; \quad \infty^{13}; \quad \infty^{8}\text{-Schaar.}$$

Mit Hülfe von $f=0$ aber bilden jene Curven eine

$$\infty^{21}; \quad \infty^{17}; \quad \infty^{13}; \quad \infty^{9}\text{-Schaar;}$$

die letztern Curven dagegen eine

$$\infty^{21}; \quad \infty^{17}; \quad \infty^{13}; \quad \infty^{8}\text{-Schaar.}$$

Specieller aber giebt es eine ∞^5-Schaar von C_7 $\{a_1 \cdots a_7\}$ und durch 24 weitere feste Punkte (mit Hülfe von $f=0$ eine ∞^2-Schaar, die f gerade so trifft, wie die Schaar der c_i). Ebenso eine ∞^4-Schaar $\{a_1 \cdots a_7\}$, durch 26 weitere feste Punkte (mit Hülfe von $f=0$ eine ∞^1-Schaar). Dies bleibt ungeändert, wenn ein Theil der weiteren festen Punkte so in die Punkte a_i hineinrückt, dass man Curven $\{[a_1^2], [a_2^2], \cdots\}$ erhält. Und auch hier ändert sich wieder der Schnitt der C_7 mit f nicht, wenn sodann einer, zwei oder drei der Punkte $[a_1^2]$, $[a_2^2]$, $\cdots$ zu dreifachen Punkten a_1^3, a_2^3 $\cdots$ werden; wohl aber, sobald dies noch bei einem vierten Punkte eintritt.

Im September 1873.

Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben.

Von W. Göring in Rudolstadt.

Nachstehende Untersuchungen über die Jacobi'sche Thetafunction sind hervorgegangen durch die Anregung, welche ich aus den Arbeiten im mathematischen Seminar zu Breslau unter Leitung des Herrn Prof. Dr. Schröter geschöpft habe. Diese ganze Untersuchung hat ein ein doppeltes Ziel im Auge.

In seinem handschriftlichen Nachlasse hat Gauss gewisse unendliche Reihen und Producte untersucht, mit Hülfe deren er zu einer Reihe sehr eleganter und eigenthümlicher Beziehungen zwischen Grössen gelangt, die er die neuen Transcendenten nannte (vgl. Gauss' Werke, herausgegeben von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen Bd. III, S. 436—479).

Es stellt sich nun heraus, dass diese Grössen nichts anderes sind als die Jacobi'schen Functionen $\vartheta_3(0, q)$, $\vartheta(0, q)$ und $\vartheta_2(0, q)$, resp. diese Functionen in der Weise verändert, dass man statt q q^3 resp. q^5 setzt. Dabei ist nicht möglich, dass Gauss diese Jacobi'schen Functionen schon gekannt hat, denn seine Abhandlungen tragen die Zeitangaben 1827 August 6 und August 29, während die Fund. nov. bekanntlich 1829 erschienen sind. Es lassen sich jedoch diese Formeln, welche Gauss meist zusammenhanglos und ohne Beweis angegeben hat, aus der Theorie der Thetafunction ableiten. Durch die gütige Erlaubniss des Herrn Prof. Dr. Schröter ist es mir vergönnt, eine einheitliche und an manchen Stellen erweiterte Darstellung dieser Beziehungen, welche den Hauptgegenstand der Arbeiten des mathematischen Seminars ausmachten, zugleich mit meinen eigenen Resultaten, die in dieser Richtung eine Erweiterung der Gauss'schen Formeln für die Sieben anstreben, zu veröffentlichen.

In diese ganze Entwicklung gehen aber fortwährend die Theilwerthe der ϑ-Functionen ein, und diese bilden den anderen Theil der Untersuchungen. Es haben bekanntlich die Jacobi'schen Functionen eine reelle Periode (π) und eine imaginäre ($i \log q$), wenn man bei letzterer von dem dabei auftretenden Exponentialfactor absieht. Dann

treten für die reelle Periode die Grössen $\vartheta_3\left(\frac{\mu\pi}{\alpha}, q\right)$, für die imaginäre Periode die Grössen $\vartheta_3\left(\frac{\mu\varpi}{\alpha}, q\right)$ oder $\vartheta_3(\mu\varpi, q^\alpha)$ als Theilwerthe auf, wenn $\varpi = i \log q$ und man für μ die Reihe der ganzen Zahlen $1, 2 \cdots \frac{\alpha-1}{2}$ setzt, wobei α eine ungerade Zahl sein soll. Alle übrigen Theilwerthe $\vartheta_3(\varrho\cdot\frac{\mu\pi}{\alpha}, q)$ und $\vartheta_3(\varrho\frac{\mu\varpi}{\alpha}, q)$ lassen sich mit Hülfe der bekannten Periodenformeln auf diese $\frac{\alpha-1}{2}$ Grundwerthe reduciren. Die Untersuchung geht nun dahin, den Zusammenhang dieser Grössen mit jenen Gauss'schen Fundamentalwerthen $\vartheta(0,q^\alpha)$, $\vartheta_2(0,q^\alpha)$, $\vartheta_3(0,q^\alpha)$, $\vartheta(0,q)$, $\vartheta_2(0,q)$, $\vartheta_3(0,q)$ aufzudecken, wo bei Gauss einmal $\alpha=3$, sodann $\alpha=5$ ist. Nachdem ich auch von diesen Grössen die Beziehungen bei der Siebentheilung (also für $\alpha=7$) aufgesucht und die vollkommene Analogie mit den Resultaten der Drei- und Fünf-Theilung entdeckt hatte, liess sich wohl ein allgemeines, dem zu Grunde liegendes Gesetz vermuthen. In der That werden wir dann durch eine für alle ungeraden Zahlen gültige Untersuchung finden, dass sich die Producte aus allen Theilwerthen immer auf eine elegante und einfache Weise durch die Gauss'schen Fundamentalwerthe darstellen lassen.

In Bezug auf alle diese Beziehungen werden wir hier vor uns ein Gebiet eröffnet finden, das in der höheren Analysis ein ebenso abgeschlossenes Ganze ausmacht, wie in den Elementen der Mathematik die Trigonometrie. Ebenso wie in dieser für die sin- und cos-Reihen etc. werden wir hier für die Jacobi'schen Transcendenten gewisse charakteristische Abhängigkeiten bestehend finden, nur dass von beiden Gebieten das unsere eine viel grössere Reichhaltigkeit besitzt, da wir es hier mit Functionen von doppelter Periode zu thun haben.

§ 1.

Zusammenstellung des gesammten zu Grunde liegenden Materials.

Es sind von Jacobi folgende 4 Functionen eingeführt worden:

$$\left|\begin{aligned}\vartheta(x,q) &= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x\mp\cdots\\ &= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{hh}\cos 2hx\\ &= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{hh} e^{2hix}\\ &= \prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})\end{aligned}\right.$$

$$
(1)\begin{cases}
\vartheta_1(x,q)=2q^{\frac14}\sin x-2q^{\frac94}\sin 3x+2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x-2q^{\frac{49}{4}}\sin 7x\pm\cdots\\
\quad=\sum\limits_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{\frac14(2h+1)^2}\sin(2h+1)x\\
\quad=\frac{1}{i}\sum\limits_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{\frac14(2h+1)^2}e^{(2h+1)ix}\\
\quad=2q^{\frac14}\sin x\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1-2q^{2h}\cos 2x+q^{4h})\\
\vartheta_2(x,q)=2q^{\frac14}\cos x+2q^{\frac94}\cos 3x+2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x+2q^{\frac{49}{4}}\cos 7x+\cdots\\
\quad=\sum\limits_{h=-\infty}^{h=+\infty}q^{\frac14(2h+1)^2}\cos(2h+1)x\\
\quad=\sum\limits_{h=-\infty}^{h=+\infty}q^{\frac14(2h+1)^2}e^{(2h+1)ix}\\
\quad=2q^{\frac14}\cos x\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1+2q^{2h}\cos 2x+q^{4h})\\
\vartheta_3(x,q)=1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x+\cdots\\
\quad=\sum\limits_{h=-\infty}^{h=+\infty}q^{hh}\cos 2hx\\
\quad=\sum\limits_{h=-\infty}^{h=+\infty}q^{hh}e^{2hix}\\
\quad=\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1+2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})
\end{cases}
$$

Es bedeutet hierin $i=\sqrt{-1}$ und $\sum\limits_{h=-\infty}^{h=+\infty}f(h)$, dass in $f(h)$ für h die Werthe aller ganzen positiven und negativen Zahlen zu setzen und die so erhaltenen Glieder sämmtlich zu addiren sind.

Es ergeben sich hieraus die Specialformeln:

$$
\begin{cases}
\vartheta(0,q)=\sqrt{\frac{2K\varkappa_1}{\pi}}=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}\mp\cdots\\
\quad=\sum\limits_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{hh}\\
\quad=\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1-q^{2h-1})^2\\
\quad=\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}\frac{1-q^h}{1+q^h}
\end{cases}
$$

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta_1(0,q) &= 0\\
\vartheta_2(0,q) &= \sqrt{\frac{2K\varkappa}{\pi}} = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + \cdots\\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2}\\
&= 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1+q^{2h})^2\\
&= 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}}\\
\vartheta_3(0,q) &= \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots\\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{hh}\\
&= \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1+q^{2h})^2\\
&= \prod_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}} \cdot \frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\\
\vartheta_1'(0,q) &= \left[\frac{d\,\vartheta_1(x,q)}{dx}\right]_{x=0} = \vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Reihen in (1), in denen $q = e^{-\frac{\pi K_1}{K}}$, haben bekanntlich eine doppelte Periode, nämlich π und $i \log q$. Setzen wir der Kürze wegen $i \log = \varpi$, so haben wir die bekannten Beziehungen, in denen m eine beliebige ganze Zahl ist:

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta\,(x+m\pi, q) &= \vartheta\,(x,q)\\
\vartheta_1(x+m\pi, q) &= (-1)^m \vartheta_1(x,q)\\
\vartheta_2(x+m\pi, q) &= (-1)^m \vartheta_2(x,q)\\
\vartheta_3(x+m\pi, q) &= \vartheta_3(x,q)\\
q^{mm} e^{2mix} \vartheta\,(x-m\varpi, q) &= (-1)^m \vartheta\,(x,q)\\
q^{mm} e^{2mix} \vartheta_1(x-m\varpi, q) &= (-1)^m \vartheta_1(x,q)\\
q^{mm} e^{2mix} \vartheta_2(x-m\varpi, q) &= \vartheta_2(x,q)\\
q^{mm} e^{2mix} \vartheta_3(x-m\varpi, q) &= \vartheta_3(x,q)\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Ferner ist bekannt, dass diese 4 Functionen sämmtlich in einander übergehen, wenn man ihre Argumente um die Vielfachen der halben Periode vermehrt oder vermindert; denn es ist:

$$(4)\quad\begin{cases}
\vartheta\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi,q\right) = \vartheta_3(x,q)\\
\vartheta_1\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi,q\right) = (-1)^m\,\vartheta_2(x,q)\\
\vartheta_2\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi,q\right) = (-1)^{m+1}\,\vartheta_1(x,q)\\
\vartheta_3\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi,q\right) = \vartheta(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}\,\vartheta\left(x-\frac{2m+1}{2}\varpi,q\right) = i(-1)^m\,\vartheta_1(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_1\left(x-\frac{2m+1}{2}\varpi,q\right) = i(-1)^m\,\vartheta(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_2\left(x-\frac{2m+1}{2}\varpi,q\right) = \vartheta_3(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_3\left(x-\frac{2m+1}{2}\varpi,q\right) = \vartheta_2(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}\,\vartheta\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi-\frac{2n+1}{2}\varpi,q\right) = \vartheta_2(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_1\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi-\frac{2n+1}{2}\varpi,q\right) = (-1)^m\,\vartheta_3(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_2\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi-\frac{2n+1}{2}\varpi,q\right) = i(-1)^{m+n+1}\,\vartheta(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_3\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi-\frac{2n+1}{2}\varpi,q\right) = i(-1)^n\,\vartheta_1(x,q).
\end{cases}$$

Diese Formeln zeigen auch, wie schliesslich alle 4 Functionen sich auf eine einzige, z. B. $\vartheta_3(x,q)$, welche die einfachste ist, zurückführen lassen.

Ferner ist zu beachten, dass:

$$(5)\quad\begin{cases}
\vartheta(-x,q) = \vartheta(x,q)\\
\vartheta_1(-x,q) = -\vartheta_1(x,q)\\
\vartheta_2(-x,q) = \vartheta_2(x,q)\\
\vartheta_3(-x,q) = \vartheta_3(x,q).
\end{cases}$$

Aus den Reihen (1) ergeben sich ferner folgende bekannte, später sehr häufig angewendete Beziehungen:

$$(6)\quad\begin{cases}
2\,\vartheta_3(2x,q^4) = \vartheta_3(x,q) + \vartheta(x,q)\\
2\,\vartheta_2(2x,q^4) = \vartheta_3(x,q) - \vartheta(x,q).
\end{cases}$$

Wir legen nun ferner folgende wichtige Formel zu Grunde:

$$\vartheta_3(tx+sry,q^r)\,\vartheta_3(sx-tpy,q^p)$$

$$(7)\quad =\sum_{\mu=0}^{\mu=rs^2+pt^2-1} q^{r\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sry)}\,\vartheta_3\left\{(rs^2+pt^2)x-rpt\mu\varpi,q^{rp(rs^2+pt^2)}\right\}$$
$$\cdot\,\vartheta_3\left\{(rs^2+pt^2)y-rs\mu\varpi,q^{rs^2+pt^2}\right\}$$

(vgl. Schröter, Ueber die Entwicklung der Potenzen der elliptischen Transcendenten ϑ und die Theilung dieser Functionen; Breslau 1855, S. 6).

Bedingung ist hierin, dass r, s, t, p keinen gemeinsamen Factor haben, sonst können sie beliebige ganze Zahlen sein.

Als specielle Fälle fliessen aus dieser Formel:

$$(8)\quad \vartheta_3(x,q^\alpha,\vartheta_3(y,q^\beta)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha+\beta-1} q^{\alpha\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\alpha\mu\varpi,q^{\alpha+\beta})$$
$$\cdot\,\vartheta_3\left\{\beta x-\alpha y-\alpha\beta\mu\varpi,q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)}\right\}$$

und aus dieser, wenn λ eine ungerade Zahl bedeutet:

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^\lambda)&=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1})\\
&\quad\cdot\,\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)})\\
\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^\lambda)&=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1})\\
&\quad\cdot\,\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)})\\
\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^\lambda)&=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1})\\
&\quad\cdot\,\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)})\\
\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^\lambda)&=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1})\\
&\quad\cdot\,\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)}).
\end{aligned}\right.$$

ferner:

$$\vartheta_3(tx+sy,q)\,\vartheta_3(sx-ty,q)$$

$$(10)\quad =\sum_{\mu=0}^{\mu=s^2+t^2-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3\left\{(s^2+t^2)x-t\mu\varpi,q^{s^2+t^2}\right\}$$
$$\cdot\,\vartheta_3\left\{(s^2+t^2)y-s\mu\varpi,q^{s^2+t^2}\right\},$$

endlich noch die beiden Formeln:

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(x,q^p)&=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\lambda\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(px-p\mu\lambda\varpi,q^{\lambda pp})\\
\vartheta_3(x,q)&=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(px-p\mu\varpi,q^{pp}),
\end{aligned}\right.$$

worin p und λ ganz beliebige ganze Zahlen sind (vgl. die schon angeführte Schrift S. 4 und 6, sowie: Schröter, de aequationibus modularibus, Königsberg 1854, S. 6—8).

Es fliessen aus diesen Formeln eine Menge bekannter Beziehungen für den speciellen Fall, dass $\alpha = 1$, $\beta = 1$, die, da sie im Folgenden fortwährend benutzt werden, hier zusammengestellt sind.

Von diesen Formeln sind einige schon von Jacobi angegeben worden (Crelle Bd. 3, S. 305, Bd. 26, S. 103), die übrigen finden sich in der zuletzt citirten Abhandlung (de aequ. mod. S. 9—11), oder sind doch unmittelbare Folgerungen daraus. Zunächst folgt aus (9) für $\lambda = 1$ das bekannte System von 24 Formeln für die Producte je zweier ϑ-Functionen, von denen wir folgende acht als die einfachsten und wichtigsten anführen:

$$(12)\quad \begin{cases} \vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) = \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2) + \vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2) \\ \vartheta\,(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) = \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2) - \vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2) \\ \vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q) = \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2) + \vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2) \\ \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2) - \vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2) \\ \vartheta\,(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) = \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2) + \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2) \\ \vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) = \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2) - \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2) \\ \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q) = \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2) + \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2) \\ \vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^3) - \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2). \end{cases}$$

Hieraus gehen folgende wichtige specielle Formeln hervor:

$$(13)\quad \begin{cases} \vartheta\,(x,q)\,\vartheta_3(x,q) = \vartheta\,(0,q^2)\,\vartheta\,(2x,q^2) \\ \vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(x,q) = \vartheta\,(0,q^2)\,\vartheta_1(2x,q^2) \\ 2\,\vartheta_3(x,q^2)\,\vartheta_2(x,q^2) = \vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(x,q) \\ 2\,\vartheta\,(x,q^2)\,\vartheta_1(x,q^2) = \vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(x,q), \end{cases}$$

ferner für $x = y = 0$

$$(14)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta_3^2(0,q^2) = \vartheta_3^2(0,q) + \vartheta^2(0,q) \\ 2\,\vartheta_2^2(0,q^2) = \vartheta_3^2(0,q) - \vartheta^2(0,q) \\ \vartheta^2(0,q^2) = \vartheta(0,q)\cdot\vartheta_3(0,q) \\ \vartheta_3^2(0,q^{\frac{1}{2}}) = \vartheta_3^2(0,q) + \vartheta_2^2(0,q) \\ \vartheta^2(0,q^{\frac{1}{2}}) = \vartheta_3^2(0,q) - \vartheta_2^2(0,q) \\ \vartheta_2^2(0,q^{\frac{1}{2}}) = 2\,\vartheta_2(0,q)\cdot\vartheta_3(0,q), \end{cases}$$

ferner:

$$(15)\quad \begin{cases} \vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta_2^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta\,(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^2) \\ \vartheta^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta_3^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta\,(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^2) \\ 2\,q^{\frac{1}{8}}\,\vartheta^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = 2\,q^{\frac{1}{8}}\,\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = \vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta\,(0,q^{\frac{1}{2}}) \\ 2\,q^{\frac{1}{8}}\,\vartheta_3^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = 2\,q^{\frac{1}{8}}\,\vartheta_2^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = \vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Die in (15) untersuchten Reihen sind folgende:

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_2\left(\tfrac{\varpi}{4}, q\right) &= \vartheta_3\left(\tfrac{\varpi}{4}, q\right) = 1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{6}{2}} + q^{\frac{10}{2}} + q^{\frac{15}{2}} + q^{\frac{21}{2}} + \cdots \\
i\,\vartheta_1\left(\tfrac{\varpi}{4}, q\right) &= \vartheta\left(\tfrac{\varpi}{4}, q\right) = 1 - q^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{6}{2}} + q^{\frac{10}{2}} - q^{\frac{15}{2}} - q^{\frac{21}{2}} + \cdots \\
\vartheta\left(\tfrac{\pi}{4}, q\right) &= \vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{4}, q\right) = 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + 2q^{64} \mp \cdots \\
\vartheta_1\left(\tfrac{\pi}{4}, q\right) &= \vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{4}, q\right) = \sqrt{2}\left(q^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{9}{4}} - q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + q^{\frac{81}{4}} - \cdots\right).
\end{aligned}\right.
$$

Bemerkenswerth ist in den ersten beiden Reihen das Fortschreiten der Exponenten nach den Triangularzahlen. Auch setzen wir die Producte von 4 ϑ-Functionen voraus, welche resultiren, wenn man in (12) je 2 Gleichungen multiplicirt und dann umformt. Ist:

$$
\begin{aligned}
2x' &= x + y + z + \omega \\
2y' &= x - y + z - \omega \\
2z' &= x + y - z - \omega \\
2\omega' &= x - y - z + \omega
\end{aligned}
$$

und bezeichnen wir zur Abkürzung das Product

$$\vartheta_3(x, q)\ \vartheta_3(y, q)\ \vartheta_3(z, q)\ \vartheta_3(\omega, q)$$

mit

$$\vartheta_3(x, y, z, w),$$

so ist:

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(x,y,z,\omega) + \vartheta(x,y,z,\omega) &= \vartheta_3(x',y',z',\omega') + \vartheta(x',y',z',\omega') \\
\vartheta_3(x,y,z,\omega) - \vartheta(x,y,z,\omega) &= \vartheta_1(x',y',z',\omega') + \vartheta_2(x',y',z',\omega') \\
\vartheta_1(x,y,z,\omega) + \vartheta_2(x,y,z,\omega) &= \vartheta_3(x',y',z',\omega') - \vartheta(x',y',z',\omega') \\
\vartheta_1(x,y,z,\omega) - \vartheta_2(x,y,z,\omega) &= \vartheta_1(x',y',z',\omega') - \vartheta_2(x',y',z',\omega').
\end{aligned}\right.
$$

Vermehrt man in diesen Formeln je 2 Argumente um $\frac{\pi}{2}$, oder um $\frac{\varpi}{2}$, oder auch um $\frac{\pi}{2} + \frac{\varpi}{2}$, so ergeben sich eine grosse Menge von Beziehungen, unter denen folgende 3 bemerkenswerth sind:

$$
(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta(x,z)\,\vartheta_3(y,\omega) - \vartheta_3(x,z)\,\vartheta(y,\omega) &= \vartheta_2(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega') + \vartheta_1(x',y')\,\vartheta_2(z',\omega') \\
\vartheta_3(x,z)\,\vartheta_2(y,\omega) - \vartheta_2(x,z)\,\vartheta_3(y,\omega) &= \vartheta_1(x',y')\,\vartheta(z',\omega') + \vartheta(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega') \\
\vartheta(x,z)\,\vartheta_2(y,\omega) - \vartheta_2(x,z)\,\vartheta(y,\omega) &= \vartheta_1(x',y')\,\vartheta_3(z',\omega') + \vartheta_3(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega').
\end{aligned}\right.
$$

Von besonderer Wichtigkeit und Einfachheit ist jedoch eine Formel, die man erhält, wenn man in (17) setzt statt x, y, z, ω resp. $x + \frac{\pi}{2}$, $x + \frac{\pi}{2} + \frac{\varpi}{2}$, $x + \frac{\varpi}{2}$, x. Dann ist:

$$(19)\quad 2\vartheta(x,q)\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(x,q) = \vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_1(2x,q).$$

Da wir sie später brauchen werden, so führen wir noch folgende Formeln an, die aus (17) und (18) durch Gleichsetzung zweier Argumente hervorgehen, und die in gewisser Weise den Beziehungen in (12) entsprechen:

$$(20)\begin{cases} \vartheta^2(0,q)\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q)=\vartheta_3^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q)-\vartheta_2^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q) \\ \qquad =\vartheta^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q)-\vartheta_1^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_2^2(0,q)\vartheta_2(x+y,q)\vartheta_2(x-y,q)=\vartheta_3^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q)-\vartheta^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q) \\ \qquad =\vartheta_2^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q)-\vartheta_1^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-y,q)=\vartheta_3^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q)+\vartheta_1^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \qquad =\vartheta_2^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q)+\vartheta^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q), \end{cases}$$

ferner:

$$(21)\begin{cases} \vartheta^2(0,q)\vartheta_1(x+y,q)\vartheta_1(x-y,q)=\vartheta_3^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q)-\vartheta_2^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q) \\ \qquad =\vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q)-\vartheta^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_2^2(0,q)\vartheta_1(x+y,q)\vartheta_1(x-y,q)=\vartheta^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q)-\vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q) \\ \qquad =\vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta_2^2(y,q)-\vartheta_2^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\vartheta_1(x+y,q)\vartheta_1(x-y,q)=\vartheta^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q)-\vartheta_2^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q) \\ \qquad =\vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta_3^2(y,q)-\vartheta_3^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\,\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q)+\vartheta^2(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) \\ \qquad =\vartheta^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q)+\vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q), \end{cases}$$

endlich:

$$(22)\begin{cases} 2\,\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q)\vartheta_3(x,q)\vartheta_3(y,q) \\ \qquad =\vartheta(0,q)\vartheta_3(0,q)\{\vartheta(x+y,q)\vartheta_3(x-y,q)+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q)\} \\ 2\vartheta_2(x,q)\vartheta_2(y,q)\vartheta_3(x,q)\vartheta_3(y,q) \\ \qquad =\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q\{\vartheta_2(x+y,q)\vartheta_3(x-y,q)+\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_2(x-y,q)\} \\ 2\,\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q)\vartheta_2(x,q)\vartheta_2(y,q) \\ \qquad =\vartheta(0,q)\vartheta_2(0,q)\{\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q)+\vartheta(x+y,q)\vartheta_2(x-y,q)\}. \end{cases}$$

Aus allen diesen Formeln leuchtet noch ein, dass:

$$(23)\qquad \vartheta^4(0,q)+\vartheta_2^4(0,q)=\vartheta_3^4(0,q),$$

welche Gleichung auch schon aus (2) sich bietet, da sie nichts anderes aussagt, als dass $k^2+k_1^2=1$, was a priori klar ist.

Ausser den aufgestellten Beziehungen sind noch von Wichtigkeit die Jacobi'schen Uebergangsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode. Ist $p=\log q$, also da

$$q=e^{-\frac{\pi K_1}{K}},\quad p=-\frac{\pi K_1}{K},$$

so ist:

$$(24)\quad \begin{cases} \vartheta\,(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\ \vartheta_2\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_1\,(x, e^p) = i\sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\ \vartheta_1\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_2\,(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\ \vartheta\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_2\,(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\ \vartheta_3\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right), \end{cases}$$

Dieses ist das gesammte den nachfolgenden Untersuchungen zu Grunde gelegte Material.

Gauss hat nun die Reihen, von denen er ausgeht und die sich bei der Vergleichung als identisch mit den Reihen in (2) erweisen, mit P, Q, R, p, q, r bezeichnet, dergestalt dass:

$$(25)\quad \begin{cases} \vartheta_3\,(0, q^\alpha) = P\,, & \vartheta\,(0, q^\alpha) = Q\,, & \vartheta_2\,(0, q^\alpha) = R \\ \vartheta_3\,(0, q) = p\,, & \vartheta\,(0, q) = q\,, & \vartheta_2\,(0, q) = r\,, \end{cases}$$

wo bei Gauss das eine Mal $\alpha = 3$, das andere Mal $\alpha = 5$ ist. Wir werden diese Bezeichnung in der ganzen Untersuchung beibehalten, da sie in der That eine sehr anschauliche Darstellung der Beziehungen ermöglicht. Eine Verwechslung der Function $q = \vartheta\,(0, q)$ und des Moduls q der Reihen ist dabei nicht gut möglich.

§ 2.

Die Dreitheilung.

Gemäss § 1. (25) ist in dieser Untersuchung bezeichnet:

$$\begin{array}{lll} \vartheta_3\,(0, q^3) = P\,, & \vartheta\,(0, q^3) = Q\,, & \vartheta_2\,(0, q^3) = R \\ \vartheta\,\ (0, q) \ = p\,, & \vartheta\,(0, q) \ = q\,, & \vartheta_2\,(0, q) \ = r\,. \end{array}$$

Die hier zu untersuchenden Reihen, wie sie aus § 1. (1) und (2) hervorgehen, sind dann folgende:

$$(1)\quad \begin{cases} p = \vartheta_3\,(0, q\,) = 1 + 2\,q + 2\,q^4 + 2\,q^9 + 2\,q^{16} + \cdots \\ q = \vartheta\ \,(0, q\,) = 1 - 2\,q + 2\,q^4 - 2\,q^9 + 2\,q^{16} \mp \cdots \\ r = \vartheta_2\,(0, q\,) = \phantom{1 + {}} 2\,q^{\frac14} + 2\,q^{\frac94} + 2\,q^{\frac{25}{4}} + 2\,q^{\frac{49}{4}} + \cdots \\ P = \vartheta_3\,(0, q^3) = 1 + 2\,q^3 + 2\,q^{12} + 2\,q^{27} + 2\,q^{48} + \cdots \\ Q = \vartheta\ \,(0, q^3) = 1 - 2\,q^3 + 2\,q^{12} - 2\,q^{27} + 2\,q^{48} \mp \cdots \\ R = \vartheta_2\,(0, q^3) = \phantom{1 + {}} 2\,q^{\frac34} + 2\,q^{\frac{27}{4}} + 2\,q^{\frac{75}{4}} + 2\,q^{\frac{147}{4}} + \cdots \end{cases}$$

$$(2)\left\{\begin{aligned}
q^{\frac{1}{3}}\vartheta_3(\varpi,q^3) &= q^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{4}{3}}+q^{\frac{16}{3}}+q^{\frac{25}{3}}+q^{\frac{49}{3}}+q^{\frac{64}{3}}+q^{\frac{100}{3}}+\cdots\\
q^{\frac{1}{3}}\vartheta\,(\varpi,q^3) &= q^{\frac{1}{3}}-q^{\frac{4}{3}}-q^{\frac{16}{3}}+q^{\frac{25}{3}}+q^{\frac{49}{3}}-q^{\frac{64}{3}}-q^{\frac{100}{3}}\pm\cdots\\
q^{\frac{1}{3}}\vartheta_2(\varpi,q^3) &= q^{\frac{1}{12}}+q^{\frac{25}{12}}+q^{\frac{49}{12}}+q^{\frac{121}{12}}+q^{\frac{169}{12}}+q^{\frac{289}{12}}+\cdots\\
i\,q^{\frac{1}{3}}\vartheta_1(\varpi,q^3) &= q^{\frac{1}{12}}-q^{\frac{25}{12}}-q^{\frac{49}{12}}+q^{\frac{121}{12}}+q^{\frac{169}{12}}-q^{\frac{289}{12}}\mp\cdots\\
\vartheta_3\left(\frac{\pi}{3},q\right) &= 1-q-q^4+2q^9-q^{16}-q^{25}+2q^{36}-q^{49}\mp\cdots\\
\vartheta\,\left(\frac{\pi}{3},q\right) &= 1+q-q^4-2q^9-q^{16}+q^{25}+2q^{36}+q^{49}\mp\cdots\\
\vartheta_2\left(\frac{\pi}{3},q\right) &= q^{\frac{1}{4}}-2q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}-2q^{\frac{81}{4}}+q^{\frac{121}{4}}\pm\cdots\\
\vartheta_1\left(\frac{\pi}{3},q\right) &= \sqrt{3}\left\{q^{\frac{1}{4}}-q^{\frac{25}{4}}-q^{\frac{49}{4}}+q^{\frac{121}{4}}+q^{\frac{169}{4}}-\cdots\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Es soll also nun nachgewiesen werden, dass sich die eigenthümlichen Reihen (2) durch die Reihen (1) darstellen lassen, und es sollen ferner die Beziehungen untersucht werden, die zwischen den Reihen (1) selbst bestehen. Diese letzteren Beziehungen sind es, die von Gauss ohne Beweis angegeben worden sind.

Es lassen sich 2 wichtige Systeme von Formeln aufstellen. Setzen wir nämlich in § 1. (9) $\lambda = 2$, so ist:

$$(3)\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^2) = {} & \vartheta_3(x+y,q^3)\,\vartheta_3(2x-y,q^6)\\
&+q\,e^{2ix}\vartheta_3(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta_3(2x-y-2\varpi,y^6)\\
&+q^4e^{4ix}\vartheta_3(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta_3(2x-y-4\varpi,q^6)\\
\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^2) = {} & \vartheta_2(x+y,q^3)\,\vartheta_3(2x-y,q^6)\\
&+q\,e^{2ix}\vartheta_2(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta_3(2x-y-2\varpi,q^6)\\
&+q^4e^{4ix}\vartheta_2(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta_3(2x-y-4\varpi,q^6)\\
\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^2) = {} & -\vartheta_2(x+y,q^3)\,\vartheta\,(2x-y,q^6)\\
&+q\,e^{2ix}\vartheta_2(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta\,(2x-y-2\varpi,q^6)\\
&-q^4e^{4ix}\vartheta_2(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta\,(2x-y-4\varpi,q^6)\\
\vartheta\,(x,q)\,\vartheta\,(y,q^2) = {} & \vartheta_3(x+y,q^3)\,\vartheta\,(2x-y,q^6)\\
&-q\,e^{2ix}\vartheta_3(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta\,(2x-y-2\varpi,q^6)\\
&+q^4e^{4ix}\vartheta_3(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta\,(2x-y-4\varpi,q^6)\,.
\end{aligned}\right.$$

Ein weit eleganteres System von Beziehungen ergiebt sich aber, wenn in § 1. (9) $\lambda = 3$ gesetzt wird, und je 2 der dortigen Gleichungen addirt, resp. subtrahirt werden. Rechts erhält man scheinbar die Moduln q^4 und q^{12}, allein diese gehen mit Hülfe der Formeln § 1. (6) in die Moduln q und q^3 über. Wir erhalten dann:

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad+\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
&\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)=\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
&\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
&\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
&\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
&\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
&\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)+\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad+\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
&\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)-\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad-\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
&\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad+\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
&\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad-\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
&\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
&\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,y)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
&\qquad\qquad-\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)
\end{aligned}\right.$$

(vgl. Schröter, de aequ. mod. S. 13 und 14).

Aus (4) resultiren zunächst für $x=0$ und $y=\varpi$, ferner für $x=\frac{\pi}{3}$ und $y=0$ nach Anwendung der Formeln § 1. (3) und für $x=0$ und $y=0$ folgende 3 Beziehungen:

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&q\vartheta(\varpi,q^3)-r\vartheta_2(\varpi,q^3)+p\vartheta_3(\varpi,q^3)=0\\
&Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)=0\\
&qQ+rR-pP=0\,.
\end{aligned}\right.$$

Die letzte Gleichung involvirt bekanntlich die schon von Legendre angegebene Modulargleichung für die Tranformation dritter Ordnung, nämlich:

$$\sqrt{\varkappa\lambda}+\sqrt{\varkappa_1\lambda_1}=1$$

(vgl. Schröter a. a. O. S. 14).

Wir gehen nun aus von der zweiten Formel in (3) und setzen hierein für y: $y+\frac{\pi}{2}-\frac{\varpi}{2}$, so ist mit Hülfe von § 1. (3) und (4):

$$\begin{aligned}-i e^{-iy} q^{-\frac{1}{2}} \vartheta_2(x,q)\, \vartheta(y,q^2) = &-\vartheta_1(x+y-\varpi,q^3)\, \vartheta(2x-y+\varpi,q^6)\\ &-q\, e^{2ix}\, \vartheta_1(x+y-2\varpi,q^3)\, \vartheta(2x-y-\varpi,q^6)\\ &-q^4 e^{4ix}\, \vartheta_1(x+y-3\varpi,q^3)\, \vartheta(2x-y-3\varpi,q^6).\end{aligned}$$

Hierein setzen wir $x=\varpi$, $y=0$, dann ist nach § 1. (4):

$$\vartheta(\varpi, q^6) = i q^{\frac{1}{2}}\, \vartheta_1(2\varpi, q^6),$$

also:

$$(6^a)\qquad \vartheta_2(0,q)\, \vartheta(0,q^2) = -2\, q\, \vartheta_1(\varpi,q^3)\, \vartheta_1(2\varpi,q^6),$$

also mit Hülfe von § 1. (13):

$$(6^b)\qquad \vartheta_2(0,q)\, \vartheta(0,q^2)\, \vartheta(0,q^6) = -2\, q\, \vartheta_1^2(\varpi,q^3)\, \vartheta_2(\varpi,q^3).$$

Setzt man in (6^a) statt q $q^{\frac{1}{2}}$ und wendet § 1. (4) und (13) an, so folgt:

$$(6^c)\qquad \tfrac{1}{2}\, \vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}})\, \vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}}) = -2\, q\, \vartheta_1^2(\varpi,q^3)\, \vartheta(\varpi,q^3).$$

Multipliciren wir (6^b) mit $\vartheta_2(0,q)$, (6^c) mit $\vartheta(0,q)$, subtrahiren und beachten (5), so ist:

$$\begin{aligned}(6^d)\quad &-2q\,\vartheta_3(0,q)\, \vartheta_1^2(\varpi,q^3)\, \vartheta_3(\varpi,q^3)\\ &= \vartheta_2^2(0,q)\, \vartheta(0,q^2)\, \vartheta(0,q^6) - \tfrac{1}{2}\vartheta^2(0,q)\, \vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}}) = A.\end{aligned}$$

Es lässt sich nun A auf doppelte Art darstellen. Setzt man einmal direct die Werthe aus § 1. (14) für $\vartheta(0,q^2)$ etc. ein, so ist:

$$A = r^2 \sqrt{p\,q\,P\,Q} - q^2 \sqrt{r\,p\,R\,P}.$$

Andrerseits aber ist:

$$\begin{aligned}\vartheta(0,q^2)\, \vartheta(0,q^6) &= \vartheta_3(0,q^2)\, \vartheta_3(0,q^6) - \vartheta_2(0,q^2)\, \vartheta_2(0,q^6) \quad \text{aus (5)}\\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}}) + \vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta(0,q^{\frac{3}{2}})\right\} \quad \text{nach § 1. (6)}\end{aligned}$$

und

$$\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}}) = \vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}}) - \vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta(0,q^{\frac{3}{2}}) \quad \text{aus (5).}$$

Setzt man dieses in A ein, so wie die Werthe für $\vartheta_2^2(0,q)$ und $\vartheta^2(0,q)$ aus § 1. (14), so ist:

$$A = \tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3^2(0,q^{\frac{1}{2}}) + \vartheta^2(0,q^{\frac{1}{2}})\right\} \left\{\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta(0,q^{\frac{3}{2}}) - \vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}})\right\}.$$

Da nun aus § 1. (14):

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta(0,q^{\frac{3}{2}}) - \vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\, \vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}})\right\}\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2(p^2P^2 - r^2R^2 - q^2Q^2)} = \sqrt{r\,q\,R\,Q},\end{aligned}$$

da nach (5):

$$p^2P^2 = q^2Q^2 + r^2R^2 + 2\,rqQR\,,$$

so folgt schliesslich:

$$A = p^2\sqrt{rqRQ}\,.$$

Also haben wir jetzt aus (6^d) die Identität

$$r^2\sqrt{pqPQ} - q^2\sqrt{rpRP} = p^2\sqrt{rqRQ}\,, \tag{7}$$

so wie aus (6^b), (6^c) und (6^d) die 3 Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} -2\,q\,\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\,\vartheta_3(\varpi, q^3) &= p\sqrt{rqRQ} \\ -2\,q\,\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\,\vartheta_2(\varpi, q^3) &= r\sqrt{pqPQ} \\ -2\,q\,\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\,\vartheta\,(\varpi, q^3) &= q\sqrt{rpRP}\,. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

3 ähnliche Formeln bestehen auch für die reelle Periode, denn nach § 1. (11) ist:

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_0^{p-1}{}_{\mu}\, q^{\mu\mu}\,e^{2\mu i x}\,\vartheta_3(px - p\mu\varpi, q^{pp})\,.$$

Setzt man hierein statt x $x + \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, so ist:

$$\vartheta_1(x,q) = i\,q^{\frac{1}{4}}e^{ix}\sum_0^{p-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu+1}q^{\mu\mu+\mu}e^{2\mu i x}\,\vartheta_3\Big(p(x+\tfrac{\pi}{2}) - (\mu+\tfrac{1}{2})p\,\omega, q^{pp}\Big).$$

Wird hierin statt q $q^{\frac{1}{3}}$ und $p = 3$, $x = \frac{\pi}{3}$ gesetzt, so folgt:

$$\vartheta_1\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big) = i\sqrt{3}\,q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,. \tag{9}$$

Dann folgt aus (6^a) mit Anwendung von § 1. (13):

$$3\,\vartheta(0, q^{\frac{2}{3}})\,\vartheta_2(0, q)\,\vartheta(0, q^2) = 2\,\vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)\,\vartheta_2\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)\,,$$

ferner aus (6^a):

$$\tfrac{3}{2}\,\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{6}})\,\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0, q) = 2\,\vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)\,\vartheta\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)$$

und durch eine ähnliche Betrachtung, wie für die imaginäre Periode:

$$3\,\vartheta_3(0,q)\sqrt{\vartheta_2(0,q)\,\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{3}})\,\vartheta(o,q^{\frac{1}{3}})} = 2\,\vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)\,\vartheta_3\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big),$$

so dass, wenn wir schliesslich für q q^3 setzen und die linken Seiten gemäss § 1. (14) reduciren, sich ergiebt:

$$\left\{\begin{aligned} 2\,\vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big)\,\vartheta_3\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big) &= 3\,P\sqrt{rqRQ} \\ 2\,\vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big)\,\vartheta_2\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big) &= 3\,R\sqrt{pqPQ} \\ 2\,\vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big)\,\vartheta\,\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big) &= 3\,Q\sqrt{prPR}\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Multipliciren wir nun sämmtliche 3 Gleichungen in (8) und wenden die Formel § 1. (19) an, so ergiebt sich:

$$\vartheta_2^2(0,q)\ \vartheta^2(0,q)\ \vartheta_3^2(0,q) = -4\,q^2\,\vartheta_1^6(\varpi, q^3)\,.$$

Damit ist $\vartheta_1(\varpi, q^3)$ berechnet. Trägt man seinen Werth dann in (8) ein, so sind auch $\vartheta_3(\varpi, q^3)$ etc. dargestellt. Ebenso verfährt man mit den Gleichungen (10) und erhält nun folgende Darstellung der Fundamentalwerthe der Dreitheilung, nämlich der oben in (2) angegebenen Reihen durch die in (1) aufgestellten:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
i\,q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1(\varpi, q^3) &= \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta(\varpi, q^3) &= \sqrt{\frac{RP}{rp}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_2(\varpi, q^3) &= \sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_3(\varpi, q^3) &= \sqrt{\frac{RQ}{rq}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
\vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q\right) &= \sqrt{3}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
\vartheta\left(\frac{\pi}{3}, q\right) &= \sqrt{\frac{rp}{RP}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
\vartheta_2\left(\frac{\pi}{3}, q\right) &= \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
\vartheta_3\left(\frac{\pi}{3}, q\right) &= \sqrt{\frac{rq}{RQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}\right.$$

Der Grundgedanke zur Herleitung dieser Resultate ist von Herrn Prof. Dr. Schröter angegeben worden.

§ 3.

Die Gauss'schen Formeln.

Wir gehen nun zum 2. Theile, nämlich zur Herleitung der Gauss'schen Beziehungen, oder solcher, die ihnen analog sind (vgl. Gauss' Werke Bd. III, S. 470, 471, 476 und 479).

Wir hatten schon in § 2. (7) eine solche Beziehung zwischen p, q, r und P, Q, R allein gefunden. Dieselbe Beziehung, so wie noch eine zweite ähnliche ergiebt sich auch, wenn man die Werthe aus § 2. (11) in § 2. (5) substituirt. Beide Beziehungen lassen sich auf eine etwas andere Form bringen und lauten:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{p^3}{P}} + \sqrt{\frac{q^3}{Q}} - \sqrt{\frac{r^3}{R}} = 0\\
&\sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{Q^3}{q}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}} = 0\,.
\end{aligned}\right.$$

Aus den 3 Formeln § 1. (18) folgt nun, wenn man $x = z = \varpi$, $y = \omega = 0$ setzt, also $x' = y' = \varpi$, $z' = \omega' = 0$ ist:

$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_3^2(0, q^3) = \vartheta^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_2^2(0, q^3) - \vartheta_2^2(\varpi, q^3)\, \vartheta^2(0, q^3)$$
$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\, \vartheta^2(0, q^3) = \vartheta_3^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_2^2(0, q^3) - \vartheta_2^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_3^2(0, q^3)$$
$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_2^2(0, q^3) = \vartheta^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_3^2(0, q^3) - \vartheta_3^2(\varpi, q^3)\, \vartheta^2(0, q^3).$$

Trägt man in diese Formeln die Werthe aus § 2. (11) ein, so resultirt:

$$(2)\qquad \begin{cases} Pp = \dfrac{Q^3}{q} - \dfrac{R^3}{r} \\ Qq = \dfrac{P^3}{p} - \dfrac{R^3}{r} \\ Rr = \dfrac{Q^3}{q} - \dfrac{P^3}{p}. \end{cases}$$

Wenn man dieselben Gleichungen § 1. (18) nimmt, jetzt aber $x = z = \frac{\pi}{3}$ setzt, so resultiren nach den Eintragungen aus § 2. (11):

$$(3)\qquad \begin{cases} 3\,Pp = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{q^3}{Q} \\ 3\,Qq = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{p^3}{P} \\ 3\,Rr = \dfrac{p^3}{P} - \dfrac{q^3}{Q}, \end{cases}$$

also durch die Combination von (2) und (3)

$$(4)\qquad \begin{cases} 3\,pP = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{q^3}{Q} = \dfrac{3\,Q^3}{q} - \dfrac{3\,R^3}{r} \\ 3\,qQ = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{p^3}{P} = \dfrac{3\,P^3}{p} - \dfrac{3\,R^3}{r} \\ 3\,rR = \dfrac{p^3}{P} - \dfrac{q^3}{Q} = \dfrac{3\,Q^3}{q} - \dfrac{3\,P^3}{p} \end{cases}$$

(vergl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Wir könnten nun durch Eintragen in die 4fachen Produkte ebenso leicht alle übrigen Beziehungen ableiten, ziehen es aber vor, der Abwechslung wegen einen andern Weg einzuschlagen.

Vorher aber will ich noch eine Bemerkung machen, welche zeigt, in wie naher Beziehung diese Gauss'schen Formeln zu der Modulargleichung in § 2. (5) stehen, ja wie die Produkte derselben merkwürdiger Weise einzig und allein aus dieser abgeleitet werden können.

In § 2. (5) war:

$$pP = pQ + rR.$$

Hieraus folgt:

$$p^2P^2 = pqPQ + prPR$$
$$q^2Q^2 = pqPQ - qrQR$$
$$r^2R^2 = prPR - qrQR$$

und hieraus:

$$(p^2P^2 + q^2Q^2 + r^2R^2)^2 = 2(p^4P^4 + q^4Q^4 + r^4R^4)$$
$$2(p^4P^4 - r^4R^4 + q^4Q^4) = (p^2P^2 + q^2Q^2 + 3R^2r^2)(p^2P^2 + q^2Q^2 - r^2R^2)$$
$$2(p^4P^4 - q^4Q^4 + r^4R^4) = (p^2P^2 + 3q^2Q^2 + R^2r^2)(p^2P^2 - q^2Q^2 + r^2R^2)$$
$$2(q^4Q^4 - p^4P^4 + r^4R^4) = (3p^2P^2 + q^2Q^2 + r^2R^2)(q^2Q^2 - p^2P^2 + r^2R^2).$$

Nun folgt aber aus § 1. (23):

$$(p^4 - q^4)(P^4 - Q^4) = r^4R^4$$
$$p^4Q^4 + q^4P^4 = p^4P^4 - r^4R^4 + q^4Q^4$$
$$r^4Q^4 + q^4R^4 = p^4P^4 - r^4R^4 - q^4Q^4$$
$$q^4R^4 + r^4Q^4 = p^4P^4 - q^4Q^4 + r^4R^4,$$

ferner aus

$$pP = qQ + rR$$
$$2pqPQ = p^2P^2 - r^2R^2 + q^2Q^2$$
$$2qrQR = p^2P^2 - r^2R^2 - q^2Q^2$$
$$2prPR = p^2P^2 + r^2R^2 - q^2Q^2.$$

Trägt man dieses auf beiden Seiten ein, so sieht man, dass sich ergiebt:

$$\frac{p^3}{P}\cdot\frac{Q^3}{q} + \frac{q^3}{Q}\frac{P^3}{p} - p^2P^2 - q^2Q^2 = 3r^2R^2$$

und ebenso in den übrigen Fällen, also:

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(\frac{Q^3}{q} - \frac{P^3}{p}\right)\left(\frac{q^3}{Q} - \frac{p^3}{P}\right) = 3r^2R^2 \\ \left(\frac{P^3}{p} - \frac{R^3}{r}\right)\left(\frac{r^3}{R} - \frac{p^3}{P}\right) = 3q^2Q^2 \\ \left(\frac{Q^3}{q} - \frac{R^3}{r}\right)\left(\frac{r^3}{R} - \frac{q^3}{Q}\right) = 3p^2P^2. \end{cases}$$

Wir hätten schliesslich dieses selbe Resultat noch auf eine dritte Weise aus § 2. (4) herleiten können, übergehen es aber der Kürze halber.

Zerlegt man nun die Formeln (2) und (3) in der Weise, dass z. B.

$$\left(\sqrt{\frac{P^3}{p}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}}\right)\left(\sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{R^3}{r}}\right) = Qq$$

und beachtet die Beziehungen (1), so ergeben sich folgende neue irrationale Abhängigkeiten*):

*) Vergl. Schering: Mittheilungen über den III. Bd. von Gauss' Werken. Math. Ann. Bd. I. S. 139.

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{P^3}{p}}-\sqrt{\frac{R^3}{r}}-\sqrt{\frac{q^3}{Q}}=0\\
&\sqrt{\frac{P^3}{p}}+\sqrt{\frac{Q^3}{q}}-\sqrt{\frac{r^3}{R}}=0\\
&\sqrt{\frac{Q^3}{q}}+\sqrt{\frac{R^3}{r}}-\sqrt{\frac{p^3}{P}}=0\\
3&\sqrt{\frac{P^3}{p}}-\sqrt{\frac{q^3}{Q}}-\sqrt{\frac{r^3}{R}}=0\\
3&\sqrt{\frac{Q^3}{q}}-\sqrt{\frac{r^3}{R}}-\sqrt{\frac{p^3}{P}}=0\\
3&\sqrt{\frac{R^3}{r}}+\sqrt{\frac{q^3}{Q}}-\sqrt{\frac{p^3}{P}}=0\,.
\end{aligned}\right.$$

Es lassen sich nun die Resultate (1) und (6) immer zu je zweien combiniren und es ergeben sich daraus 3 rationale Beziehungen zwischen je vier dieser Grössen. So ist z. B.

$$\frac{Q^2}{\sqrt{Qq}}+\frac{P^2}{\sqrt{Pp}}=\frac{3P^2}{\sqrt{Pp}}-\frac{q^2}{\sqrt{qQ}}=\frac{3Q^2}{\sqrt{Qq}}-\frac{p^2}{\sqrt{Pp}}\,.$$

Hieraus aber folgt:

$$\sqrt{\frac{pP}{qQ}}=\frac{2P^2}{Q^2+q^2}=\frac{p^2+P^2}{2Q^2}$$

und ähnlich noch 2 andere Beziehungen. Wie man sieht, folgt aus diesen:

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&qqPP+ppQQ+ppqq-3PPQQ=0\\
&ppRR+rrPP-rrpp+3RRPP=0\\
&qqRR-rrQQ+rrqq+3RRQQ=0
\end{aligned}\right.$$

(vergl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Andrerseits folgt ebenso aus (6) und (1):

$$\sqrt{\frac{Qq}{Pp}}=\frac{2Q^2}{P^2+p^2},\quad\sqrt{\frac{Pp}{Qq}}=\frac{3P^2-p^2}{2q^2},$$

also:

$$\frac{3P^2-p^2}{2q^2}=\frac{2Q^2}{P^2+p^2}\,\frac{pP}{qQ}$$

$$(p^2-3P^2)(p^2+P^2)=-4pqPQ$$

nebst den beiden entsprechenden Formeln; so dass wir hieraus erhalten:

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
p^4-3P^4&=2pP(Rr-Qq)\\
3Q^4-q^4&=2qQ(Pp+Rr)\\
r^4-3R^4&=2Rr(Pp+Qq)\,.
\end{aligned}\right.$$

Noch eine Gauss'sche Beziehung ergiebt sich aus der Combination der Formeln in (6) und (1) unter einander. Es ist:

$$\sqrt{\frac{Qq}{Pp}}=\frac{Q^2+q^2}{2P^2}=\frac{3Q^2+q^2}{3P^2+p^2},$$

also:

$$\frac{Qq}{Pp} = \frac{3Q^4 + q^4 + 4Q^2q^2}{2(3P^4 + p^2P^2)},$$

also:

(a) $$\frac{6P^4}{pP} + 2pP = \frac{3Q^4 + q^4}{Qq} + 4Qq,$$

ferner:

$$\sqrt{\frac{Qq}{Pp}} = \frac{q^2 - Q^2}{P^2 - p^2} = \frac{3Q^2 - q^2}{2p^2},$$

also:

$$\frac{Qq}{Pp} = \frac{3Q^4 + q^4 - 4Q^2q^2}{2p^4 - 2p^2P^2},$$

also:

(b) $$\frac{2p^4}{pP} - 2pP = \frac{3Q^4 + q^4}{Qq} - 4Qq,$$

also durch Addition der Gleichungen (a) und (b)

$$\frac{3P^4 + p^4}{Pp} = \frac{3Q^4 + q^4}{Qq}.$$

Auf gleiche Weise stellt man die Identität her:

$$\frac{3P^4 + p^4}{Pp} = \frac{3R^4 + r^4}{Rr},$$

so dass schliesslich:

(9) $$\frac{r^4 + 3R^4}{rR} = \frac{q^4 + 3Q^4}{qQ} = \frac{p^4 + 3P^4}{pP}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Setzt man ferner in § 1. (20) $x = y = \frac{\pi}{3}$ und trägt die betreffenden Werthe aus § 2. (11) ein, so ergeben sich nachstehende 3 Formeln:

(10) $$\begin{cases} \dfrac{ppQQ - qqPP}{pP - qQ} = 2\sqrt{pqPQ} \\ \dfrac{rrPP - ppRR}{pP - rR} = 2\sqrt{rpRP} \\ \dfrac{rrQQ + qqRR}{rR + qQ} = 2\sqrt{rqRQ} \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 479).

Aus der Formel § 1. (17)

$$\vartheta_1^4(x, q) + \vartheta_3^4(x, q) - \vartheta^4(x, q) - \vartheta_2^4(x, q) = 0$$

resultiren für $x = \frac{\varpi}{3}$ und $x = \frac{\pi}{3}$ noch folgende 2 Beziehungen:

(11) $$\begin{cases} \dfrac{R^2P^2}{r^2p^2} + \dfrac{Q^2P^2}{q^2p^2} - \dfrac{R^2Q^2}{r^2q^2} = 1 \\ \dfrac{r^2p^2}{R^2P^2} + \dfrac{q^2p^2}{Q^2P^2} - \dfrac{r^2q^2}{R^2Q^2} = 9. \end{cases}$$

Gauss hat diese beiden Beziehungen für die Dreitheilung nicht angegeben. Doch finden sich die analogen Formeln bei der Fünfthei-

lung (vgl. § 4. (21), so wie wir auch schon in (12) 2 Abhängigkeiten ganz gleicher Natur antreffen werden.

Wohl aber hat Gauss noch 2 eigenthümliche Formeln ohne Beweis angegeben, indem er die Grössen:

$$P_0 = \vartheta_3(0, q^{\frac{1}{3}}), \quad Q_0 = \vartheta(0, q^{\frac{1}{3}}), \quad R_0 = \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{3}})$$

einführt, welche den Grössen P, Q, R coordinirt sind. Diese Formeln finden sich Band III, S. 476 und sind:

$$\left\{\frac{3PP - P_0P_0}{2}\right\}^2 = p^4 - 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\left\{\frac{3QQ - Q_0Q_0}{2}\right\}^2 = q^4 + 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Indem ich mich bemühte, auch diese Formeln, die etwas tiefer liegen, aus der Theorie der ϑ-Functionen abzuleiten, bin ich auf eine Menge eigenthümlicher Beziehungen gestossen, die Gauss nicht angegeben hat, aus denen dann aber schliesslich nicht nur die beiden obigen Gauss'schen Beziehungen, sondern noch 4 andere ebensolche sich ergeben. Es sind diese Formeln bemerkenswerth, da links z. B. nichts weiter als P_0 und P, resp. Q und Q_0 etc., rechts aber allein die überhaupt für die ganze Theorie der elliptischen Transcendenten fundamentalen Grössen p, q und r stehen.

Setzt man in die Formeln § 2. (4) einmal $x = \frac{\varpi}{3}$, $y = 0$, sodann aber $x = 0$, $y = \frac{\pi}{3}$ und im zweiten Fall für q $q^{\frac{1}{3}}$, so ergeben sich nach den nöthigen Vereinfachungen folgende Beziehungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{RP}{R_0P_0}} + \sqrt{\dfrac{PQ}{P_0Q_0}} - \sqrt{\dfrac{RQ}{R_0Q_0}} = 1 \\ \sqrt{\dfrac{R_0P_0}{RP}} + \sqrt{\dfrac{P_0Q_0}{PQ}} - \sqrt{\dfrac{R_0Q_0}{RQ}} = 3 \end{cases}$$

vgl. hiermit (11), sowie § 4. (21); ferner:

$$(13) \quad \begin{cases} P\sqrt{rq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{RQ} + \sqrt{R_0Q_0}\} \\ P_0\sqrt{rq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{3\sqrt{RQ} + \sqrt{R_0Q_0}\} \\ Q\sqrt{pr} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{R_0P_0} - \sqrt{RP}\} \\ Q_0\sqrt{pr} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{R_0P_0} - 3\sqrt{RP}\} \\ R\sqrt{pq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{PQ} - \sqrt{P_0Q_0}\} \\ R_0\sqrt{pq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{3\sqrt{PQ} - \sqrt{P_0Q_0}\}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt nun einerseits:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{3PP - P_0P_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{R_0Q_0 - 3RQ}{rq} \\[2mm] \dfrac{3QQ - Q_0Q_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{R_0P_0 - 3RP}{pr} \\[2mm] \dfrac{3RR - R_0R_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{P_0Q_0 - 3PQ}{pq} \end{cases}$$

als auch andrerseits:

$$(15)\qquad \begin{cases} 3P - P_0 = 2\sqrt{\dfrac{R_0Q_0}{rq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\[2mm] 3Q - Q_0 = 2\sqrt{\dfrac{R_0P_0}{rp}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\[2mm] -(3R - R_0) = 2\sqrt{\dfrac{P_0Q_0}{pq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\[2mm] -(P - P_0) = 2\sqrt{\dfrac{RQ}{rq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\[2mm] Q - Q_0 = 2\sqrt{\dfrac{PR}{pr}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\[2mm] -(R - R_0) = 2\sqrt{\dfrac{PQ}{pq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

und hieraus:

$$(16)\qquad \begin{cases} (3P - P_0)(3Q - Q_0)(3R - R_0) = -4P_0Q_0R_0 \\ (P - P_0)\;(Q - Q_0)\;(R - R_0) = 4PQR. \end{cases}$$

Andrerseits aber folgen aus (13) mit Hülfe von (12), da:

$$\sqrt{P}\{\sqrt{R_0Q} + \sqrt{Q_0R}\} = \sqrt{P_0}\{\sqrt{R_0Q_0} \mp \sqrt{RQ}\}:$$

die 3 Beziehungen:

$$(17)\qquad \begin{cases} \sqrt{PP_0}\sqrt{rq} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{QR_0} + \sqrt{RQ_0}\} \\[2mm] \sqrt{QQ_0}\sqrt{pr} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{PR_0} - \sqrt{RP_0}\} \\[2mm] \sqrt{RR_0}\sqrt{pq} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{QP_0} - \sqrt{PQ_0}\}. \end{cases}$$

Combiniren wir diese Resultate mit (13), so haben wir folgende Beziehungen:

$$\begin{cases} \sqrt{Prq}\,(\sqrt{P} + \sqrt{P_0}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{Q} + \sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{R} + \sqrt{R_0}\} \\[2mm] \sqrt{Prq}\,(\sqrt{P} - \sqrt{P_0}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{Q} - \sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{R} - \sqrt{R_0}\} \\[2mm] \sqrt{P_0rq}\,(\sqrt{P_0} + \sqrt{3P}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3Q} + \sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{3R} + \sqrt{R_0}\} \\[2mm] \sqrt{P_0rq}\,(\sqrt{P_0} - \sqrt{3P}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3Q} - \sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{3R} - \sqrt{R_0}\} \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \sqrt{Qpr}\,(\sqrt{Q}+\sqrt{Q_0}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P}+\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{R_0}-\sqrt{R}\} \\ \sqrt{Qpr}\,(\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P_0}-\sqrt{P}\}\{\sqrt{R}+\sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{Q_0pr}\,(\sqrt{Q_0}+\sqrt{3Q}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{3P}+\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{R_0}-\sqrt{3R}\} \\ \sqrt{Q_0pr}\,(\sqrt{Q_0}-\sqrt{3Q}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P_0}-\sqrt{3P}\}\{\sqrt{R_0}+\sqrt{3R}\} \\ \sqrt{Rpq}\,(\sqrt{R}+\sqrt{R_0}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P}+\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0}\} \\ \sqrt{Rpq}\,(\sqrt{R}-\sqrt{R_0}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P_0}-\sqrt{P}\}\{\sqrt{R}+\sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{R_0pq}\,(\sqrt{R_0}+\sqrt{3R}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{3P}+\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{3Q}-\sqrt{Q_0}\} \\ \sqrt{R_0pq}\,(\sqrt{R_0}-\sqrt{3R}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{3P}-\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{3Q}+\sqrt{Q_0}\} \end{cases}$$

und hieraus:

$$(19)\quad \begin{cases} -2\sqrt{PQR} = (\sqrt{P}+\sqrt{P_0})(\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0})(\sqrt{R}-\sqrt{R_0}) \\ -2\sqrt{PQR} = (\sqrt{P}-\sqrt{P_0})(\sqrt{Q}+\sqrt{Q_0})(\sqrt{R}+\sqrt{R_0}) \\ 2\sqrt{P_0Q_0R_0} = (\sqrt{3P}+\sqrt{P_0})(\sqrt{3Q}-\sqrt{Q_0})(\sqrt{R_0}-\sqrt{3R}) \\ 2\sqrt{P_0Q_0R_0} = (\sqrt{3P}-\sqrt{P_0})(\sqrt{3Q}+\sqrt{Q_0})(\sqrt{3R}+\sqrt{R_0}) \end{cases}$$

(vgl. hiermit die Resultate der Fünftheilung § 4. (17) und § 5. (3) und (5)).

Setzen wir nun in die Formeln § 1. (17)

$$x = \frac{4\pi}{3}, \quad z = \frac{2\pi}{3}, \quad y = w = \frac{\varpi}{3},$$

also:

$$x' = \pi + \frac{\varpi}{3}, \quad y' = \pi - \frac{\varpi}{3}, \quad z' = w' = \frac{\pi}{3}$$

Dann ist:

$$\vartheta_3^2\left(\frac{\pi}{3}, q\right) \vartheta_3^2\left(\frac{\varpi}{3}, q\right) - \vartheta^2\left(\frac{\pi}{3}, q\right) \vartheta^2\left(\frac{\varpi}{3}, q\right)$$
$$= -\vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{3}, q\right) \vartheta_1^2\left(\frac{\varpi}{3}, q\right) + \vartheta_2^2\left(\frac{\pi}{3}, q\right) \vartheta_2^2\left(\frac{\varpi}{3}, q\right),$$

so dass nach § 2. (11):

$$(20)\qquad r^2q^2PP_0 - r^2p^2QQ_0 - p^2q^2RR_0 = 3PQRP_0Q_0R_0$$

und hieraus:

$$
(21)\qquad \begin{cases} \frac{p^2}{PP_0}\,(r^2QQ_0+q^2RR_0) = -\,3RQR_0Q_0+r^2q^2 \\ \frac{q^2}{QQ_0}\,(r^2PP_0-p^2RR_0) = \,3PRP_0R_0+r^2p^2 \\ \frac{r^2}{RR_0}\,(q^2PP_0-p^2QQ_0) = \,3PQP_0Q_0+p^2q^2\,. \end{cases}
$$

Ferner folgen aus § 1. (18) die Formeln:

$$
\vartheta_2^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)
$$
$$
\vartheta_2^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)-\vartheta^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)
$$
$$
\vartheta^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_2^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)-\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)
$$

und hieraus mit Hülfe von § 2. (11)

$$
(22)\qquad \begin{cases} \frac{p^2}{PP_0}\,(QR_0-RQ_0)=3QR+R_0Q_0 \\ \frac{q^2}{QQ_0}\,(PR_0-RP_0)=3RP+R_0P_0 \\ \frac{r^2}{RR_0}\,(QP_0-PQ_0)=3PQ+P_0Q_0\,. \end{cases}
$$

Bildet man nun aber aus den Formeln (13) den Complex

$$
r^2(q^2PP_0-p^2QQ_0),
$$

indem man die zugehörigen Formeln multiplicirt, sowie denselben Ausdruck aus (17), indem man quadrirt, und zieht von dem doppelten letzteren den ersten ab, so folgt nach Beachtung der Beziehung § 2. (5)

$$
q^2PP_0-p^2PP_0=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(3R^2+R_0^2-4RR_0)\,.
$$

Wendet man für $3R^2+R_0^2-4RR_0$ die Beziehungen (15) an, und combinirt zugleich damit (21), so folgt:

$$
(23)\qquad \begin{cases} q^2PP_0-p^2QQ_0=4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{PQP_0Q_0}}{pq}=\frac{RR_0}{r^2}\left\{3PQP_0Q_0+p^2q^2\right\} \\ r^2PP_0-p^2RR_0=4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RPR_0P_0}}{rp}=\frac{QQ_0}{q^2}\left\{3PRP_0R_0+r^2p^2\right\} \\ r^2QQ_0+q^2RR_0=4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{rq}=\frac{PP_0}{p^2}\left\{r^2q^2-3RQR_0Q_0\right\}. \end{cases}
$$

Erhebt man nun die 1. Formel in (22) ins Quadrat, so ist:

$$
qR^2Q^2+R_0^2Q_0^2+6RQR_0Q_0=\frac{p^4}{P^2P_0^2}\left\{RQ_0-QR_0\right\}^2,
$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(x+2y,q)\ \vartheta_3(2x-y,q)=\\
&\qquad=\sum_0^4 q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_3(5x-\mu\varpi,q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi,q^5)\\
&\vartheta\ (x+2y,q)\ \vartheta\ (2x-y,q)\\
&\qquad=\sum_0^4 (-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi,q^5)\ \vartheta\ (5y-2\mu\varpi,q^5)\\
&\vartheta_2(x+2y,q)\ \vartheta_2(2x-y,q)\\
&\qquad=\sum_0^4 q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_2(5x-\mu\varpi,q^5)\ \vartheta_2(5y-2\mu\varpi,q^5)\\
&\vartheta\ (x+2y,q)\ \vartheta_3(2x-y,q)\\
&\qquad=\sum_0^4 (-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi,q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi,q^5)\\
&\vartheta_2(x+2y,q)\ \vartheta_3(2x-y,q)\\
&\qquad=\sum_0^4 q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_2(5x-\mu\varpi,q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi,q^5)\\
&\vartheta\ (x+2y,q)\ \vartheta_2(2x-y,q)\\
&\qquad=\sum_0^4 (-1)^{\mu+1} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi,q^5)\ \vartheta_2(5y-2\mu\varpi,q^5).
\end{aligned}\right.$$

Setzt man hierein $x=y=0$, so folgt nach einigen Umformungen:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&4q\ \vartheta_3(\varpi,q^5)\ \vartheta_3(2\varpi,q^5)=pp-PP\\
&4q\ \vartheta\ (\varpi,q^5)\ \vartheta\ (2\varpi,q^5)=QQ-qq\\
&4q\ \vartheta_2(\varpi,q^5)\ \vartheta_2(2\varpi,q^5)=rr-RR\,;
\end{aligned}\right.$$

ferner:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&2q\left\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\ \vartheta\ (2\varpi,q^5)-\vartheta\ (\varpi,q^5)\ \vartheta_3(2\varpi,q^5)\right\}=pq-PQ\\
&2q\left\{\vartheta\ (\varpi,q^5)\ \vartheta_2(2\varpi,q^5)-\vartheta_2(\varpi,q^5)\ \vartheta\ (2\varpi,q^5)\right\}=rq+RQ\\
&2q\left\{\vartheta_2(\varpi,q^5)\ \vartheta_3(2\varpi,q^5)+\vartheta_3(\varpi,q^5)\ \vartheta_2(2\varpi,q^5)\right\}=pr-PR.
\end{aligned}\right.$$

Es braucht wohl nicht noch besonders darauf aufmerksam gemacht zu werden, dass q auf der linken Seite der Modul ist, während q auf der rechten Seite das Gauss'sche Zeichen für $\vartheta(0,q)$ bedeutet. Aehnliche Formeln wie in (3) ergeben sich aber auch sehr leicht für die reelle Periode. Setzt man in (2) $x=\frac{\pi}{5}$, $y=0$, so ist:

$$(5^a)\begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = P^2 + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}} \vartheta_3(\mu\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi, q^5) \\ \vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = Q^2 + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}} \vartheta(\mu\varpi, q^5)\,\vartheta(2\mu\varpi, q^5) \\ -\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = R^2 + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}} \vartheta_2(\mu\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\mu\varpi, q^5)\,. \end{cases}$$

$\vartheta_3(\mu\varpi, q^5)\cdot\vartheta_3(2\mu\varpi, q^5)$ lässt sich aber in allen Gliedern auf $q\vartheta_3(\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\varpi, q^5)$ zurückführen, und dieser Ausdruck ist dann in unserem Falle behaftet mit dem Factor:

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} \text{ d. i. mit } \frac{e^{\frac{8i\pi}{5}}\, e^{\frac{2i\pi}{5}} - e^{\frac{2i\pi}{5}}}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = -1, \text{ da } e^{2i\pi} = 1\,.$$

Dann ist offenbar:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = P^2 - q\,\vartheta_3(\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\varpi, q^5)$$

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = Q^2 + q\,\vartheta(\varpi, q^5)\,\vartheta(2\varpi, q^5)$$

$$-\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = R^2 - q\,\vartheta_2(\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi, q^5)\,.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung von (3):

$$(5^b)\begin{cases} 4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,PP - pp \\ 4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,QQ - qq \\ 4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = rr - 5\,RR\,. \end{cases}$$

Wenn wir aber in die 3. Formel von (2) statt x und y $x + \frac{\pi}{2}$ und $y + \frac{\pi}{2}$ setzen und dann $x = \frac{\pi}{5}$ $y = 0$ nehmen, so folgt, da nach § 1. (5)

$$\vartheta_1(\pi - \mu\varpi, q^5) = \vartheta_1(\mu\varpi, q^5)$$

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\,\vartheta_1(\mu\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\mu\varpi, q^5)\,.$$

Vermöge § 1. (3) lassen sich nun die vier Glieder rechter Hand alle auf $q\vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)$ reduciren. Davon ist aber das 1. und 4. Glied negativ, das 2. und 3. positiv, also haben wir:

$$-e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{6i\pi}{5}}-e^{\frac{8i\pi}{5}}=-\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{-2i\pi}{5}}\right)-\left(e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{-i\pi}{5}}\right)$$

$$=-2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\right)=-2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)=-\sqrt{5}\,.$$

Es ist also:

$$(6)\qquad -\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=q\sqrt{5}\,\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)\,.$$

Es ist also jetzt nur noch übrig $\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)$ herzuleiten.

Setzen wir in § 1. (20) $x=2\varpi$ $y=\varpi$ und für q q^5 und multipliciren mit $16\,q^2$, so ergeben sich mit Hülfe von (3), sowie für $x=\frac{2\pi}{5}$, $y=\frac{\pi}{5}$ mit Hülfe von (5) folgende Beziehungen:

$$(7)\qquad\begin{cases}(p^2-P^2)^2-(q^2-Q^2)^2=4R^2(r^2-R^2)\\(p^2-P^2)^2-(r^2-R^2)^2=4Q^2(q^2-Q^2)\\(r^2-R^2)^2+(q^2-Q^2)^2=4P^2(p^2-P^2)\\(5P^2-p^2)^2-(5Q^2-q^2)^2=4r^2(5R^2-r^2)\\(5P^2-p^2)^2-(5R^2-r^2)^2=4q^2(5Q^2-q^2)\\(5R^2-r^2)^2+(5Q^2-q^2)^2=4p^2(5P^2-p^2)\,;\end{cases}$$

ferner:

$$(8)\qquad\begin{cases}16\,q^2\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi,q^5)\,\vartheta_1^{\,2}(2\varpi,q^5)=-\frac{16}{5}\,\vartheta_1^{\,2}\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_1^{\,2}\left(\frac{2\pi}{5},q\right)\\\qquad=(r^2-R^2)(r^2-5R^2)\\\qquad=(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)\\\qquad=-(p^2-P^2)(p^2-5P^2)\,.\end{cases}$$

Ferner aber folgt aus (7)

$$p^4-2p^2P^2+P^4-r^4+2r^2R^2-R^4=4Q^2q^2-4Q^4\,,$$

also nach § 1. (23):

$$(9)\qquad\begin{cases}(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)\\\qquad=2(PPpp-QQqq-RRrr)=16q^2\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi,q^5)\,\vartheta_1^{\,2}(2\varpi,q^5).\end{cases}$$

Wenden wir hierauf die 3 letzten Formeln aus § 1. (14) an, so ist:

$$(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)=4\left\{\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{10})-\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{10})\right\}$$

also:

$$(10)\quad 2q\,\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)=\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{10})-\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{10})=V.$$

Jetzt werde in die Hauptformel § 1. (8) $\alpha=1$, $\beta=5$ gesetzt, so ist dann:

$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^5)=\sum_{\mu=0}^{\mu=5}q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^6)\,\vartheta_3(5x-y-5\mu\varpi,q^{30}).$$

Setzt man hierein statt q q^2 und $x = \frac{\varpi}{2}$, $y = 0$ und reducirt auf gehörige Weise vermöge der Formeln § 1. (3), so ist:

$$q^{-\frac{1}{2}}\, \vartheta_2(0, q^2)\, \vartheta_3(0, q^{10}) = 2\, \vartheta_3(\varpi, q^{12})\, \vartheta_3(5\varpi, q^{60}) + 2q^4\, \vartheta_3(3\varpi, q^{12})\, \vartheta_3(15\varpi, q^{60}) \\ + 2q^{12}\, \vartheta_3(5\varpi, q^{12})\, \vartheta_3(25\varpi, q^{60}) .$$

Setzt man aber $x = 0$, $y = \frac{5\varpi}{2}$, so folgt:

$$q^{-\frac{1}{2}}\, \vartheta_3(0, q^2)\, \vartheta_2(0, q^{10}) = 2q^2\, \vartheta_3(5\varpi, q^{12})\, \vartheta_3(5\varpi, q^{60}) + 2q^4\, \vartheta_3(3\varpi, q^{12})\, \vartheta_3(15\varpi, q^{60}) \\ + 2q^{10}\, \vartheta_3(\varpi, q^{12})\, \vartheta_3(25\varpi, q^{60}).$$

Subtrahirt man beide Formeln, so ist:

$$q^{\frac{1}{2}} V = 2 \left\{\vartheta_3(5\varpi, q^{60}) - \vartheta_2(5\varpi, q^{60})\right\} \left\{\vartheta_3(\omega, q^{12}) - \vartheta_2(\varpi, q^{12})\right\} .$$

Mit Hülfe von § 1. (6) folgt schliesslich:

$$\vartheta_3(0, q^2)\, \vartheta_3(0, q^{10}) - \vartheta_2(0, q^2)\, \vartheta_3(0, q^{10}) = 2q^2\, \vartheta_1(\varpi, q^3)\, \vartheta_1(5\varpi, q^{15}) ,$$

also nach dem Vergleiche mit (10)

(11) $$q\, \vartheta_1(\varpi, q^3)\, \vartheta_1(5\varpi, q^{15}) = \vartheta_1(\varpi, q^5)\, \vartheta_1(2\varpi, q^5) .$$

Diese elegante Formel ist für die ganze nachfolgende Entwicklung wichtig; der Grundgedanke für ihre Herleitung rührt von Herrn Prof. Schröter her. Es findet sich diese Beziehung auch schon bei Jacobi, der auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Productbeziehungen zu ihr gelangt ist. (Vgl. J. Jacobi: Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten 2 quadratische Formen haben: Crelle's Journal, Bd. 37, S. 92, Formel 21.) Ich werde später in einer allgemeinen Untersuchung zeigen, dass sich eine allgemeine Formel für alle ungraden Zahlen angeben lässt, von der (11) nur ein specieller Fall ist (vgl. § 9. (12) und (13)).

Da nun nach § 2. (11)

$$i q^{\frac{1}{3}}\, \vartheta_1(\varpi, q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} ,$$

so ist:

(12) $$q\, \vartheta_1(\varpi, q^5)\, \vartheta_1(2\varpi, q^5) = -\left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Dann ergiebt sich also aus (12) und (8)

(13) $$\begin{cases} \quad (rr - RR)\,(rr - 5RR) \\ = \quad (qq - QQ)\,(qq - 5QQ) \\ = -\,(pp - PP)\,(pp -- 5PP) = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

und aus (12) und (9):

(14) $$2ppPP - 2qqQQ - 2rrRR = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475. Zugleich ist zu bemerken, dass sich an der betreffenden Stelle ein Zeichenfehler findet).

Diese letztere Beziehung:

$$2ppPP - 2qqQQ - 2rrRR = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}}$$

ist sehr interessant, denn sie giebt Gelegenheit, die Modulargleichung für die Transformation fünfter Ordnung in einer neuen Gestalt darzustellen. Setzt man die Werthe aus § 1. (2) ein, also z. B. $q = \sqrt{\frac{2K\varkappa_1}{\pi}}$, $Q = \sqrt{\frac{2\Lambda\lambda_1}{\pi}}$ etc., so ist:

$$\varkappa\lambda + \varkappa_1\lambda_1 + 2\sqrt[3]{4\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1} = 1\,,$$

so dass also diese Modulargleichung sich in 4facher Gestalt darbietet, denn es bestehen noch die 3 Formen:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{\varkappa\lambda}\,(\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda}) &= \sqrt[4]{\varkappa_1\lambda_1}\,(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\varkappa_1}) \\
\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda} &= \sqrt[3]{4\varkappa_1\lambda_1}\,\sqrt[12]{\varkappa\lambda} \\
\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\varkappa_1} &= \sqrt[3]{4\varkappa\lambda}\,\sqrt[12]{\varkappa_1\lambda_1}
\end{aligned}$$

(vgl. Schröter: Ueber die Modulargleichungen Crelle Bd. 57, S. 378 so wie de aequ. mod. S. 16; sowie auch Fund. nov. S. 69).

Aus den Formeln (4) lassen sich mit Hülfe der Formeln § 1. (21) nun ähnliche Beziehungen angeben, wie in § 3. (7) für die Dreitheilung. Quadrirt man nämlich die 3 Formeln in (4) und setzt z. B. für

$$\vartheta_3^2(\varpi, q^5)\ \vartheta^2(2\varpi, q^5) + \vartheta^2(\varpi, q^5)\ \vartheta_3^2(2\varpi, q^5)$$

seinen Werth aus § 1. (21), nämlich:

$$-P^2\,\vartheta(2\varpi, q^5)\,\vartheta(\varpi, q^5) + Q^2\,\vartheta_3(2\varpi, q^5)\,\vartheta_3(\varpi, q^5)$$

so ergiebt sich:

$$(15)\quad \begin{cases} PPqq + QQpp + 4pqPQ - ppqq - 5\,PPQQ = 0 \\ PPrr + RRpp + 4prPR - pprr - 5\,RRPP = 0 \\ QQrr + RRqq + 4qrQR - qqrr - 5\,QQRR = 0\,. \end{cases}$$

Es folgt ferner aus § 1. (19)

$$\begin{aligned}
2\vartheta(\varpi, q^5)\ \ \vartheta_1(\varpi, q^5)\ \ \vartheta_2(\varpi, q^5)\ \ \vartheta_3(\varpi, q^5) &= PQR\,\vartheta_1(2\varpi, q^5) \\
2\vartheta(2\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\varpi, q^5) &= q^{-3}PQR\,\vartheta_1(\varpi, q^5)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
2\vartheta\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right) &= pqr\,\vartheta_1\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) \\
2\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) &= pqr\,\vartheta_1\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die ersten beiden Gleichungen mit einander, so wie die letzten beiden, so ergiebt sich nach Anwendung von (3) und (5)

$$(16)\quad \begin{cases}(pp-PP)\ (QQ-qq)\ (rr-RR) = 16P^2Q^2R^2\\ (pp-5PP)\,(qq-5QQ)\,(rr-5RR) = 16p^2q^2r^2.\end{cases}$$

Es wird sich dann später zeigen (vgl. § 5. (4) und (6)), dass sich diese beiden Gleichungen noch weiter zerlegen lassen, indem nämlich wird:

$$(17)\quad \begin{cases}(p-P)\,(q+Q)\,(r+R) = 4\,PQR\\ (p+P)\,(Q-q)\,(r-R) = 4\,PQR\\ (\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\,(\sqrt{5}\,R+r) = 4\,pqr\\ (\sqrt{5}\,P+p)\,(\sqrt{5}\,Q-q)\,(r-\sqrt{5}\,R) = 4\,pqr.\end{cases}$$

Wir gelangen nun zur Darstellung derjenigen Beziehungen, welche bei Gauss das Hauptinteresse in Anspruch nehmen Aus § 1. (13) folgt nämlich:

$$\sqrt{PQ}\,\vartheta_1(2\varpi, q^{10}) = \vartheta_1(\varpi, q^5)\ \ \vartheta_2(\varpi, q^5)$$
$$\sqrt{PQ}\,\vartheta_1(4\varpi, q^{10}) = \vartheta_1(2\varpi, q^5)\ \vartheta_2(2\varpi, q^5),$$

also durch Multiplication und Benutzung von (3) und (12):

$$PQ\,\left\{\tfrac{1}{4}\,\vartheta(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{10})\,\vartheta_2(0,q^{10})\,\vartheta_3(0,q^{10})\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$= (\tfrac{1}{4}pqrPQR)^{\frac{1}{3}}\,(r^2-R^2).$$

Reduciren wir $\vartheta(0, q^2)$ etc. nach den Formeln § 1. (14), so folgt schliesslich:

$$rr-RR = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}.$$

Durch die anderen Beziehungen in § 1. (13) kann man auf dieselbe Weise die Differenzen $QQ-qq$ und $pp-PP$ als Product darstellen. Beachtet man (13), so folgt auch für $rr-5RR$ etc. ein Product, da dort

$$(rr-RR)\,(rr-5RR) = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzen wir

$$\frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} = A,\qquad \frac{(4pqr)^{\frac{5}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} = B,$$

so dass also:

$$AB = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}},\qquad \frac{A}{B} = \frac{PQR}{pqr}.$$

Dann folgt:

$$(18)\quad \begin{cases}4q\,\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5) = pp-PP = A\sqrt{\frac{p}{P}}\\[1ex] 4q\,\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,q^5) = QQ-qq = A\sqrt{\frac{q}{Q}}\\[1ex] 4q\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5) = rr-RR = A\sqrt{\frac{r}{R}}\end{cases}$$

$$
(19)\quad \begin{cases} 4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,PP - pp = B\sqrt{\frac{P}{p}} \\ 4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,QQ - qq = B\sqrt{\frac{Q}{q}} \\ 4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = rr - 5\,RR = B\sqrt{\frac{R}{r}} \end{cases}
$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475).

Addirt oder subtrahirt man immer 2 entsprechende Formeln in (18) und (19), so entstehen sechs sehr symmetrische irrationale Beziehungen, die denen in § 3. (6) in gewisser Weise analog sind:

$$
(20)\quad \begin{cases} \sqrt[6]{\frac{(QR)^5}{qr}} + \sqrt[6]{\frac{(qr)^5}{QR}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,PP)^5}{2\,pp}} = 0 \\ 5\sqrt[6]{\frac{(QR)^5}{qr}} + \sqrt[6]{\frac{(qr)^5}{QR}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,pp)^5}{2\,PP}} = 0 \\ -\sqrt[6]{\frac{(PR)^5}{pr}} + \sqrt[6]{\frac{(pr)^5}{PR}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,QQ)^5}{2\,qq}} = 0 \\ -5\sqrt[6]{\frac{(PR)^5}{pr}} + \sqrt[6]{\frac{(pr)^5}{PR}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,qq)^5}{2\,QQ}} = 0 \\ \sqrt[6]{\frac{(PQ)^5}{pq}} - \sqrt[6]{\frac{(pq)^5}{PQ}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,RR)^5}{2\,rr}} = 0 \\ 5\sqrt[6]{\frac{(PQ)^5}{pq}} - \sqrt[6]{\frac{(pq)^5}{PQ}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,rr)^5}{2\,RR}} = 0 \end{cases}
$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475).

Wenn man aus § 1. (17) die Formel nimmt:

$$
\vartheta_3^2(x, q)\,\vartheta_3^2(2x, q) + \vartheta_1^2(x, q)\,\vartheta_1^2(2x, q) - \vartheta^2(x, q)\,\vartheta^2(2x, q) - \vartheta_2^2(x, q)\,\vartheta_2^2(2x, q) = 0
$$

und setzt hierein einmal $x = \omega$ und q^5, das andere Mal $x = \frac{\pi}{5}$ und benutzen die Beziehungen (18) und (19), so ergeben sich noch 2 elegante rationale Beziehungen, nämlich:

$$
(21)\quad \begin{cases} \frac{q}{Q} + \frac{r}{R} - \frac{p}{P} = \frac{pqr}{PQR} \\ \frac{Q}{q} + \frac{R}{r} - \frac{P}{p} = 5\,\frac{PQR}{pqr} \quad \text{oder:} \\ \frac{PQ}{pq} + \frac{PR}{pr} - \frac{RQ}{rq} = 1 \\ \frac{pq}{PQ} + \frac{pr}{PR} - \frac{qr}{QR} = 5 \end{cases}
$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475 und 477; sowie auch § 3. (11) und (12)).

Wenn das System (18) zuerst mit PP, QQ, RR, sodann zweitens mit pp, qq, rr multiplicirt wird und man die Gleichungen in geeig-

neter Weise subtrahirt oder addirt, so dass die Beziehung (14) und § 1. (23) anwendbar wird, und ebenso mit (19) verfährt, so erhält man schliesslich noch folgende 4 Beziehungen:

$$
(22) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\sqrt{pP^3} + \sqrt{qQ^3} - \sqrt{rR^3} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(4pqr)^{\frac{5}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \\
&\sqrt{\frac{r^5}{R}} - \sqrt{\frac{q^5}{Q}} - \sqrt{\frac{r^5}{R}} = \tfrac{1}{2}\, \frac{(4pqr)^{\frac{5}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \\
&\text{und} \\
&\sqrt{Pp^3} - \sqrt{Qq^3} + \sqrt{Rr^3} = \tfrac{1}{2}\, \frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} \\
&\sqrt{\frac{Q^5}{q}} - \sqrt{\frac{P^5}{p}} - \sqrt{\frac{R^5}{r}} = \tfrac{1}{2}\, \frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} .
\end{aligned}
\right.
$$

Wir sind damit am Abschluss der grösstentheils (mit Ausnahme etwa von § 3. (10 – 24)) durch die Anleitung im mathematischen Seminar erreichten Resultate. Ich habe hierbei lediglich nur das redactionelle Verdienst einer einheitlichen und möglichst präcisen Darstellung, und spreche daher Herrn Prof. Schröter an dieser Stelle nochmals meinen Dank dafür aus, diese schönen und eleganten Resultate hiermit veröffentlichen zu dürfen. Die nachstehende Untersuchung in § 5. über die Darstellung der Theilwerthe der Fünf einzeln, deren Product wir bis jetzt erst in (18) und (19) kennen, ist zwar auch noch von diesen Uebungen aus angeregt, jedoch von mir ganz selbständig durchgeführt worden.

§ 5.

Die einzelnen Theilwerthe.

Wir haben vorher noch einige Hülfsformeln abzuleiten. Aus § 1. (22) ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
PQ\,&\{\vartheta(x, q^5)\,\vartheta_3(y, q^5) + \vartheta_3(x, q^5)\,\vartheta(y, q^5)\} \\
&= 2\,\vartheta\left(\frac{x+y}{2}, q^5\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2}, q^5\right)\vartheta_3\left(\frac{x+y}{2}, q^5\right)\vartheta_3\left(\frac{x-y}{2}, q^5\right).
\end{aligned}
$$

Setzt man hierin $x = 2\varpi$, $y = \varpi$ und reducirt die rechte Seite nach § 1. (4), so ist:

$$
\begin{aligned}
2q\,&\{\vartheta(2\varpi, q^5)\,\vartheta_3(\varpi, q^5) + \vartheta_3(2\varpi, q^5)\,\vartheta(\varpi, q^5)\} \\
&= -\frac{1}{PQ}\,4q^2\,\vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)\,\vartheta_2(\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi\; q^5) \\
&= rR\left(\frac{16pqPQ}{rrRR}\right)^{\frac{1}{6}}.
\end{aligned}
$$

Nun folgt aber aus § 4. (20) und (21)

$$rR\left(\frac{16pqPQ}{rrRR}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{r}{R}\,(PQ - pq) = Qp - Pq)\,.$$

Da dieses ebenso bei den beiden analogen Formeln statt hat, so haben wir:

$$(1)\quad\begin{cases} 2q\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,q^5)+\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\} = \frac{(p-P)(q+Q)-(q-Q)(p+P)}{2} \\ 2q\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5)-\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\} = \frac{(r-R)(p+P)-(p-P)(r+R)}{2} \\ 2q\{\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5)+\vartheta\,(2\varpi,q^5)\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\} = \frac{(r+R)(q+Q)-(r-R)(q-Q)}{2} \end{cases}$$

Aus § 4. (4) aber folgt

$$(2)\quad\begin{cases} 2q\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,q^5)-\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\} = \frac{(p-P)(q+Q)+(q-Q)(p+P)}{2} \\ 2q\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5)+\vartheta_2(\varpi,q^6)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\} = \frac{(r-R)(p+P)+(p-P)(r+R)}{2} \\ 2q\{\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5)-\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,q^5)\} = \frac{(r+R)(q+Q)+(r-R)(q-Q)}{2} \end{cases}$$

Durch die Addition und Subtraction der entsprechenden Gleichungen in (1) und (2) folgt:

$$(3)\quad\begin{cases} 4\,q\,\vartheta_3(\varpi,\,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,\,q^5) = (p-P)\,(q+Q) \\ 4\,q\,\vartheta\,(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,\,q^5) = (p+P)\,(Q-q) \\ 4\,q\,\vartheta_3(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,\,q^5) = (p+P)\,(r-R) \\ 4\,q\,\vartheta_2(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,\,q^5) = (p-P)\,(r+R) \\ 4\,q\,\vartheta\,(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,\,q^5) = (r+R)\,\,(q+Q) \\ 4\,q\,\vartheta_2(\varpi,\,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,\,q^5) = (r-R)\,\,(Q-q)\,. \end{cases}$$

Multiplicirt man hierin die 1. und 4. Gleichung und beachtet § 4. (3), so ist:

$$(p^2-P^2)\,(r-R)\,(Q-q) = (p-P)^2\,(q+Q)\,(r+R)\,,$$

also in Folge von § 4. (16):

$$(4)\quad\begin{cases} (p+P)\,(r-R)\,(Q-q) = \\ (p-P)\,(q+Q)\,(r+R) = 4\,PQR \end{cases}$$

eine Formel, die wir schon in § 4. (17) angeführt haben.

Ganz ähnliche Formeln, wie die in (3) und (4) bestehen aber auch für die reelle Periode. Setzt man nämlich in die 3 letzten Formeln § 4. (2) einmal $x = \frac{\pi}{5}$, $y = 0$ und dann $y = \frac{\pi}{5}$, $x = 0$, so resultiren folgende sechs Formeln:

$$\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{5},q\right)=PQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^{\mu}q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\,\vartheta(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta\left(\tfrac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{5},q\right)=PQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^{\mu}q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\,\vartheta(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{5},q\right)=RP+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\,\vartheta_2(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$-\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{5},q\right)=RP+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\,\vartheta_2(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$-\vartheta\left(\tfrac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{5},q\right)=RQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^{\mu}q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\,\vartheta(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{5},q\right)=RQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^{\mu}q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\,\vartheta(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\mu\varpi,q^5)\,.$$

Führt man diese Summen aus, so treten als Factoren $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\cos\frac{2\pi}{5}$ an die Glieder. Führt man schliesslich die Werthe dieser ein, nämlich $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, so wie die Werthe aus den Systemen (1) und (2), so folgt:

$$(5)\quad\begin{cases}4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,P+p)\,(\sqrt{5}\,Q-q)\\[4pt] 4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\\[4pt] 4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,R+r)\\[4pt] 4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,P+p)\,(r-\sqrt{5}\,R)\\[4pt] 4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,Q-q)\,(r-\sqrt{5}\,R)\\[4pt] 4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,R+r)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\,.\end{cases}$$

Multiplicirt man hier wieder die erste mit der vierten Formel und beachtet § 4. (5) so ist:

$$(6)\quad\begin{cases}(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,R+r)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\\ =(\sqrt{5}\,P+p)\,(\sqrt{5}\,R-r)\,(q-\sqrt{5}\,Q)=4\,pqr\end{cases}$$

eine ebenfalls schon § 4. (17) angegebene Beziehung. Es würde sich nun eine Darstellung für $\vartheta_3(\varpi,q^5)$ etc. ergeben, wenn man die Formeln § 1. (17) benutzt. Es wäre dann nämlich:

$$\vartheta_3{}^4(\varpi,q^5)-\vartheta_2{}^4(\varpi,q^5)=Q^3\,\vartheta(2\varpi,q^5)\,.$$

Multiplicirt man dieses mit $4^4 q^4 \vartheta^4(2\varpi, q^5)$, trägt links die Werthe aus (3) ein und reducirt durch die Beziehung (4), so ergiebt sich:

$$(7)\quad \begin{cases} 4^4 q^4\, \vartheta^5(2\varpi, q^5) = Q P^4 R^4 \left\{ \left(\frac{1}{r+R}\right)^4 - \left(\frac{1}{p+P}\right)^4 \right\} \\ 4^4 q\;\, \vartheta^5(\varpi, q^5) \;\;= Q P^4 R^4 \left\{ \left(\frac{1}{p-P}\right)^4 - \left(\frac{1}{r-R}\right)^4 \right\}. \end{cases}$$

Ebenso würden die übrigen Formeln für $\vartheta_3(\varpi, q)$ etc. sich ergeben. Da diese Beziehungen aber wegen der Differenz von vierten Potenzen ziemlich unbequem und auch mit den früheren Beziehungen schwierig in Einklang zu setzen sind, so übergehen wir die weitere Darstellung in dieser Form.

Setzen wir nun aber in die Formeln § 1. (22) einmal $x = y = \varpi$, und dann $x = y = 2\varpi$, so erhalten wir folgende Beziehungen:

$$(8)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta^2(\varpi, q^5)\;\; \vartheta_3^2(\varpi, q^5) \;\;= P^2 Q\, \vartheta(2\varpi, q^5) + Q^2 P\, \vartheta_3(2\varpi, q^5) \\ 2q^3\, \vartheta^2(2\varpi, q^5)\, \vartheta_3^2(2\varpi, q^5) = Q^2 P\, \vartheta_3(\varpi, q^5) - P^2 Q\, \vartheta(\varpi, q^5) \\ 2\,\vartheta_3^2(\varpi, q^5)\;\; \vartheta_2^2(\varpi, q^5) \;\;= P^2 R\, \vartheta_2(2\varpi, q^5) + R^2 P\, \vartheta_3(2\varpi, q^5) \\ 2q^3\, \vartheta_3^2(2\varpi, q^5)\, \vartheta_2^2(2\varpi, q^5) = P^2 R\, \vartheta_2(\varpi, q^5) + R^2 P\, \vartheta_3(\varpi, q^5) \\ 2\,\vartheta^2(\varpi, q^5)\;\; \vartheta_2^2(\varpi, q^5) \;\;= R Q^2\, \vartheta_2(2\varpi, q^5) + R^2 Q\, \vartheta(2\varpi, q^5) \\ 2q^3\, \vartheta^2(2\varpi, q^5)\, \vartheta_2^2(2\varpi, q^5) = Q^2 R\, \vartheta_2(\varpi, q^5) - R^2 Q\, \vartheta(\varpi, q^5). \end{cases}$$

Setzen wir nun zur augenblicklichen Abkürzung:

$$\begin{gathered} \vartheta(\varpi, q^5) = x, \qquad \vartheta_3(\varpi, q^5) = x_1 \\ \vartheta(2\varpi, q^5) = y, \qquad \vartheta_3(2\varpi, q^5) = y_1 \\ p^2 - P^2 = B_1 \qquad (Q - q)(P + p) = A \qquad P^2 Q = \alpha \\ Q^2 - q^2 = A_1 \qquad (p - P)(q + Q) = B \qquad Q^2 P = \beta \end{gathered}$$

und combiniren die 1. Gleichung in (8) mit (3) und mit § 4. (3), so haben wir:

$$\begin{aligned} 2\,x^2 x_1^2 &= \alpha y + \beta y_1 \\ 4q\, x_1\, y_1 &= B_1 \\ 4q\, x\; y &= A_1 \\ 4q\, x\; y_1 &= A; \end{aligned}$$

also hieraus:

$$\begin{aligned} 2x^2 x_1^2 &= \alpha y + \frac{\beta}{4qx} \cdot A \\ 8qx^3 x_1^3 &= 4q\alpha x y + \beta A = \alpha A_1 + \beta A = M. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\frac{x_1}{x} = \frac{B_1}{A} = L,$$

also:

$$8qx^5 = \frac{M}{L^2}, \qquad 8qx_1^5 = ML^3.$$

Trägt man alles ein, so folgt hieraus:

$$8q\vartheta^5(\varpi, q^5) = \frac{PQ(Q-q)^3}{(p-P)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}$$

$$8q\vartheta_3^5(\varpi, q^5) = \frac{PQ(p-P)^3}{(Q-q)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}.$$

Aus den obigen 4 Gleichungen ergiebt sich auch $\vartheta(2\varpi, q^5)$ und $\vartheta_3(2\varpi, q^5)$ jedoch in anderer Form wie $\vartheta(\varpi, q^5)$; wir werden später davon Gebrauch machen. In derselben Form aber liefert diese Grössen ein zweites System, nämlich:

$$\begin{aligned}
2q^3y^2y_1^2 &= \beta x_1 - \alpha x\\
4q\,x_1y_1 &= B_1\\
4q\,x\,y &= A_1\\
4q\,x_1y &= B.
\end{aligned}$$

Verfährt man nun mit den andern beiden Gleichungen in (8) ebenso und combinirt sie immer mit (3) und § 4. (3), so ergiebt sich schliesslich für jeden Theilwerth eine doppelte Darstellung in der Form:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
8q\,\vartheta_3^5(\varpi, q^5) &= \frac{PQ(p-P)^3}{(Q-q)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}\\
&= \frac{PR(p+P)^3}{(r+R)^2}\{R(p-P)+P(r-R)\}\\
8q^4\vartheta_3^5(2\varpi, q^5) &= \frac{PQ(p+P)^3}{(Q+q)^2}\{Q(p-P)-P(Q-q)\}\\
&= \frac{PR(p-P)^3}{(r-R)^2}\{R(p+P)+P(r+R)\}\\
8q\,\vartheta^5(\varpi, q^5) &= \frac{PQ(Q-q)^3}{(p-P)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}\\
&= \frac{RQ(q+Q)^3}{(r-R)^2}\{R(Q-q)+Q(r+R)\}\\
8q^4\vartheta^5(2\varpi, q^5) &= \frac{PQ(q+Q)^3}{(p+P)^2}\{Q(p-P)-P(Q-q)\}\\
&= \frac{RQ(Q-q)^3}{(r+R)^2}\{Q(r-R)-R(q+Q)\}\\
8q\,\vartheta_2^5(\varpi, q^5) &= \frac{PR(r+R)^3}{(p+P)^2}\{R(p-P)+P(r-R)\}\\
&= \frac{QR(r-R)^3}{(q+Q)^2}\{R(Q-q)+Q(r+R)\}\\
8q^4\vartheta_2^5(\varpi, q^5) &= \frac{PR(r-R)^3}{(p-P)^2}\{R(p+P)+P(r+R)\}\\
&= \frac{QR(r+R)^3}{(Q-q)^2}\{Q(r-R)-R(Q+q)\}.
\end{aligned}\right.$$

Beachten wir nun, dass jedes der Systeme von je 4 Gleichungen immer

noch 2 Wurzeln liefert, so ergiebt sich eine weitere Art der Darstellung:

$$
(10)\quad
\left\{
\begin{aligned}
4^4 q^4 \vartheta_3{}^5(2\varpi, q^5) &= \frac{2(Q-q)^2}{PQ(p-P)^3} \cdot \frac{(p^2-P^2)^5}{P(q+Q)+Q(p+P)} \\
&= \frac{2(r+R)}{PR(p+P)^3} \cdot \frac{(p^2-P^2)^5}{R(p-P)+P(r-R)} \\
4^4 q^4 \vartheta_3{}^5(\varpi, q^5) &= \frac{2(Q+q)^2}{PQ(p+P)^3} \cdot \frac{(p^2-P^2)^5}{Q(p-P)-P(Q-q)} \\
&= \frac{2(r-R)^2}{PR(p-P)^3} \cdot \frac{(p^2-P^2)^5}{R(p+P)+P(r+R)} \\
4^4 q^4 \vartheta^5 (2\varpi, q^5) &= \frac{2(p-P)^2}{PQ(Q-q)^3} \cdot \frac{(Q^2-q^2)^5}{P(q+Q)+Q(p+P)} \\
&= \frac{2(r-R)^2}{RQ(q+Q)^3} \cdot \frac{(Q^2-q^2)^5}{R(Q-q)+Q(r+R)} \\
4^4 q\ \vartheta^5 (\varpi, q^5) &= \frac{2(p+P)^2}{PQ(q+Q)^3} \cdot \frac{(Q^2-q^2)^5}{Q(p-P)-P(Q-q)} \\
&= \frac{2(r+R)^2}{PQ(Q-q)^3} \cdot \frac{(Q^2-q^2)^5}{Q(r-R)-R(q+Q)} \\
4^4 q^4 \vartheta_2{}^5(2\varpi, q^5) &= \frac{2(p-P)^2}{PR(r-R)^3} \cdot \frac{(r^2-R^2)^5}{R(p+P)+P(r+R)} \\
&= \frac{2(Q-q)^2}{RQ(r+R)^3} \cdot \frac{(r^2-R^2)^5}{Q(r-R)-R(q+Q)} \\
4^4 q^4 \vartheta_2{}^5(\varpi, q^5) &= \frac{2(p+P)^2}{PR(r+R)^3} \cdot \frac{(r^2-R^2)^5}{R(p-P)+P(r-R)} \\
&= \frac{2(Q+q)^2}{RQ(r-R)^3} \cdot \frac{(r^2-R^2)^5}{R(Q-q)+Q(r+R)} .
\end{aligned}
\right.
$$

Nimmt man also noch (7) hinzu, so haben wir 5 verschiedene Darstellungen für unsere Grössen. Aus diesen Formeln lassen sich die früher erhaltenen rectificiren und sie enthalten eine Fülle der eigenthümlichsten Beziehungen, wenn man erwägt, dass ja p, P etc. sämmtlich unendliche Producte und Summen vorstellen.

Auch die noch fehlenden beiden Werthe für $\vartheta_1(\varpi, q^5)$ und $\vartheta_1(2\varpi, q^5)$ ergeben sich jetzt. Aus § 1. (19) folgt:

$$2^5\, \vartheta^5(\varpi, q^5)\, \vartheta_2{}^5(\varpi, q^5)\, \vartheta_3{}^5(\varpi, q^5) = P^5 Q^5 R^5 \frac{\vartheta_1{}^5(2\varpi, q^5)}{\vartheta_1{}^5(\varpi, q^5)} .$$

Setzt man hierein die passenden Werthe aus (9), bezeichnen den Factor:

$$\{P(q+Q)+Q(p+P)\}\,\{R(Q-q)+Q(r+R)\}\,\{R(p-P)+P(r-R)\} = F$$

und beachten, dass nach (4):

$$(p-P)(q+Q)(r+R) = (p+P)(Q-q)(r-R) = 4PQR,$$

so ist:

$$4 q^3\, \vartheta_1{}^5(2\varpi, q^5) \cdot P^2 Q^2 R^2 = F\, \vartheta_1{}^5(\varpi, q^5)$$

also, da nach § 4. (12):

$$q^5 \vartheta_1{}^5(\varpi, q^5)\, \vartheta_1{}^5(2\varpi, q^5) = -\left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{5}{3}},$$

so folgt:

$$(11)\quad \begin{cases} q\, \vartheta_1{}^5(\varpi, q^5) = i\, \dfrac{2PQR}{\sqrt{F}} \cdot \left\{\dfrac{pqr\,PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}} \\ q^4 \vartheta_1{}^5(2\varpi, q^5) = i\, \dfrac{\sqrt{F}}{2PQR} \cdot \left\{\dfrac{pqr\,PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}}. \end{cases}$$

Es bleiben nur noch dieselben Beziehungen für die reelle Periode zu untersuchen, und zwar mit Hülfe von (5). Auch hier konnte wiederum ein mit (7) analoges System aufgestellt werden. Dieses übergehen wir. Analog dem System (8) ergiebt sich nun gleichfalls aus § 1. (22), wenn einmal $x = y = \frac{\pi}{5}$, das andere Mal $x = y = \frac{2\pi}{5}$:

$$(12)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \vartheta_3{}^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = q^2 p\, \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + p^2 q\, \vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \vartheta_3{}^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = q^2 p\, \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) + p^2 q\, \vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta_2{}^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \vartheta_3{}^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = r^2 p\, \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + p^2 r\, \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta_2{}^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \vartheta_3{}^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = r^2 p\, \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) - p^2 r\, \vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \vartheta_2{}^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = r^2 q\, \vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + q^2 r\, \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \vartheta_2{}^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = r^2 q\, \vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right) - q^2 r\, \vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right). \end{cases}$$

Setzen wir wieder für den Augenblick:

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = x, \quad \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = x_1, \quad \vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = y, \quad \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = y_1,$$

$$5QQ - qq = A_1, \quad 5PP - pp = B_1, \quad (\sqrt{5}P - p)(\sqrt{5}Q + q) = B,$$

so haben wir:

$$\begin{aligned} 2\,x^2 x_1{}^2 &= \alpha y + \beta y_1 \\ 4\,xy &= A_1 \\ 4\,x_1 y &= B_1 \\ 4\,x y_1 &= B \end{aligned}$$

und hieraus wieder:

$$8\,x^3 x_1{}^3 = \alpha A_1 + \beta B = M, \quad \frac{x_1}{x} = \frac{B_1}{B} = L,$$

$$8\,x^5 = \frac{M}{L^2}, \quad 8\,x_1{}^5 = ML^3.$$

Setzt man nun wieder hierein die Werthe, so erhält man analoge Formeln wie in (9). Da dasselbe Raisonnement für die übrigen For-

meln in (12) gilt, so können wir sofort das resultirende System hinschreiben:

$$
(13)\left\{\begin{aligned}
8\,\vartheta_3^5\left(\frac{\pi}{5},q\right) &= \frac{pq(\sqrt{5}\,P+p)^3}{(\sqrt{5}\,Q+q)^2}\left\{p(\sqrt{5}\,Q-q)+q(\sqrt{5}\,P-p)\right\}\\
&= \frac{pr(\sqrt{5}\,P-p)^3}{(r-\sqrt{5}\,R)^2}\left\{r(\sqrt{5}\,P+p)+p(\sqrt{5}\,R+r)\right\}\\
8\,\vartheta_3^5\left(\frac{2\pi}{5},q\right) &= \frac{pq(\sqrt{5}\,P-p)^3}{(\sqrt{5}\,Q-q)^2}\left\{q(\sqrt{5}\,P+p)+p(\sqrt{5}\,Q+q)\right\}\\
&= \frac{pr(\sqrt{5}\,P+p)^3}{(\sqrt{5}\,R+r)^2}\left\{r(\sqrt{5}\,P-p)-p(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\\
8\,\vartheta^5\left(\frac{\pi}{5},q\right) &= \frac{pq(\sqrt{5}\,Q+q)^3}{(\sqrt{5}\,P+p)^2}\left\{p(\sqrt{5}\,Q-q)+q(\sqrt{5}\,P-p)\right\}\\
&= \frac{qr(\sqrt{5}\,Q-q)^3}{(\sqrt{5}\,R+r)^2}\left\{r(\sqrt{5}\,Q+q)+q(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\\
8\,\vartheta^5\left(\frac{2\pi}{5},q\right) &= \frac{qr(\sqrt{5}\,Q-q)^3}{(\sqrt{5}\,P-p)^2}\left\{q(\sqrt{5}\,P+p)+p(\sqrt{5}\,Q+q)\right\}\\
&= \frac{qr(\sqrt{5}\,Q+q)^3}{(r-\sqrt{5}\,R)^2}\left\{-q(\sqrt{5}\,R+r)+r(\sqrt{5}\,Q-q)\right\}\\
8\,\vartheta_2^5\left(\frac{\pi}{5},q\right) &= \frac{pr(r-\sqrt{5}\,R)^3}{(\sqrt{5}\,P-p)^2}\left\{r(\sqrt{5}\,P+p)+p(\sqrt{5}\,R+r)\right\}\\
&= \frac{qr(\sqrt{5}\,R+r)^3}{(\sqrt{5}\,Q-q)^2}\left\{r(\sqrt{5}\,Q+q)+q(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\\
8\,\vartheta_2^5\left(\frac{2\pi}{5},q\right) &= \frac{pr(\sqrt{5}\,R+r)^3}{(\sqrt{5}\,P+p)^2}\left\{r(\sqrt{5}\,P-p)-p(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\\
&= \frac{qr(r-\sqrt{5}\,R)^3}{(\sqrt{5}\,Q+q)^2}\left\{r(\sqrt{5}\,Q-q)-q(\sqrt{5}\,R+r)\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Die den Formeln (10) analoge Darstellung übergehen wir der Kürze halber; sie ist aus (13) leicht herstellbar.

Schliesslich folgt noch aus § 1. (19):

$$2^9\,\vartheta^5\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2^5\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3^5\left(\frac{\pi}{5},q\right) = 16\,p^5q^5r^5\,\frac{\vartheta_1^5\left(\frac{2\pi}{5},q\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5},q\right)}.$$

Trägt man nun passende Werthe aus (13) ein, dergestalt, dass sich nach (6) gewisse Factoren fortheben und setzen:

$$\left\{p(\sqrt{5}\,Q-q)+q(\sqrt{5}\,P-p)\right\}\left\{r(\sqrt{5}\,Q+q)+q(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\cdot\left\{r(\sqrt{5}\,P+p)+p\sqrt{5}\,R+r\right\}=G,$$

so ist:

$$4\,\vartheta_1^5\left(\frac{2\pi}{5},q\right)\cdot p^2q^2\cdot r^2 = G\,\vartheta_1^5\left(\frac{\pi}{5},q\right)\cdot$$

Nun folgt aber aus § 4. (6) und (12):

$$\vartheta_1^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \vartheta_1^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = +\, 25 \sqrt{5} \left(\frac{pqr\,PQR}{4}\right)^{\frac{5}{3}},$$

also ist:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_1^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) &= \frac{10\,pqr}{\sqrt{G}} \sqrt[4]{5} \left\{\frac{pqr\,PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}} \\ \vartheta_1^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) &= \frac{5\sqrt{G}}{2\,pqr} \sqrt[4]{5} \left\{\frac{pqr\,PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}}. \end{aligned} \right.$$

§ 6.

Die Siebentheilung.

Gauss hat für die Sieben keine den im § 3. und § 4. dargestellten analoge Beziehungen angegeben. Wir werden zunächst versuchen, solche Relationen, die jenen früheren ähnlich sind, auch hier abzuleiten. Gemäss § 1. (25) bedeutet dann hier:

$$P = \vartheta_3(0, q^7), \quad Q = \vartheta(0, q^7), \quad R = \vartheta_2(0, q^7).$$

Wenn wir in § 1. (9) $\lambda = 7$ setzen: so resultirt:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\vartheta_3(x, q)\, \vartheta_3(y, q^7) \\ &\quad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_3(x + y - \mu\varpi, q^8)\, \vartheta_3(7x - y - 7\mu\varpi, q^{56}) \\ &\vartheta(x, q)\, \vartheta(y, q^7) \\ &\quad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_3(x + y - \mu\varpi, q^8)\, \vartheta_3(7x - y - 7\mu\varpi, q^{56}) \\ &\vartheta_2(x, q)\, \vartheta_2(y, q^7) \\ &\quad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_2(x + y - \mu\varpi, q^8)\, \vartheta_3(7x - y - 7\mu\varpi, q^{56}) \\ &\vartheta_1(x, q)\, \vartheta_1(y, q^7) \\ &\quad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^{\mu+1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_2(x + y - \mu\varpi, q^8)\, \vartheta_3(7x - y - 7\mu\varpi, q^{56}). \end{aligned} \right.$$

Durch Addition und Subtraction der beiden ersten Formeln ergiebt sich:

$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^7)+\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^7)$$
$$=2\sum_{\mu=0}^{\mu=3} q^{4\mu\mu}e^{4\mu i x}\,\vartheta_3(x+y-2\mu\varpi,q^8)\,\vartheta_3(7x-y-14\mu\varpi,q^{56})$$

$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^7)-\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^7)$$
$$=2\sum_{\mu=0}^{\mu=3} q^{(2\mu+1)^2}e^{2(2\mu+1)ix}\,\vartheta_3(x+y-(2\mu+1)\varpi,q^8)$$
$$\cdot\,\vartheta_3(7x-y-7(2\mu+1)\mu\varpi,q^{56})\,.$$

Wenn man nun rechts die Summen ausführt und die Moduln q^{56} und q^8 mit Hülfe der bekannten Formeln:

$$2\,\vartheta_3\,(2\,x,\,q^4)=\vartheta_3\,(x,\,q)+\vartheta\,(x,\,q)$$
$$2\,\vartheta_2\,(2\,x,\,q^4)=\vartheta_3\,(x,\,q)-\vartheta\,(x,\,q)\quad\text{in § 1. (6)}$$

auf die Moduln q^{14} resp. q^2 reducirt, so erhält man nach Anwendung der Periodenformeln in § 1. (3) und (4):

$$\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)+\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_3(7x+y,q^{14})+\vartheta(7x+y,q^{14})\right\}\left\{\vartheta_3(x-y,q^2)+\vartheta(x-y,q^2)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_2(7x+y,q^{14})+i\vartheta_1(7x+y,q^{14})\right\}\left\{\vartheta_3(x-y,q^2)+i\,\vartheta(x-y,q^2)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_3(7x+y,q^{14})-\vartheta(7x+y,q^{14})\right\}\left\{\vartheta_3(x-y,q^2)-\vartheta(x-y,q^2)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_2(7x+y,q^{14})-i\vartheta_1(7x+y,q^{14})\right\}\left\{\vartheta_3(x-y,q^2)-i\vartheta(x-y,q^2)\right\}$$

$$\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)-\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)$$
$$=\tfrac{1}{2}\,q e^{4ix}\left\{\vartheta_3\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)+\vartheta\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{\vartheta_3\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)+\vartheta\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,q e^{4ix}\left\{\vartheta_2\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)+i\,\vartheta_1\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{\vartheta_2\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)+i\,\vartheta_1\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,q e^{4ix}\left\{\vartheta_3\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)-\vartheta\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{\vartheta_3\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)-\vartheta\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,q e^{4ix}\left\{\vartheta_2\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)-i\,\vartheta_1\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{\vartheta_2\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)-i\,\vartheta_1\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}\,.$$

Hieraus folgt:

$$\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3\,(2x,q)\,\vartheta_3\,(2y,q^7)+\vartheta\,(2x,q)\,\vartheta\,(2y,q^7)\\&\quad=\vartheta_3\,(x-y,\,q^2)\,\vartheta_3\,(7\,x+y,\,q^{14})+\vartheta\,(x-y,\,q^2)\,\vartheta\,(7\,x+y,\,q^{14})\\&\quad+\vartheta_2\,(x-y,\,q^2)\,\vartheta_2\,(7\,x+y,\,q^{14})-\vartheta_1\,(x-y,\,q^2)\,\vartheta_1\,(7\,x+y,\,q^{14})\end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)-\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)\\&\quad=qe^{4ix}\Big\{\vartheta_3\Big(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta_3\Big(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)\\&\qquad\qquad+\vartheta\Big(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta\Big(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)\\&\qquad+\vartheta_2\Big(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta_2\Big(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)\\&\qquad\qquad-\vartheta_1\Big(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta_1\Big(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Verfährt man mit den letzten beiden Formeln in (1) ebenso, oder auch, setzt man in die eben erhaltenen beiden Resultate für y $y+\frac{\varpi}{2}$ ein und berücksichtigt die Beziehungen § 1. (4), so ergiebt sich:

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^7)+\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^7)\\&\quad=\vartheta_3(x-y,q^2)\,\vartheta_3(7x+y,q^{14})-\vartheta(x-y,q^2)\,\vartheta(7x+y,q^{14})\\&\quad+\vartheta_2(x-y,q^2)\,\vartheta_2(7x+y,q^{14})+\vartheta_1(x-y,q^2)\,\vartheta_1(7x+y,q^{14})\\&\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^7)-\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^7)\\&\quad=qe^{4ix}\Big\{\vartheta_3\Big(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta_3\Big(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)\\&\qquad\qquad-\vartheta\Big(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta\Big(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)\\&\qquad+\vartheta_2\Big(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta_2\Big(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)\\&\qquad\qquad+\vartheta_1\Big(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta_1\Big(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big).\end{aligned}\right.$$

Dass in den Formeln für die Differenzen in (2) und (3) rechts die Argumente noch mit $\frac{\varpi}{2}$ resp. $\frac{7\varpi}{2}$ behaftet sind, rührt daher, dass in den ausgeführten Summen rechts ungerade Vielfache der Periode ϖ vorkommen.

Aus diesen Beziehungen (2) und (3) erhalten wir für $x=y=0$:

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^7)+\vartheta(0,q)\,\vartheta(0,q^7)\\&\quad=\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14})+\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14})+\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14})\\&\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(0,q^7)\\&\quad=\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14})-\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14})+\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}),\end{aligned}\right.$$

ferner aus (3):

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(0,q^7)-\vartheta(0,q)\,\vartheta(0,q^7)\\&\quad=2q\Big\{\vartheta_3\Big(\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta_3\Big(\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)+\vartheta\Big(\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta\Big(\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)\Big\}\\&\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(0,q^7)\\&\quad=2q\Big\{\vartheta_3\Big(\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta_3\Big(\frac{7\varpi}{2},q^{14}\Big)-\vartheta\Big(\frac{\varpi}{2},q^2\Big)\,\vartheta\Big(\frac{7\varpi}{2},q^{11}\Big)\Big\},\end{aligned}\right.$$

endlich für $x = y = \frac{\pi}{8}$ aus den ersten Formeln in (2) und (3):

$$(6)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}; q^7\right) \\ \qquad = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14}) + \vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}) - \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}) \\ 2\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q^7\right) \\ \qquad = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14}) - \vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}) - \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}). \end{cases}$$

Setzt man in die Formeln (4) und (6) statt q $q^{\frac{1}{2}}$ und führt die Werthe aus § 1. (14) für $\vartheta_2\,(0, q^{\frac{1}{2}})$, so wie aus § 1. (15) für $\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right)$ etc. ein, so ergeben sich sofort folgende 3 Beziehungen:

$$(7)\quad \begin{cases} pP - qQ + rR = 2\sqrt{rpRP} \\ pP + qQ - rR = 2\sqrt{pqPQ} \\ pP - qQ - rR = 2\sqrt{rqRQ}, \end{cases}$$

also hieraus:

$$(8)\quad (pP + qQ - rR)\,(pP - qQ + rR)\,(pP - qQ - rR) \\ = 8\,pqrPQR,$$

also auch:

$$(9)\quad \begin{cases} pP = \sqrt{rpRP} + \sqrt{pqPQ} \\ qQ = \sqrt{pqPQ} - \sqrt{rqRQ} \\ rR = \sqrt{prPR} - \sqrt{rqRQ}. \end{cases}$$

Aus allen 3 letzten Formeln ergiebt sich folgende Grundbeziehung:

$$(10)\quad \sqrt{pP} = \sqrt{qQ} + \sqrt{rR}.$$

Diese Formel enthält bekanntlich die Modulargleichung für die Sieben. Setzt man nämlich die Werthe $P = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}$, $p = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\pi}}$ etc., so ist:

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa_1\lambda_1} = 1$$

(vgl. Schröter, de aequationibus modularibus S. 18).

Es ist interessant, diese Formel (10) mit der in § 2. (5) für die Drei erhaltenen zu vergleichen, denn dort war bekanntlich:

$$pP = qQ + rR.$$

Ziehen wir nun die Formeln (6) von einander ab, so folgt nach Benutzung von § 1. (15):

$$\sqrt{\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14})}\,\left\{\sqrt{\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14})} - \sqrt{\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(,0q^{14})}\right\} \\ = 2\,\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}).$$

Also mit Benutzung von § 1. (14):

$$\sqrt[4]{pqPQ}\left\{\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2+q^2)(P^2+Q^2)}-\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2-q^2)(P^2-Q^2)}\right\}=2\sqrt{pqPQ}.$$

Die 1. Formel in (5) aber liefert nach dem Eintragen aus § 1. (15):

$$\sqrt{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}-\sqrt{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}$$
$$=2\sqrt[4]{\frac{rpRP}{4}}\left\{\sqrt[4]{(r^2+p^2)(R^2+P^2)}+\sqrt[4]{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}\right\}.$$

Nach einer kleinen Umformung in den letzten beiden Formeln erhalten wir dann:

$$(11)\left\{\begin{array}{l}\sqrt[4]{(pp+rr)(PP+RR)}-\sqrt[4]{(pp-rr)(PP-RR)}=\sqrt[4]{4rpRP}\\ \sqrt[4]{(pp+qq)(PP+QQ)}-\sqrt[4]{(pp-qq)(PP-QQ)}=\sqrt[4]{4pqPQ}.\end{array}\right.$$

Quadrirt man beide Formeln und benutzt (7), so ergeben sich Beziehungen, deren eine man auch aus (4) erhält, wenn man statt q $q^{\frac{1}{2}}$ schreibt. Es ist nämlich:

$$(12)\left\{\begin{array}{l}pP+qQ+rR=\sqrt{(pp+rr)(PP+RR)}+\sqrt{(pp-rr)(PP-RR)}\\ \qquad=\sqrt{(pp+qq)(PP+QQ)}+\sqrt{(pp-qq)(PP-QQ)}.\end{array}\right.$$

Quadrirt man noch einmal und beachtet § 1. (23), so ergiebt sich folgende eigenthümliche Beziehung:

$$(13)\qquad (pP+qQ+rR)^2=2ppPP+2rrRR+2qqQQ.$$

Es sind damit 3 Functionen gefunden, die der Functionalgleichung genügen:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2.$$

Setzen wir nun in (2) und (3):

$$x=\frac{\varpi}{8},\quad y=\frac{-7\varpi}{8},\ \text{oder auch}\ y=\frac{\pi}{4},$$

so ergiebt sich:

$$(14)\left\{\begin{array}{l}q^{\frac{1}{2}}\left\{\vartheta_3\left(\frac{\varpi}{4},q\right)\vartheta_3\left(\frac{7\varpi}{4},q\right)+\vartheta\left(\frac{\varpi}{4},q\right)\vartheta\left(\frac{7\varpi}{4},q^7\right)\right\}\\ \qquad=\vartheta_3(0,q^{14})\,\vartheta_2(0,q^2)+\vartheta_2(0,q^{14})\,\vartheta_3(0,q^2)\\ 2\left\{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4},q^2\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4},q^{14}\right)+\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4},q^2\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4},q^{14}\right)\right\}\\ \qquad=\vartheta_3(0,q)\,\vartheta(0,q^7)+\vartheta(0,q)\,\vartheta_3(0,q^7).\end{array}\right.$$

Aus der ersten Formel in (14) folgt:

$$\sqrt[4]{4rpRP}\left\{\sqrt[4]{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}+\sqrt[4]{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}\right\}$$
$$=\sqrt{(p^2-q^2)(P^2+Q^2)}+\sqrt{(p^2+q^2)(P^2-Q^2)},$$

also hieraus:

$$\sqrt{prPR}\,\{\sqrt{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}+\sqrt{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}+2qQ\}$$
$$=(p^2P^2+r^2R^2-q^2Q^2)\,,$$

oder mit Hülfe von (12):

$$(pP+3\,qQ+rR)\sqrt{prPR}=p^2P^2+r^2R^2-q^2Q^2\,.$$

Eine analoge Formel ergiebt sich aus der zweiten Gleichung in (14). Wenn man statt q $q^{\frac{1}{2}}$ setzt, so ist:

$$\sqrt{(p^2+r^2)(P^2-R^2)}+\sqrt{(p^2-r^2)(P^2+R^2)}$$
$$=2\sqrt[4]{pqPQ}\,\{\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2+q^2)(P^2+Q^2)}+\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2-q^2)(P^2-Q^2)}\}\,.$$

Erhebt man dieses wiederum ins Quadrat und berücksichtigt (12), so folgt:

$$p^2P^2-r^2R^2+q^2Q^2=\sqrt{pqPQ}\,\{pP+3\,rR+qQ\}\,.$$

Zu diesen beiden Formeln bietet sich aus (13) noch eine dritte analoge dar, und wir haben dann:

$$(15)\quad\begin{cases} ppPP-rrRR+qqQQ=\sqrt{pqPQ}\,\{pP+3rR+qQ\} \\ ppPP+rrRR-qqQQ=\sqrt{prPR}\,\{pP+rR+3qQ\} \\ ppPP-rrRR-qqQQ=\sqrt{rqRQ}\,\{3pP+rR+qQ\}\,, \end{cases}$$

oder aber mit Hülfe von (7):

$$(16\quad\begin{cases} ppPP-rrRR+qqQQ=(pP-rR+qQ)(pP+3rR+qQ) \\ ppPP+rrRR-qqQQ=(pP+rR-qQ)(pP+rR-3qQ) \\ ppPP-rrRR-qqQQ=(pP-rR-qQ)(3pP+rR+qQ). \end{cases}$$

§ 7.

Die Theilwerthe.

Wir gehen nun aus von der allgemeinsten Formel, nämlich der in § 1. (7). Setzen wir dort $r=1$, $s=2$, $p=3$, $t=1$, so ist die Bedingung erfüllt, dass r, s, p, t keinen gemeinsamen Factor haben sollen. Dann resultirt:

$$(1)\quad \vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^3)$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu}e^{2\mu i x}\,\vartheta_3(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_3(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\,.$$

Wenn wir in dieser Formel das eine resp. beide Argumente um die halbe Periode verändern und gemäss den Grundformeln § 1. (4) reduciren, so folgt:

$$
(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^3)\\
&\quad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_3(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^3)\\
&\quad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}(q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_2(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3)\\
&\quad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_1(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&\vartheta(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3)\\
&\quad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3)\\
&\quad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&-\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3)\\
&\quad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Wir könnten die Anzahl dieser Formeln noch erheblich vermehren, begnügen uns aber der Kürze halber mit diesen, die wir im Folgenden brauchen werden.

Wenn man nun in den letzten 3 Formeln in (2) setzt $x=\varpi$, $y=2\varpi$, so wird man bemerken, dass nach gehöriger Vereinfachung mit Hülfe von § 1. (3) rechts die Grössen $\vartheta_1(\varpi,q^7)$, $\vartheta_1(2\varpi,q^7)$, $\vartheta_1(3\varpi,q^7)$ auftreten, und zwar multiplicirt mit der Summe zweier anderer ϑ-Functionen, deren Modul q^{21} ist.

Es ergiebt sich:

$$
(3)\quad\left\{\begin{aligned}
-\vartheta(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)&=\vartheta_1(\varpi,q^7)\left\{\vartheta(2\varpi,q^{21})+q\,\vartheta(5\varpi,q^{21})\right\}\\
&+\vartheta_1(2\varpi,q^7)\left\{q\vartheta(4\varpi,q^{21})-q^5\vartheta(10\varpi,q^{21})\right\}\\
&-\vartheta_1(3\varpi,q^7)\left\{q\vartheta(\varpi,q^{21})+q^4\vartheta(8\varpi,q^{21})\right\}\\
-\vartheta_2(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3&=\vartheta_1(\varpi,q^7)\left\{\vartheta_2(2\varpi,q^{21})-q\,\vartheta_2(5\varpi,q^{21})\right\}\\
&+\vartheta_1(2\varpi,q^7)\left\{q\vartheta_2(4\varpi,q^{21})-q^5\vartheta_2(10\varpi,q^{21})\right\}\\
&+\vartheta_1(3\varpi,q^7)\left\{q\vartheta_2(\varpi,q^{21})-q^4\vartheta_2(8\varpi,q^{21})\right\}\\
\vartheta_3(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)&=\vartheta_1(\varpi,q^7)\left\{\vartheta_3(2\varpi,q^{21})-q\,\vartheta_3(5\varpi,q^{21})\right\}\\
&+\vartheta_1(2\varpi,q^7)\left\{q\vartheta_3(4\varpi,q^{21})-q^5\vartheta_3(10\varpi,q^{21})\right\}\\
&+\vartheta_1(3\varpi,q^7)\left\{q\vartheta_3(\varpi,q^{21})-q^4\vartheta_3(8\varpi,q^{21})\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Es ergeben sich aber dieselben Formeln in der Klammer merkwürdiger Weise aus der Dreitheilung.

Aus den Formeln § 2. (3) ergeben sich nach Veränderung der Argumente um die halben Perioden und Reduction nach den Formeln § 1. (4) folgende Beziehungen, wenn man in § 2. (3) für q q^7 schreibt:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
iq^{-\frac{7}{2}} e^{-iy} \vartheta_2(x,q^7)\,\vartheta(y,q^{14}) = {} & \vartheta_1(x+y-7\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42}) \\
& + q^7 e^{2ix} \vartheta_1(x+y-14\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42}) \\
& + q^{28} e^{4ix} \vartheta_1(x+y-21\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42}) \\
iq^{-\frac{7}{2}} e^{-iy} \vartheta_3(x,q^7)\,\vartheta_1(y,q^{14}) = {} & \vartheta(x+y-7\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42}) \\
& + q^7 e^{2ix} \vartheta(x+y-14\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42}) \\
& + q^{28} e^{4ix} \vartheta(x+y-21\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42}) \\
iq^{-\frac{7}{2}} e^{-iy} \vartheta(x,q^7)\,\vartheta_1(y,q^{14}) = {} & \vartheta_3(x+y-7\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42}) \\
& - q^7 e^{2ix} \vartheta_3(x+y-14\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42}) \\
& + q^{28} e^{4ix} \vartheta_3(x+y-21\varpi,q^{21})\,\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42}) \\
-iq^{-\frac{7}{2}} e^{-iy} \vartheta_1(x,q^7)\,\vartheta_1(y,q^{14}) = {} & \vartheta_2(x+y-7\varpi,q^{14})\,\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42}) \\
& - q^7 e^{2ix} \vartheta_2(x+y-14\varpi,q^{14})\,\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42}) \\
& + q^{28} e^{4ix} \vartheta_2(x+y-21\varpi,q^{14})\,\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42}).
\end{aligned}
\right.
$$

Man setze nun in jede dieser Formeln:

1) $x=\varpi$, $y=2\varpi$; 2) $x=2\varpi$, $y=4\varpi$; 3) $x=3\varpi$, $y=6\varpi$,

so fällt vermöge des Baues dieser Formeln rechts immer das dritte Glied fort, wenn man beachtet, dass nach § 1. (4):

$$\vartheta(21\varpi, q^{42}) = 0.$$

Da nun aber ebenfalls aus § 1. (4) folgt, dass

$$\vartheta(7\varpi, q^{42}) = iq^{\frac{7}{2}}\,\vartheta_1(14\varpi, q^{42}),$$

so wird sich z. B. aus der ersten Formel ergeben:

$$-\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^{14}) = q^5\left\{\vartheta_1(4\varpi,q^{21}) + q^4\vartheta_1(10\varpi,q^{21})\right\}\vartheta_1(14\varpi,q^{42}).$$

Es wird in allen Formeln auf der rechten Seite der Factor $\vartheta_1(14\varpi,q^{42})$ auftreten, während links entweder $\vartheta(2\varpi,q^{14})$, $\vartheta(4\varpi,q^{14})$, $\vartheta(6\varpi,q^{14})$, oder $\vartheta_1(2\varpi,q^{14})$, $\vartheta_1(4\varpi,q^{14})$, $\vartheta_1(6\varpi,q^{14})$ steht.

Nun ist aber nach § 1. (13):

$$\vartheta(0,q^{42})\,\vartheta_1(14\varpi,q^{42}) = \vartheta_1(7\varpi,q^{21})\,(\vartheta_2(7\varpi,q^{21})$$
$$\vartheta(0,q^{14})\,\vartheta(2\varpi,q^{14}) = \vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7) \text{ etc.}$$

Somit tritt in allen 12 Formeln auf der rechten Seite der Factor:

$$\vartheta_1(7\varpi,q^{21})\,\vartheta_2(7\varpi,q^{21})\,\frac{\vartheta(0,q^{14})}{\vartheta(0,q^{42})}$$

auf. Nennen wir seinen reciproken Werth A und beachten, dass nach § 1. (14):

$$\vartheta\,(0, q^{14}) = \sqrt{PQ}$$
$$\vartheta\,(0, q^{12}) = \sqrt{\vartheta\,(0, q^{21})\;\vartheta_3\,(0, q^{21})}\,,$$

nach § 2. (11):

$$i q^{\frac{7}{3}}\,\vartheta_1\,(7\,\varpi, q^{21}) = \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$q^{\frac{7}{3}}\,\vartheta_2\,(7\,\varpi, q^{21}) = \sqrt{\frac{\vartheta\,(0, q^{21})\;\vartheta_3\,(0, q^{21})}{PQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so wird:

$$A = i q^{\frac{14}{3}}\left(\frac{2}{PQR}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Wir sehen also, dass sich die für die Transformation des 7. Grades unbrauchbaren Grössen $\vartheta\,(0, q^{21})$ und $\vartheta_3\,(0, q^{21})$ herausheben, und hierauf musste eben das ganze Streben gerichtet sein, aus (4) und damit aus (3) diese Grössen herauszuschaffen.

Wir erhalten dann aus (4):

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
q\,\{\vartheta_1(2\varpi,q^{21})-q\,\vartheta_1(5\varpi,q^{21})\} &= A\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\\
q^3\{\vartheta_1(\varpi,q^{21})+q^3\vartheta_1(8\varpi,q^{21})\} &= -A\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
q^5\{\vartheta_1(4\varpi,q^{21})+q^4\vartheta_1(10\varpi,q^{21})\} &= -A\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
q\,\{\vartheta\,(2\varpi,q^{21})+q\,\vartheta\,(5\varpi,q^{21})\} &= A\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\\
q^3\{\vartheta\,(\varpi,q^{21})+q^3\vartheta\,(8\varpi,q^{21})\} &= A\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
q^5\{\vartheta\,(4\varpi,q^{21})-q^4\vartheta\,(10\varpi,q^{21})\} &= A\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
q\,\{\vartheta_3(2\varpi,q^{21})-q\,\vartheta_3(5\varpi,q^{21})\} &= A\vartheta\,(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
q^3\{\vartheta_3(\varpi,q^{21})-q^3\vartheta_3(8\varpi,q^{21})\} &= A\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\
q^5\{\vartheta_3(4\varpi,q^{21})-q^4\vartheta_3(10\varpi,q^{21})\} &= A\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\\
q\,\{\vartheta_2(2\varpi,q^{21})-q\,\vartheta_2(5\varpi,q^{21})\} &= -A\vartheta\,(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\\
q^3\{\vartheta_2(\varpi,q^{21})-q^3\vartheta_2(8\varpi,q^{21})\} &= -A\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
q^5\{\vartheta_2(4\varpi,q^{21})-q^4\vartheta_2(10\varpi,q^{21})\} &= -B\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^8)\,\vartheta_3(\varpi,q^7).
\end{aligned}\right.$$

Diese Formeln zeigen uns, dass sich dadurch die Klammergrössen in den Formeln (3) eliminiren lassen. Tragen wir alle Werthe aus (5) in (3) ein, sowie A und den Werth $\vartheta_1\,(\varpi, q^3)$ aus § 2. (11), der in (3) links steht, so ergeben sich folgende 3 Beziehungen:

$$\left|\begin{aligned}
q\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = {} & q\,\vartheta_1(2\varpi,q^8)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
& -q^3\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi\,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
& +q^4\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^8)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)
\end{aligned}\right.$$

$$(6)\left\{\begin{aligned}
-r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} &= q\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
&+q^3\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
&+q^4\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
-p\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} &= q\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\\
&+q^3\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\
&+q^4\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7).
\end{aligned}\right.$$

Es ist selbstverständlich, dass links q immer das Gauss'sche Zeichen für $\vartheta(0,q)$, rechts aber der Modul q ist, der ja überhaupt immer nur in Verbindung mit $\vartheta(\varpi,q^3)$ etc. auftreten kann.

Nun folgt aus § 1. (19):

$$\begin{aligned}
2\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\\
2q\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\\
2q^5\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(\varpi,q^7).
\end{aligned}$$

Dann sind die Beziehungen (6) anders zu schreiben, was sich sogleich als wichtig erweisen wird.

Es ist dann:

$$(7)\left\{\begin{aligned}
&q\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\,\vartheta(\varpi,q^3)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\}\\
&\qquad= q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad+q^3\vartheta_1^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\\
&\qquad-q^4\vartheta_1^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\\
&-r\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\}\\
&\qquad= q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\
&\qquad+q^3\vartheta_1^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad+q^4\vartheta_1^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&-p\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\}\\
&\qquad= q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
&\qquad+q^3\vartheta_1^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\\
&\qquad+q^4\vartheta_1^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7).
\end{aligned}\right.$$

Wir setzen nun in § 1. (8) $\alpha=1$, $\beta=6$. Dann folgt:

$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^6)\\
&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu}e^{2\mu i x}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^7)\,\vartheta_3(6x-y-6\mu\varpi,q^{42})
\end{aligned}\right.$$

$$(8)\left\{\begin{aligned}&\text{und hieraus:}\\&\vartheta_2(x,q)\ \vartheta_2(y,q^6)\\&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\ \vartheta_2(x+y-\mu\varpi,q^7)\ \vartheta_3(6x-y-6\mu\varpi,q^{42})\\&\vartheta_2(x,q)\ \vartheta_1(y,q^6)\\&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\ \vartheta_1(x+y-\mu\varpi,q^7)\ \vartheta(6x-y-6\mu\varpi,q^{42}),\end{aligned}\right.$$

für $x=3\varpi$, $y=2\varpi$ ergiebt sich hieraus:

$$\begin{aligned}(9)\quad \vartheta_2(o,q)\ \vartheta_1(2\varpi,q^6)=\ &\vartheta_1(\ \varpi,q^7)\ \{q\,\vartheta(8\varpi,q^{42})-q^9\,\vartheta(20\varpi,q^{42})\}\\&+\vartheta_1(2\varpi,q^7)\ \{\ \vartheta(2\varpi,q^{42})+q^6\,\vartheta(16\varpi,q^{42})\}\\&+\vartheta_1(3\varpi,q^7)\ \{q\,\vartheta(4\varpi,q^{42})+q^3\,\vartheta(10\varpi,q^{42})\}.\end{aligned}$$

Diese Formel hat mit denen in (3) eine gewisse Analogie, und es existiren auch zu (9) noch 2 ähnliche Formeln für $\vartheta_3(0,q)\ \vartheta_1(2\varpi,q^6)$ und $\vartheta(0,q)\ \vartheta_1(2\varpi,q^6)$. Dieselben sind jedoch zur weiteren Untersuchung nicht geeignet, da rechts die Function ϑ_1 nicht erscheint.

Nun folgt aber analog wie in (4) aus den Formeln der Dreitheilung in § 2. (3):

$$\begin{aligned}\vartheta_2(x,q^7)\ \vartheta_1(y,q^{14})=\ &\vartheta_1(x+y,q^{21})\ \vartheta(2x-y,q^{42})\\&+q^7\ e^{2ix}\vartheta_1(x+y-\ 7\varpi,q^{21})\ \vartheta(2x-y-14\varpi,q^{42})\\&+q^{28}e^{4ix}\vartheta_1(x+y-14\varpi,q^{21})\ \vartheta(2x-y-28\varpi,q^{42}).\end{aligned}$$

Setzen wir hierein:

1) $x=\ \varpi\quad y=6\varpi$
2) $x=3\varpi\quad y=4\varpi$
3) $x=5\varpi\quad y=2\varpi$,

so erhält man folgende 3 Formeln:

$$(10)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_2(\ \varpi,q^7)\vartheta_1(6\varpi,q^{14})=\ \ \vartheta_1(7\varpi,q^{21})\ \{\vartheta(4\varpi,q^{42})+q^2\vartheta(10\varpi,q^{42})\}\\&\vartheta_2(3\varpi,q^7)\vartheta_1(4\varpi,q^{14})=\ \ \vartheta_1(7\varpi,q^{21})\ \{\vartheta(2\varpi,q^{42})+q^6\vartheta(16\varpi,q^{42})\}\\&\vartheta_2(2\varpi,q^7)\vartheta_1(2\varpi,q^{14})=q^3\vartheta_1(7\varpi,q^{21})\ \{\vartheta(8\varpi,q^{42})+q^8\vartheta(20\varpi,q^{42})\}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man diese 3 Werthe in (9) ein und erwägt, dass:

$$i q^{\frac{7}{3}}\vartheta_1(7\varpi,q^{21})=\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned}i q^{\frac{2}{3}}\vartheta_1(2\varpi,q^6)&=i q^{\frac{2}{3}}\vartheta^{-1}(0,q^6)\ \vartheta_2(\varpi,q^3)\ \vartheta_1(\varpi,q^3\\&=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{pq}},\end{aligned}$$

so folgt schliesslich:

$$(11)\quad \begin{cases} -r\sqrt{\dfrac{PQ}{pq}}\left(\dfrac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7) \\ \qquad + q^3\vartheta_1^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7) \\ \qquad + q^4\vartheta_1^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,. \end{cases}$$

Nun folgt aber aus (7):

$$\begin{aligned} -r\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\} \\ = q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7) \\ + q^3\vartheta_1^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7) \\ + q^4\vartheta_1^2(3\varpi,q^8)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7). \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die beiden rechten Seiten vollkommen identisch. Daher folgt:

$$\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^7\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\}\,.$$

Zieht man dieses Resultat gehörig zusammen, so ergiebt sich:

$$(12)\quad \begin{cases} q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) = \sqrt{\dfrac{PQ}{pq}}\left(\dfrac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{oder auch:} \\ 8q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) = \sqrt{\dfrac{r}{R}}\;\dfrac{(4\,PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}\,. \end{cases}$$

Man vgl. dieses Resultat mit § 2. (11), § 4. (18) sowie § 9. (14) und (16). Es hat sich somit bei allen bis jetzt betrachteten Theilungen eine vollkommene Analogie herausgestellt.

Nun folgt aus § 1. (13):

$$\begin{aligned} 2\,\vartheta_3(2\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(2\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7) \\ 2\,\vartheta_3(4\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(4\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(4\varpi,q^7) \\ 2\,\vartheta_3(6\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(6\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(6\varpi,q^7)\,. \end{aligned}$$

Man multiplicire diese 3 Formeln und wende auf der rechten Seite § 1. (3) an; sodann trage man die Werthe aus (12) ein und bringe alles mit Hülfe der Formeln § 1. (14) auf den Modul q resp. q^7, so folgt:

$$(13)\qquad 8\,q^2\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{p}{P}}\;\frac{(4\,PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}\,.$$

Endlich folgt aus § 1. (17):

$$\begin{aligned} P\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) - R\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) \\ = Q\,\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7), \end{aligned}$$

also ist mit Hülfe von (13) und (12):

$$8\,q^2\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7) = \frac{1}{Q}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}\left\{P\sqrt{\frac{p}{P}} - R\sqrt{\frac{r}{R}}\right\},$$

also nach § 6. (10):

$$(14)\qquad 8\,q^2\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{q}{Q}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}.$$

Wenn man nun erwägt, dass zu jeder Function $\vartheta_1(h\varpi,q^a)$ ein Factor $iq^{\frac{hh}{a}}$ hinzutritt, so muss den Formeln (12), (13) und (14) vermöge der Beziehungen § 1. (13) folgende Formel zu Grunde liegen:

$$(15)\quad\begin{cases} -\,iq^2\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\varpi,q^3)\,\vartheta_1(3\varpi,q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\varpi,q^3)\,\vartheta_1(3\varpi,q^3) = q^3\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1{}^2(7\varpi,q^{21}). \end{cases}$$

Auch diese Formel wird später aus der allgemeinen Untersuchung als specieller Fall hervorgehen.

Fassen wir diese Resultate noch einmal zusammen, so haben wir:

$$(16)\quad\begin{cases} -iq^2\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = A \\ 8\,q^2\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{q}{Q}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{RP}{rp}}\cdot A \\ 8\,q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\cdot A \\ 8\,q^2\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{p}{P}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\cdot A. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergeben sich mit Hülfe der Jacobi'schen Transformationsformeln in § 1. (24) die folgenden vier Formeln für die reelle Periode. Die Ausführung unterlassen wir an dieser Stelle, da sie in § 9. für den allgemeinen Fall jeder ungeraden Zahl dargelegt ist:

$$(17)\quad\begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{7},q\right) = \sqrt{7}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{7}\cdot B \\ 8\,\vartheta\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\frac{3\pi}{7},q\right) = \sqrt{\frac{Q}{q}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{rp}{RP}}\cdot B \\ 8\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\frac{3\pi}{7},q\right) = \sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot B \\ 8\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\frac{3\pi}{7},q\right) = \sqrt{\frac{P}{p}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot B. \end{cases}$$

Wir wollen schliesslich noch aufmerksam machen auf die einfachen Beziehungssysteme, die nun in Folge von (16) und (17) und der Combination mit den Formeln § 1. (17) hervorgehen. Es ist:

$$
\left\{\begin{aligned}
&p\vartheta_3(\varpi,q^7) + r\vartheta_2(\varpi,q^7) + q\vartheta\,(\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{rp}{RP}}\cdot q\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\;\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(\varpi,q^7) - r\vartheta_2(\varpi,q^7) - q\vartheta(\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\;\vartheta\,(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(\varpi,q^7) - r\vartheta_2(\varpi,q^7) + q\vartheta(\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot q\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\;\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(2\varpi,q^7) + r\vartheta_2(2\varpi,q^7) - q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{pr}{PR}}\cdot q^2\vartheta_3(3\varpi,q^7)\;\vartheta_2(3\varpi q^7)\\
-&p\vartheta_3(2\varpi,q^7) + r\vartheta_2(2\varpi,q^7) - q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q^2\vartheta_3(3\varpi,q^7)\;\vartheta\,(3\varpi,q^7)\\
-&p\vartheta_3(2\varpi,q^7) + r\vartheta_2(2\varpi,q^7) + q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot q^2\vartheta_2(3\varpi,q^7)\;\vartheta\,(3\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(3\varpi,q^7) + q\vartheta(3\varpi,q^7) + r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{pr}{PR}}\cdot q^{-1}\vartheta_2\,(\varpi,q^7)\;\vartheta_3\,(\varpi,q^7)\\
-&p\vartheta_3(3\varpi,q^7) + q\vartheta(3\varpi,q^7) + r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q^{-1}\vartheta\,(\varpi,q^7)\;\vartheta_3\,(\varpi,q^7)\\
-&p\vartheta_3(3\varpi,q_7) - q\vartheta(3\varpi,q^7) + r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{qr}{QR}}\cdot q^{-1}\vartheta\,(\varpi,q^7)\;\vartheta_2(\varpi,q^7)\,,
\end{aligned}\right. \tag{18}
$$

für die reelle Periode aber:

$$
\left\{\begin{aligned}
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\;\vartheta\,\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\;\vartheta\,\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RP}{rp}}\;\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\;\vartheta\,\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\\
-&P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\;\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta\,\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\\
-&P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RP}{rp}}\;\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)
\end{aligned}\right. \tag{19}
$$

$$\left|\begin{aligned}
&P\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\tfrac{PQ}{pq}}\,\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\\
-&P\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\tfrac{RP}{rp}}\,\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\\
-&P\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\tfrac{RQ}{rq}}\,\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right).
\end{aligned}\right.$$

§ 8.

Allgemeines Theorem für die Primzahlen von der Form $6p+1$.

Die nachstehende Untersuchung soll zeigen, wie die vorhergehenden Resultate verallgemeinert werden können. Wir werden finden, dass ein analoges Resultat wie in § 7. (6) für sämmtliche Primzahlen von der Form $12m+7$ gilt, sowie für das Dreifache sämmtlicher Primzahlen von der Form $12m+1$. Das Eigenthümliche ist, dass auch hierbei die Transformation dritten Grades in die Untersuchung eingeht.

Es lässt sich nämlich jede Primzahl von der Form $6p+1$ zerlegen in A^2+3B^2, und es ist in dieser Form entweder A gerade und B ungerade oder umgekehrt. Es zeigt sich nun, dass für die Zahlen $12m+7$ A gerade ist, B ungerade, desgleichen für das Dreifache der Primzahlen von der Form $12m+1$ (vgl. den Anhang in § 10.). Diese Voraussetzung brauchen wir grade, um eine Anwendung der allgemeinen Formel § 1. (7) auf diese Fälle zu haben.

Setzen wir dort hinein $r=1$, $p=3$, so ist:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(tx+sy,q)\,\vartheta_3(sx-3ty,q^3)\\
&=\sum_{\mu=0}^{\mu=s^2+3t^2-1}q^{\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3\left\{(s^2+3t^2)y-s\mu\varpi,\,q^{s^2+3t^2}\right\}\\
&\qquad\cdot\vartheta_3\left\{(s^2+3t^2)x-3t\mu\varpi,\,q^{3(s^2+3t^2)}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Et ist nun $s^2+3t^2=p$, wo p eine Primzahl von der Form $12m+7$ oder das Dreifache einer Primzahl von der Form $12m+1$ ist, d. h. entweder

$$p=12m+7$$

oder

$$p=3(12m+1),$$

dann ist s eine gerade, t aber eine ungerade Zahl. Wir haben also dann:

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(tx+sy,q)\,\vartheta_3(sx-3ty,q^3)\\
&=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1}q^{\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3(py-s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_3(px-3t\mu\varpi,q^{3p}).
\end{aligned}\right.$$

Setzen wir nun hierein für y und x $y - \frac{\varpi}{2}$ und $x - \frac{3\varpi}{3}$ und beachten, dass nach § 1. (3):

$$q^{\frac{1}{4}(s+3t)^2}\, \vartheta_3\left(tx + sy - \frac{s+3t}{2}\varpi, q\right) = e^{-i(tx+sy)(s+3t)}\, \vartheta_2(tx+sy, q)$$

$$q^{\frac{3}{4}(s-t)^2}\, \vartheta_3\left(sx - 3ty - \frac{s-t}{2} 3\varpi, q^3\right) = e^{-i(sx-3ty)(s-t)}\, \vartheta_2(sx-3ty, q^3) .$$

ferner dass:

$$q^{\frac{p}{4}}\, \vartheta_3\left(py - \frac{p\varpi}{2} - s\mu\varpi, q^p\right) = e^{-i(py - s\mu\varpi)}\, \vartheta_2(py - s\mu\varpi, q^p)$$

$$q^{\frac{3p}{4}}\, \vartheta_3\left(px - \frac{3p\varpi}{2} - 3t\mu\varpi, q^p\right) = e^{-i(px-3t\mu\varpi)}\, \vartheta_2(px - 3t\mu\varpi, q^p) ,$$

so folgt, wenn man dieses in (2) einsetzt:

$$(3) \quad \begin{cases} \vartheta_2(tx + sy, q)\, \vartheta_2(sx - 3ty, q^3) \\ = \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(tx+sy)}\, \vartheta_2(py - s\mu\varpi, q^p)\, \vartheta_2(px - 3t\mu\varpi, q^{3p}) . \end{cases}$$

Setzt man hierein für y $y + \frac{\pi}{2}$ und bedenkt, dass t eine ungerade, s aber eine gerade Zahl ist, so folgt nach § 1. (3) und (4):

$$\vartheta_2\left(tx + sy + \frac{s\pi}{2}, q\right) = (-1)^{\frac{s}{2}}\, \vartheta_2(tx + sy, q)$$

$$\vartheta_2\left(tx - 3ty - \frac{3t\pi}{2}, q^3\right) = (-1)^{\frac{3t-1}{2}}\, \vartheta_1(sx - 3ty, q^2)$$

$$\vartheta_2\left(py + \frac{p\pi}{2} - s\mu\varpi, q^p\right) = (-1)^{\frac{p+1}{2}}\, \vartheta_1(py - s\mu\varpi, q^p) .$$

Setzen wir dies in (3) ein, so folgt:

$$(4) \quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s+3t-p}{2}}\, \vartheta_2(tx+sy, q)\, \vartheta_1(sx-3ty, q^3) \\ = \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(tx+sy)}\, \vartheta_2(px-3t\mu\varpi, q^{3p})\, \vartheta_1(py-s\mu\varpi, q^p) . \end{cases}$$

Hierein werde gesetzt:

$$tx + sy = t\varpi , \quad sx - 3ty = s\varpi ,$$

also

$$px = (3t^2 + s^2)\varpi = p\varpi , \quad py = 0 .$$

Man beachte dann, dass:

$$\vartheta_2(t\varpi, q) = q^{-tt}\, \vartheta_2(0, q) ,$$

ferner, dass:

$$\vartheta_1(s\varpi, q^3) = (-1)^s\, q^{\frac{-s+1}{3}(s-1)}\, \vartheta_1(\varpi, q^3) ,$$

da s immer eine gerade Zahl ist; dass ferner:

$$q^{tt+\frac{s+1}{3}(s-1)} = q^{\frac{p-1}{3}}$$

und

$$(-1)^{\frac{s+3t-p}{2}} = (-1)^{\frac{st+2t^2-p}{2}} = (-1)^{\frac{s(t-s)}{2}} = (-1)^{\frac{s}{2}}.$$

Es ergiebt sich dann aus (4):

$$(5)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu-2\mu t}\,\vartheta_2(p\varpi-3t\mu\varpi,q^{3p})\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,. \end{cases}$$

Da s gerade ist, so beachte man, dass nach § 1. (3):

$$\vartheta_1\left\{(p-1)\,s\varpi, q^p\right\} = -\,q^{(2-p)s^2}\,\vartheta_1(s\varpi,q^p) \text{ etc.}$$

und ferner im letzten Gliede:

$$_2\vartheta\left\{p\varpi-3\,t\,(p-1)\,\varpi, q^{3p}\right\} = q^{1-2t}\,q^{p-2t}\,\vartheta_2(2\,p\varpi-3\,t\varpi,q^{3p})$$

und dass sich die Hälfte aller Glieder ebenso transformiren lassen. Dann folgt schliesslich:

$$(6)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum_{\mu=0}^{\frac{\mu=p-1}{2}} q^{\mu\mu-2\mu t}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\left\{\vartheta_2(p\varpi-3t\mu\varpi,q^{3p})-q^{p-2\mu t}\,\vartheta_2(2p\varpi-3t\mu\varpi,q^{3p})\right\} \\ = q^{1-2t}\,\vartheta_1(\ s\varpi,q^p)\left\{\vartheta_2(p\varpi-3t\varpi,q^{3p})-q^{p-2t}\,\vartheta_2(2p\varpi-3t\varpi,q^{3p})\right\} \\ +\,q^{4-4t}\,\vartheta_1(2s\varpi,q^p)\left\{\vartheta_2(p\varpi-6t\varpi,q^{3p})-q^{p-4t}\,\vartheta_2(2p\varpi-6t\varpi,q^{3p})\right\} \\ +\,q^{9-6t}\,\vartheta_1(3s\varpi,q^p)\left\{\vartheta_2(p\varpi-9t\varpi,q^{3p})-q^{p-6t}\,\vartheta_2(2p\varpi-9t\varpi,q^{3p})\right\} \\ +\,\cdots\cdots \end{cases}$$

Genau dieselben Combinationen wie in den Klammergrössen treten aber wieder in Folge der Formeln § 2. (3) der Dreitheilung auf. Aus den dortigen Beziehungen folgt:

$$(7)\quad \begin{cases} -iq^{\frac{-p}{2}}\,\vartheta_1(x,q^p)\,\vartheta(y,q^{2p}) = \vartheta_2(x+y-\,p\varpi,q^{3p})\,\vartheta(2x-y+p\varpi,q^{6p}) \\ \qquad -\,q^p\,e^{2ix}\,\vartheta_2(x+y-2p\varpi,q^{3p})\,\vartheta(2x-y-p\varpi,q^{6p}) \\ \qquad +\,q^{4p}e^{4ix}\,\vartheta_2(x+y-3p\varpi,q^{3p})\,\vartheta(2x-y-3p\varpi,q^{6p})\,. \end{cases}$$

Aus dieser Formel ergiebt sich ohne Schwierigkeit allgemein:

$$(8)\quad \begin{cases} -\vartheta_1(\mu t\varpi,q^p)\,\vartheta(2\mu t\varpi,q^{2p}) \\ = q^{p-2\mu t}\,\vartheta_1(2p\varpi,q^{6p})\left\{\vartheta_2(p\varpi-3t\mu\varpi,q^{3p})-q^{p-2\mu t\varpi}\,\vartheta_2(2p\varpi-3\mu t\varpi,q^{3p})\right\}. \end{cases}$$

wo für μ nach und nach alle ganzen Zahlen $1, 2, 3 \ldots \frac{p-1}{2}$ zu setzen sind. Es ist charakteristisch, dass auch hier wie bei der Sieben die Grössen in (6), welche den Modul q^{3p} enthalten, mit Hülfe von (8) eliminirt werden.

Es ist dann:

$$(9)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}+1}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2p\varpi,q^{6p}) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum\limits_{0}^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu-p}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(\mu t\varpi,q^p)\,\vartheta(2\mu t\varpi,q^{2p})\,. \end{cases}$$

Nun folgt aus § 1. (13):

$$\vartheta(0,q^{2p})\,\vartheta(2\mu t\varpi,q^{2p}) = \vartheta(\mu t\varpi,q^p)\,\vartheta_3(\mu t\varpi,q^p)$$

und aus § 2. (11):

$$(10)\quad \begin{cases} q^{\frac{2p+1}{3}}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\mu\varpi,q^{6p})\,\vartheta(0,q^{2p}) \\ \qquad = -r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

worin also nach § 1. (25) $P = \vartheta_3(0,q^p)$ etc. Demgemäss folgt:

$$(-1)^{\frac{s}{2}}\,r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_3(t\mu\varpi,q^p)$$

und auf gleiche Weise leitet man ohne Schwierigkeit die beiden analogen Formeln her:

$$(11)\quad (-1)^{\frac{s}{2}}\,p\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_2(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta(t\mu\varpi,q^p)$$

$$(-1)^{\frac{s}{2}}\,q\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\mu}\,q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_2(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_3(t\mu\varpi,q^p)\,.$$

Aus diesen Formeln folgen die in § 7. (6) für die Siebentheilung hergeleiteten als specielle Fälle, wenn man $p = 7 = 2^2 + 3\cdot 1^2$, also $s = 2$, $t = 1$ setzt.

§ 9.

Allgemeine Untersuchungen für alle ungeraden Zahlen.

Bei der Dreitheilung § 2. (11) hatten wir gefunden:

$$2\,q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_2(\varpi,q^3)=\sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4\,PQR)^{\frac{3}{8}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{8}}},$$

für die Fünftheilung hatte sich ergeben:

$$4\,q\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\,\varpi,q^5)=\sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4\,PQR)^{\frac{5}{8}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{8}}}$$

und ich hatte bei meiner eignen Untersuchung für die Sieben gefunden § 7. (12):

$$8\,q^2\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\,\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\,\varpi,q^7)=\sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4\,PQR)^{\frac{7}{8}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{8}}}\,.$$

Diese vollkommene Uebereinstimmung liess vermuthen, dass hier wohl ein allgemeines Gesetz zu Grunde liegen möge. Die nachfolgenden Theoreme, welche für alle ungeraden Zahlen gültig sind, enthalten in der That jene Beziehungen, sowie die mit ihnen zugleich auftretenden als specielle Fälle in sich. Wegen ihrer eigenthümlichen Analogie mit Gauss'schen Beziehungen für die trigonometrischen Functionen sin und cos sind sie als charakteristisch für die Eigenschaften der Jacobi'schen Transcendenten ϑ anzusehen.

Gauss hat in seiner grossen Abhandlung: Summatio quarundam serierum singularium (vgl. Gesammte Werke Bd. II, Göttingen 1863) einige bemerkenswerthe Beziehungen und zwar auf einem an sich eigenthümlichnn Wege abgeleitet. Eine von diesen Formeln ist die folgende: Wenn α eine Zahl von der Form $4\,\mu+1$ oder $4\,\mu+3$ ist, also allgemein eine ungerade Zahl von der Form $2\,n+1$, so ist:

$$2^n\sin\frac{2\pi}{\alpha}\sin 3\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\sin 5\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\cdots\sin(\alpha-2)\cdot\frac{2\pi}{\alpha}=\sqrt{\alpha}$$

(vgl. Gauss a. a. O. S. 26).

Da nun

$$\sin(\alpha-2)\cdot\frac{2\pi}{\alpha}=\sin\left(2\,\pi-2\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\right)=-\sin 2\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\ \text{etc.},$$

so ist auch:

$$(-1)^{\mu}\,2^n\sin\frac{2\pi}{\alpha}\cdot\sin 2\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\cdot\sin 3\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\sin 4\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\cdots\sin n\cdot\frac{2\pi}{\alpha}=\sqrt{\alpha}\,.$$

Wir werden nun folgende Formel ableiten:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha},q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\,\pi}{\alpha},q\right)\vartheta_1\left(\frac{3\,\pi}{\alpha},q\right)\cdots\cdots\vartheta_1\left(\frac{n\,\pi}{\alpha},q\right)=\sqrt{\alpha}\cdot A\,.$$

Die vollkommenste Analogie ist hierin in die Augen springend. A wird sich als ein transcendenter Factor herausstellen, der von den 6 fundamentalen Grössen p, q, r, P, Q, R abhängt, nämlich:

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \vartheta_1^{\,n-1}\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{\alpha}{3}}\right) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Wir nehmen 3 Ausgangspunkte, nämlich zuerst die Formel § 1. (9), sodann die Productbeziehungen der Grundformeln in § 1. (1) und schliesslich drittens die Jacobi'schen Transformationsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode in § 1. (24).

1.

Die Reihen, mit denen wir es hier zu thun haben, sind der Hauptsache nach:

$$(1)\left\{\begin{aligned}
P &= \vartheta_3(0, q^\alpha) = 1 + 2q^\alpha + 2q^{4\alpha} + 2q^{9\alpha} + 2q^{16\alpha} + \cdots \\
Q &= \vartheta\ (0, q^\alpha) = 1 - 2q^\alpha + 2q^{4\alpha} - 2q^{9\alpha} + 2q^{16\alpha} \mp \cdots \\
R &= \vartheta_2(0, q^\alpha) = 2q^{\frac{\alpha}{4}} + 2q^{\frac{9\alpha}{4}} + 2q^{\frac{25\alpha}{4}} + 2q^{\frac{29\alpha}{4}} + \cdots \\
q^{\frac{hh}{\alpha}}\,\vartheta_3(h\varpi, q^\alpha) &= q^{\frac{hh}{\alpha}} + q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha+h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha+h)^2} + \cdots \\
q^{\frac{hh}{\alpha}}\,\vartheta\ (h\varpi, q^\alpha) &= q^{\frac{hh}{\alpha}} - q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-h)^2} - q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha+h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha+h)^2} \mp \cdots \\
q^{\frac{hh}{\alpha}}\,\vartheta_2(h\varpi, q^\alpha)& \\
&= q^{\frac{(\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + \cdots \\
q^{\frac{hh}{\alpha}}\,\vartheta_1(h\varpi, q^\alpha)& \\
&= q^{\frac{(\alpha-2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(\alpha+2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(3\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha-2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(5\alpha+2h)^2}{4\alpha}} \mp \cdots
\end{aligned}\right.$$

In diesen Reihen ist α irgend eine ungerade Zahl, also:

$$\alpha = 2n + 1,$$

und dann bedeutet $h\varpi$ etc., dass für h alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu setzen sind. Es resultiren dann daraus die n oder $\frac{\alpha-1}{2}$ fundamentalen Theilwerthe $\vartheta_3(\varpi, q^\alpha)$, $\vartheta_3(2\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_3(n\varpi, q^\alpha)$ und ebenso bei den übrigen 3 Functionen. Die Bezeichnung ist nach § 1. (25) die von Gauss eingeführte, allgemein:

$$P = \vartheta_3(0, q^\alpha), \quad Q = \vartheta\ (0, q^\alpha), \quad R = \vartheta_2(0, q^\alpha)$$
$$p = \vartheta\ (0, q), \quad q = \vartheta\ (0, q), \quad r = \vartheta_2(0, q).$$

Der Kürze halber möge nun noch für das Product sämmtlicher

n Theilwerthe, dem ja hier unsere Untersuchung gilt, eine neue Bezeichnung eingeführt werden.

Es sei nämlich:

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_3(2\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_3(n\varpi, q^\alpha) = \prod_{h=1}^{h=n}\vartheta_3(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_3]\\
&\vartheta_2(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(2\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_2(n\varpi, q^\alpha) = \prod_{h=1}^{h=n}\vartheta_2(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_2]\\
&\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1(n\varpi. q^\alpha) = \prod_{h=1}^{h=n}\vartheta_1(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_1]\\
&\vartheta\ (\varpi, q^\alpha)\,\vartheta\ (2\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta\ (n\varpi, q^\alpha) = \prod_{h=1}^{h=n}\vartheta\ (h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta]\\
&\text{und entsprechend für die reelle Periode:}\\
&\vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod_{h=1}^{h=n}\vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_3)\\
&\vartheta_2\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\vartheta_2\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod_{h=1}^{h=n}\vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_2)\\
&\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod_{h=1}^{h=n}\vartheta_1\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_1)\\
&\vartheta\ \left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta\ \left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\vartheta\ \left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod_{h=1}^{h=n}\vartheta\ \left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta)\,.
\end{aligned}\right.$$

Die Multiplication läuft also über ein halbes Restesystem, da

$$n = \frac{\alpha - 1}{2}\cdot$$

Dann folgt aus § 1. (19):

$$\begin{aligned}
&2\vartheta(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_3(\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\\
&2\vartheta(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_3(2\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(4\varpi, q^\alpha)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&2\vartheta(n\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(n, \varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(n\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_3(n\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).
\end{aligned}$$

Multipliciren wir diese n Gleichungen, so folgt:

$$(3)\quad 2^n[\vartheta]\,[\vartheta_1]\,[\vartheta_2]\,[\vartheta_3] = P^n Q^n R^n \vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(4\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).$$

Von den Gliedern auf der rechten Seite lassen sich eine gewisse Anzahl mit Hülfe der Beziehungen § 1. (3) reduciren. Wir unterscheiden 2 Fälle.

1. Fall: n ist eine gerade Zahl. Dann sind $\frac{n}{2}$ Glieder nach § 1. (3) zu transformiren, nämlich die Glieder:

$$\vartheta_1\left\{(n+2)\varpi, q^\alpha\right\}, \quad \vartheta_1\left\{(n+4)\varpi, q^\alpha\right\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).$$

Nun ist nach § 1. (3):

$$\vartheta_1(x-\varpi, q) = -q^{-1}e^{-2ix}\vartheta_1(x, q),$$

also

$$\vartheta_1(x-\alpha\varpi, q^\alpha) = -q^{-\alpha}e^{-2ix}\vartheta_1(x, q^\alpha)$$

und es folgt hieraus:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1\left\{(n+2)\varpi, q^\alpha\right\} &= q^{-3}\vartheta_1\left\{(n-1)\varpi, q^\alpha\right\}\\
\vartheta_1\left\{(n+4)\varpi, q^\alpha\right\} &= q^{-7}\vartheta_1\left\{(n-3)\varpi, q^\alpha\right\}\\
\cdots & \cdots\\
\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha) &= q^{-2n+1}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha),
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1\left\{(n+2)\varpi, q^\alpha\right\}\vartheta_1\left\{(n+4)\varpi, q^\alpha\right\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&\quad = q^{-(3+7+11+\ldots 2n-1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_1((n-1)\varpi, q^\alpha).
\end{aligned}$$

Nun sind in der arithmetischen Reihe $\frac{n}{2}$ Glieder vorhanden, also ist:

$$q^{-(3+7+11+\ldots 2n-1)} = q^{-\frac{n}{2}(n+1)},$$

also das Product der transformirten Glieder:

$$\begin{aligned}
(4)\quad &\vartheta_1\left\{(n+2)\varpi, q^\alpha\right\}\vartheta_1\left\{(n+4)\varpi, q^\alpha\right\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&\quad = q^{-\frac{n}{2}(n+1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_1\left\{(n-1)\varpi, q^\alpha\right\}.
\end{aligned}$$

2. Fall: n ist eine ungerade Zahl. Dann sind $\frac{n+1}{2}$ Glieder úu transformiren, nämlich:

$$\vartheta_1\left\{(n+1)\varpi, q^\alpha\right\}, \quad \vartheta_1\left\{(n+3)\varpi, q^\alpha\right\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).$$

Es folgt nun wieder aus § 1. (3):

$$\begin{aligned}
\vartheta_1\left((n+1)\varpi, q^\alpha\right) &= q^{-1}\vartheta_1(n\varpi, q^\alpha)\\
\vartheta_1\left((n+3)\varpi, q^\alpha\right) &= q^{-5}\vartheta_1\left((n-2)\varpi, q^\alpha\right)\\
\cdots & \cdots\\
\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha) &= q^{-2n+1}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha),
\end{aligned}$$

also:

$$(5)\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_1\left\{(n+1)\varpi, q^\alpha\right\}\vartheta_1\left\{(n+3)\varpi, q^\alpha\right\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&\quad = q^{-(1+5+\ldots 2n-1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_1(n\varpi, q^\alpha)\\
&\quad = q^{-\frac{n}{2}(n+1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_1(n\varpi, q^\alpha).
\end{aligned}\right.$$

In beiden Fällen, sowohl in (4) als auch in (5), liefert also das Product der zu transformirenden Glieder in (3) genau das Product der fehlenden ungeraden Theilwerthe, so dass nun rechts ebenfalls $[\vartheta_1]$ entsteht.

Darum ist also:

$$(6)\quad \begin{cases} 2^n q^{\frac{n}{2}(n+1)} [\vartheta]\,[\vartheta_2]\,[\vartheta_3] = (PQR)^n \\ \text{oder auch anders geschrieben:} \\ 2^n q^{\frac{n}{2}(n+1)} \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta\,(h\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_2\,(h\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_3\,(h\varpi, q^\alpha) = (PQR)^n\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt z. B.:

$$2^2\, q^3 \prod_{h=1}^{h=2} \vartheta\,(h\varpi, q^5)\ \vartheta_2\,(h\varpi, q^5)\ \vartheta_3\,(h\varpi, q^5) = P^2 Q^2 R^2$$

$$2^3\, q^6 \prod_{h=1}^{h=3} \vartheta\,(h\varpi, q^7)\ \vartheta_2\,(h\varpi, q^7)\ \vartheta_3\,(h\varpi, q^7) = P^3 Q^3 R^3$$

$$2^5 q^{15} \prod_{h=1}^{h=5} \vartheta\,(h\varpi, q^{11})\ \vartheta_2\,(h\varpi, q^{11})\ \vartheta_3\,(h\varpi, q^{11}) = P^5 Q^5 R^5 \text{ etc.}$$

Dieselbe Untersuchung lässt sich auch für die reelle Periode führen und ist hier einfacher einzusehen. Wir haben hier die n Theilungswerthe:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right);\ \ \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \cdots \vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) \text{ etc.}$$

Vermöge § 1. (19) ist dann:

$$2\,\vartheta\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)$$

$$2\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{4\pi}{\alpha}, q\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\,\vartheta\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, q\right)\cdot$$

Nun ist:

$$\vartheta_1\left(\frac{2n\pi}{\alpha}, q\right) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right),\quad \vartheta_1\left(\frac{(2n-2)\pi}{\alpha}, q\right) = \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, q\right) \text{ etc.},$$

also:

$$(7)\quad \begin{cases} 2^n\,(\vartheta)\,(\vartheta_2)\,(\vartheta_3) = (pqr)^n \\ \text{oder:} \\ 2^n \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (pqr)^n. \end{cases}$$

Aus der Combination mit (6) folgt noch:

$$(8)\qquad q^{\frac{\pi}{2\alpha}(\alpha+1)}\prod_{h=1}^{h=\alpha}\frac{\vartheta\left(\frac{h\varpi}{\alpha},q\right)}{\vartheta\left(\frac{h\pi}{\alpha},q\right)}\cdot\frac{\vartheta_2\left(\frac{h\varpi}{\alpha},q\right)}{\vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha},q\right)}\cdot\frac{\vartheta_3\left(\frac{h\varpi}{\alpha},q\right)}{\vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha},q\right)}=1\,.$$

2.

Wir werden jetzt die fundamentalen Producte $[\vartheta]$, $[\vartheta_1]$, $[\vartheta_3]$ etc. einzeln darstellen. Wir gehen aus von den Jacobi'schen Fundamentalformeln der Producte.

Es ist bekanntlich:

$$(9)\quad\begin{cases} q=\vartheta\,(0,q)=\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}\dfrac{1-q^h}{1+q^h}=\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})\,(1-q^{2h-1})^2\\[2ex] p=\vartheta_3(0,q)=\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}\dfrac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}\cdot\dfrac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}=\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1+q^{2h-1})^2\\[2ex] r=\vartheta_2(0,q)=2q^{\frac14}\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}\dfrac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}}=2q^{\frac14}\prod\limits_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})\,(1+q^{2h})^2\,.\end{cases}$$

Es folgt hieraus, dass:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty}(1+q^h)\,(1-q^{2h-1})=1$$

und mit Hülfe hiervon:

$$(10)\qquad\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac13}=q^{\frac1{12}}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})=i\,q^{\frac13}\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,.$$

Dass

$$q^{\frac1{12}}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})=i\,q^{\frac13}\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,,$$

kann man sowohl mit Hülfe von § 2. (11) erschliessen, oder abhängig hiervon leicht daraus, dass

$$\vartheta_1(x,q)=2\,q^{\frac14}\sin x\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})\,(1-2\,q^{2h}\cos 2\,x+q^{4h})\,,$$

wobei man zu beachten hat, dass:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{6h})\,(1-q^{6h-2})\,(1-q^{6h-4})=\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})\,.$$

Aus dieser Formel für $\vartheta_1(x,q)$ ergiebt sich nun aber ganz allgemein:

$$(11^a)\ i\vartheta_1(m\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(q^{-m}-q^{+m})(1-q^{2h\alpha-2m})(1-q^{2h\alpha+2m}).$$

Hierin möge m eine der Zahlen $1, 2 \cdots n$ bedeuten. Nun ist aber ebenfalls allgemein:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha+2m})=\frac{1}{1-q^{2m}}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-m)}),$$

also folgt jetzt:

$$(11^b)\ i\vartheta_1(m\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-m}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2m})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-m)}).$$

Hieraus nun folgt:

$$i\vartheta_1(\ \varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-1}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)})$$

$$i\vartheta_1(2\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-2}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-4})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-2)})$$

$$i\vartheta_1(3\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-3}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-6})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-3)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i\vartheta_1(n\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-n}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2n})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-n)}).$$

Multipliciren wir alle diese Gleichungen, so schliessen sich rechts alle Factoren an einander; denn wir haben im Exponenten:

$2h\alpha-2,\ 2h\alpha-4,\ 2h\alpha-6, \cdots 2h\alpha-2n,\ 2h\alpha-2n-2, \cdots 2h\alpha-4n.$

Wir erhalten demgemäss:

$$i^n[\vartheta_1]=q^{\frac{n\alpha}{4}-\frac{n+1}{2}n}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})^{n-1}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2})\cdots(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)}).$$

Nun folgt aber aus (10), wenn man für h nach einander setzt $\alpha h,\ \alpha h-1,\ \alpha h-2 \cdots$ bis $\alpha h-(\alpha-1)$:

$$\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=iq^{\frac{1}{4}}\vartheta_1(\varpi,q^{\frac{1}{3}})=q^{\frac{1}{12}}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2})(1-q^{2h\alpha-4})\cdots(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)}),$$

also ergiebt sich jetzt schliesslich:

$$(12)\qquad [\vartheta_1]=q^{\frac{n(n-1)}{2}}\ \vartheta_1(\varpi,q^3)\ \vartheta_1^{\,n-1}(\alpha\varpi,q^{3\alpha}).$$

Dieses ist eine von den Fundamentalformeln, welche abzuleiten wir uns vorgesetzt hatten.

Setzen wir hierin $\alpha = 5$, so resultirt als specieller Fall die Jacobi'sche Formel für die Fünftheilung aus § 4. (11), nämlich:

$$\vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5) = q\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,\vartheta_1(5\varpi, q^{15}).$$

Ebenso folgt:

$$\vartheta_1(\varpi, q^7)\,\vartheta_1(2\varpi, q^7)\,\vartheta_1(3\varpi, q^7) = q^3\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,\vartheta_1^2(7\varpi, q^{21}),$$

vgl. § 7. (15).

Da nun:

$$i q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1(\varpi, q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so ist:

$$i^{n-1} q^{\frac{n-1}{3}}\,\vartheta_1^{\,n-1}(\alpha\varpi, q^{3\alpha}) = \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}$$

und es folgt somit aus (12):

$$i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_1] = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}. \tag{13}$$

Die übrigen analogen Beziehungen erlangen wir mit Hülfe der folgenden aus § 1. (13):

$$\vartheta_1(x, q)\,\vartheta_2(x, q) = \vartheta(0, q^2)\,\vartheta_1(2x, q^2)$$
$$2\,\vartheta(x, q^2)\,\vartheta_1(x, q^2) = \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_1(x, q)$$

und der Beziehung (6).

Es ist nämlich:

$$\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(\varpi, q^\alpha) = \vartheta(0, q^{2\alpha})\,\vartheta_1(2\varpi, q^{2\alpha})$$
$$\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(2\varpi, q^\alpha) = \vartheta(0, q^{2\alpha})\,\vartheta_1(4\varpi, q^{2\alpha}) \text{ etc.}$$

Multipliciren wir diese n Formeln, so folgt:

$$[\vartheta_2] = \vartheta^n(0, q^{2\alpha})\,[\vartheta_1]_{q=q^2}\,[\vartheta_1]^{-1}.$$

Es ist aber:

$$q^{\frac{n(n+1)}{3}}\,[\vartheta_1]_{q=q^2} = \left(\tfrac{1}{2}\vartheta(0,q^2)\vartheta_2(0,q^2)\vartheta_3(0,q^2)\right)^{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{1}{2}\vartheta(0,q^{2\alpha})\vartheta_3(0,q^{2\alpha})\vartheta_2(0,q^{2\alpha})\right)^{\frac{n-1}{3}}$$
$$= \left(\frac{r^2}{4}\sqrt{pq}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R^2}{4}\sqrt{PQ}\right)^{\frac{n-1}{3}} \quad \text{nach § 1. (14)}$$

und

$$\vartheta^n(0, q^{2\alpha}) = (PQ)^{\frac{n}{2}}.$$

Dann folgt:

$$2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_2] = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}. \tag{14}$$

Andrerseits folgt aus der zweiten Formel:

$$2^n\,[\vartheta] = \vartheta_2^{\,n}(0, q^{\frac{\alpha}{2}})\,[\vartheta_1]_{q=q^{\frac{1}{2}}}\,[\vartheta_1]^{-1}.$$

Nun folgt aus § 1. (14):

$$[\vartheta_1]_{q=q^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{q^2}{2}\sqrt{2rp}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{1}{2}\, Q^2 \sqrt{2\, RP}\right)^{\frac{n-1}{3}}$$

$$\vartheta_2^{\,n}(0, q^{\frac{\alpha}{2}}) = (2\, RQ)^{\frac{n}{2}},$$

also:

$$(15) \qquad 2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta] = \sqrt{\frac{q}{Q}}\; \frac{(4\, PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\, pqr)^{\frac{1}{6}}}.$$

Multipliciren wir nun (14) mit (15) und dividiren in (6), so ergiebt sich eine ebensolche Beziehung für $[\vartheta_3]$. Wenn wir mit dieser die erlangten Resultate zusammenstellen, so haben wir:

$$(16) \qquad \begin{cases} i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_1] = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \\ 2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta\,] = \sqrt{\frac{q}{Q}}\; \frac{(4\, PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\, pqr)^{\frac{1}{6}}} \\ 2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_2] = \sqrt{\frac{r}{R}}\; \frac{(4\, PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\, pqr)^{\frac{1}{6}}} \\ 2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_3] = \sqrt{\frac{p}{P}}\; \frac{(4\, PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\, pqr)^{\frac{1}{6}}}, \end{cases}$$

oder die 3 letzten Beziehungen auch in dieser Form, wenn

$$\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} = A$$

$$(17) \qquad \begin{cases} q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta\,] = A\sqrt{\frac{PR}{pr}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_2] = A\sqrt{\frac{PQ}{pq}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_3] = A\sqrt{\frac{QR}{qr}}. \end{cases}$$

Diese Formeln enthalten alle früheren als specielle Fälle in sich, nämlich die Formeln in § 2. (11), in § 4. (18) und § 7. (16).

3.

Um nun auf einem möglichst eleganten Wege zu denselben Formeln für die reelle Periode zu gelangen, gehen wir von einer dritten Quelle aus, nämlich den Jacobi'schen Transformationsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode. Mit Hülfe derselben werden wir die Formeln (12), (13), (16) einfach übertragen.

Es ist § 1. (24):

$$
(18)\qquad \begin{cases}
\vartheta_1(x, e^p) = i\sqrt{\frac{-\pi}{p}}\; e^{\frac{x^2}{p}}\; \vartheta_1\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\
\vartheta\,(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\; e^{\frac{x^2}{p}}\; \vartheta_2\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\
\vartheta_2(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\; e^{\frac{x^2}{p}}\; \vartheta\,\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\
\vartheta_3(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\; e^{\frac{x^2}{p}}\; \vartheta_3\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right),
\end{cases}
$$

worin $p = \log q$, also $e^p = q$.

Aus diesen Formeln folgt, dass:

$$
(19)\qquad \begin{cases}
q = \vartheta\,(0, q) = \vartheta\,(0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\; \vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\
r = \vartheta_2(0, q) = \vartheta_2(0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\; \vartheta\,(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\
p = \vartheta_3(0, q) = \vartheta_3(0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\; \vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\
Q = \vartheta\,(0, q^\alpha) = \vartheta\,(0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\; \vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}) \\
R = \vartheta_2(0, q^\alpha) = \vartheta_2(0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\; \vartheta\,(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}) \\
P = \vartheta_3(0, q^\alpha) = \vartheta_3(0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\; \vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}).
\end{cases}
$$

Aus (18) folgt ferner:

$$
\vartheta_1(x, e^{\alpha p}) = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\; e^{\frac{x^2}{\alpha p}}\; \vartheta_1\left(\frac{i\pi x}{\alpha p}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right).
$$

Setzen wir hierein für x:

$$
\varpi,\ 2\varpi,\ 3\varpi \cdots \text{ oder } ip,\ 2ip,\ 3ip \cdots
$$

so folgt:

$$
(20)\qquad \begin{cases}
\vartheta_1(\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-p}{\alpha}}\; \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\
\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-4p}{\alpha}}\; \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\
\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-9p}{\alpha}}\; \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\vartheta_1(n\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-n^2 p}{\alpha}}\; \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right).
\end{cases}
$$

Somit ist:

$$[\vartheta_1] = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\right)^n e^{-\frac{p}{\alpha}(1+4+9+\ldots n^2)} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \ldots$$
$$\ldots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right)$$

und da

$$1 + 4 + \cdots nn = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)}{6}\,\alpha$$

so ist:

$$e^{-\frac{p}{\alpha}(1+4+9+\ldots nn)} = q^{-\frac{n(n+1)}{6}}.$$

Also folgt jetzt mit Hülfe der Formeln (16) und (19):

$$(21)\left\{\begin{aligned} & i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_1] = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \\ & = \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,e^p)\,\vartheta(0,e^p)\,\vartheta_2(0,e^p)\right\}^{\frac{1}{3}} \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,e^{\alpha p})\,\vartheta(0,e^{\alpha p})\,\vartheta_2(0,e^{\alpha p})\right\}^{\frac{n-1}{3}} \\ & = i^n \left(\frac{\pi}{\alpha p}\right)^{\frac{n}{2}} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \ldots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right). \end{aligned}\right.$$

Setzen wir nun hierein statt

$$\frac{1}{p} \cdots \frac{p\alpha}{\pi^2},$$

also statt:

$$p \cdots \frac{\pi^2}{p\alpha}$$

und statt

$$\frac{\pi^2}{p\alpha} \cdots p,$$

so folgt:

$$\left\{\tfrac{1}{2}\vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}})\,\vartheta(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}})\,\vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}})^{\frac{1}{3}}\right\} \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta(0, e^{\frac{\pi^2}{p}})\,\vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{p}})\,\vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{p}})\right\}$$
$$= i^n \left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^n \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^p\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^p\right) \cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^p\right).$$

Hieraus ergiebt sich durch Anwendung der Beziehungen (19):

$$\left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\alpha p}{\pi}}\right) \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta(0, e^{\alpha p})\,\vartheta_2(0, e^{\alpha p})\,\vartheta_3(0, e^{\alpha p})\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$\cdot \left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^{n-1} \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta(0, e^p)\;\vartheta_2(0, e^p)\;\vartheta_3(0, e^p)\right\}^{\frac{n-1}{3}}$$
$$= i^n \left(\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)^n \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^p\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^p\right) \cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^p\right).$$

Nach der Transformation erscheint rechts i^{2n} und dies ist immer $= +1$. Führen wir also unsere alten Bezeichnungen ein, so folgt:

$$(22)\quad \begin{cases} (\vartheta_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \sqrt{\alpha}\; \vartheta_1^{n-1}\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{\alpha}{3}}\right) \\ \text{oder} \\ (\vartheta_1) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Als specielle Fälle fliessen hieraus:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \sqrt{5}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

vgl. § 4. (6) und (12) combinirt.

Ferner:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{7}, q\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{7}, q\right) \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{7}, q\right) = \sqrt{7}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

vgl. § 7. (17).

Aehnlich wie für die imaginäre Periode ergeben sich auch für die reelle die Formeln für (ϑ), (ϑ_2) und (ϑ_3) mit Hülfe von (7) und von § 1. (13).

Mit Hülfe der beiden dortigen Formeln

$$\vartheta_1(x, q)\ \vartheta_2(x, q) = \vartheta(0, q^2)\ \vartheta_1(2x, q^2)$$

und

$$2\,\vartheta(x, q)\ \vartheta_1(x, q) = \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})\ \vartheta_1(x, q^{\frac{1}{2}})$$

folgt nämlich:

$$(\vartheta_2) = \vartheta^n(0, q^2)\ (\vartheta_1)_{q=q^2}\ (\vartheta_1)^{-1}$$

und

$$2^n(\vartheta) = \vartheta_2{}^n(0, q_{\frac{1}{2}})\ (\vartheta_1)_{q=q^{\frac{1}{2}}}\ (\vartheta_1)^{-1}.$$

Reducirt man dann die Grössen $(\vartheta_1)_{q=q^2}$ und $(\vartheta_1)_{q=q^{\frac{1}{2}}}$, sowie $\vartheta(0, q^2)$ und $\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})$ nach den Formeln § 1. (14), so folgt:

$$(23)\quad \begin{cases} 2^n(\vartheta) = \sqrt{\frac{Q}{q}}\ \frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \\ 2^n(\vartheta_2) = \sqrt{\frac{R}{r}}\ \frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \\ 2^n(\vartheta_3) = \sqrt{\frac{P}{p}}\ \frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \end{cases}$$

oder wenn man

$$\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} = B$$

setzt, während

$$\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = A,$$

in (17) also

$$AB = \left(\frac{PQRpqr}{4}\right)^{\frac{n}{3}}$$

so folgt aus (22) und (23):

$$(24) \qquad \begin{cases} (\vartheta_1) = \sqrt{\alpha} \cdot B \\ (\vartheta) \;\; = B \sqrt{\frac{pr}{PR}} \\ (\vartheta_2) = B \sqrt{\frac{pq}{PQ}} \\ (\vartheta_3) = B \sqrt{\frac{qr}{QR}} \, . \end{cases}$$

Als specielle Fälle fliessen hieraus die Formeln § 2. (11), ferner § 4. (19) und § 7. (17).

Auf die Analogie der Formel (22) mit den Gauss'schen Resultaten für die sinus-Producte haben wir schon in der Einleitung zu diesem Paragraphen hingewiesen. Durch Vergleichung von (22), (23), (24) mit (16) und (17) resultiren dann noch folgende Beziehungen zwischen der reellen und imaginären Periode:

$$(25) \qquad \begin{cases} i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_1] (\vartheta_1) = \sqrt{\alpha}\, AB = \sqrt{\alpha} \left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta] \; (\vartheta) \; = \left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_2] (\vartheta_2) = \left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_3] (\vartheta_3) = \left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} . \end{cases}$$

Also hieraus:

$$(26) \qquad \frac{i^n}{\sqrt{\alpha}} [\vartheta_1] (\vartheta_1) = [\vartheta] (\vartheta) = [\vartheta_2] (\vartheta_2) = [\vartheta_3] (\vartheta_3) \, ,$$

Endlich noch:

$$(27) \qquad \begin{cases} i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} \frac{[\vartheta_1]}{(\vartheta_1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \left[\frac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n-2}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} \frac{[\vartheta]}{(\vartheta)} = \frac{q}{Q} \cdot \left[\frac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} \frac{[\vartheta_2]}{(\vartheta_2)} = \frac{r}{R} \; \left[\frac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} \frac{[\vartheta_3]}{(\vartheta_3)} = \frac{p}{P} \; \left[\frac{PPR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}} . \end{cases}$$

§ 10.

Anhang.

Es ist im § 7. behauptet worden, dass sämmtliche Primzahlen von der Form $6m+1$ sich zerlegen lassen in die Summe eines einfachen und eines dreifachen Quadrats, wenn also p eine solche Primzahl ist, so ist:

$$p = A^2 + 3B^2 . \tag{1}$$

Die Zahlentheorie beweist diesen Satz für das 4-fache jeder solchen Primzahl, nämlich dass sich immer zerlegen lässt:

$$4p = \alpha^2 + 2\beta^2 \tag{2}$$

(vgl. Bachmann: Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig 1872. S. 138 und 139.).

Hieraus lässt sich aber das oben angegebene Resultat auf einfache Weise herleiten und erweitern.

Es ist nämlich klar, dass in (2) sowohl α als β entweder zugleich grade oder ungrade Zahlen sein müssen. Im ersteren Falle wäre die Gleichung (1) sofort bewiesen. In der That liefert aber die Zahlentheorie den Fall, dass sowohl α als auch β ungerade sind. Z. B.

$$4 \cdot 13 = 5^2 + 3 \cdot 3^2$$
$$4 \cdot 19 = 7^2 + 3 \cdot 3^2 .$$

Wenn α und β nun 2 ungerade Zahlen sind, so ist entweder immer $\alpha - \beta$ oder $\alpha + \beta$ durch 4 theilbar, denn es ist entweder:

1) $\alpha = 4m_1 \pm 1 \qquad \beta = 4m_2 \pm 1$

oder

2) $\alpha = 4m_1 \pm 1 \qquad \beta = 4m_2 \mp 1 .$

Im Falle 1) aber ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha - \beta) = m_1 - m_2 ,$$

im Falle 2) ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha + \beta) = m_1 + m_2 .$$

In dem ersten Falle ist dann aber zugleich $\alpha + 3\beta$, im zweiten Falle $\alpha - 3\beta$ durch 4 theilbar, denn im 1) Falle ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha + 3\beta) = m_1 + 3m_2 \pm 1 ,$$

im Falle 2)

$$\tfrac{1}{4}(\alpha - 3\beta) = m_1 - 3m_2 \pm 1 .$$

Wir sehen also, dass jedenfalls immer folgende 2 Gleichungen zusammen bestehen müssen.

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & \alpha - \beta \;\; = 4\,t_1 \\ & \alpha + 3\,\beta = 4\,s_1 \\ \text{oder} & \\ \text{II.} & \alpha + \beta \;\; = 4\,t_2 \\ & \alpha - 3\,\beta = 4\,s_2\,. \end{array}\right.$$

Aus I. aber folgt:

$$\alpha = s_1 + 3\,t_1\,, \qquad \beta = s_1 - t_1$$

aus II.

$$\alpha = s_2 + 3\,t_2\,, \qquad \beta = t_2 - s_2\,.$$

Es wird sich also jedenfalls immer setzen lassen:

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha = A + 3\,B \\ \beta = \pm\,(A - B)\,. \end{array}\right.$$

Diese beiden Gleichungen müssen immer bestehen, mögen die Grössen α und β in (2) einen Werth haben, welchen sie wollen, wenn sie nur beide ungerade sind.

Setzt man die Werthe (3) in (2) ein, so folgt:

$$(5)\qquad 4\,p = (A + 3\,B)^2 + 3\,(A - B)^2\,.$$

Führt man beide Quadrate aus, so sieht man sofort, dass hieraus den beiden andern Gleichungen folgen:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} 4\,p = (A - 3\,B)^2 & + \; 3\,(A + B)^2 \\ 4\,p = (2\,A)^2 & + \; 3\,(2\,B)^2\,. \end{array}\right.$$

Die Gleichungen (5) und (6) bestehen also immer mit (2) zusammen, und es zeigt sich:

„Dass jedes Vierfache einer solchen Primzahl p von der Form „$6\,m + 1$ auf dreifache Weise darstellbar ist als $A^2 + 3\,B^2$, „also in der Summe eines einfachen und eines dreifachen „Quadrats.“

In der That ist:

$$4 \cdot \;\, 7 = 1^2 + 3 \cdot 3^2 = 5^2 + 3 \cdot 1^2 = 4^2 + 3 \cdot 2^2$$
$$4 \cdot 13 = 7^2 + 3 \cdot 1^2 = 5^2 + 3 \cdot 3^2 = 2^2 + 3 \cdot 4^2$$
$$4 \cdot 19 = 1^2 + 3 \cdot 5^2 = 7^2 + 3 \cdot 3^2 = 8^2 + 3 \cdot 2^2 \text{ etc.}$$

Sodann aber ergiebt sich aus der zweiten Gleichung in (6) sofort:

$$(7)\qquad p = A^2 + 3\,B^2\,,$$

also unsere Gleichung (1), d. h.:

„Jede Primzahl von der Form $6\,m + 1$ ist immer und zwar „nur auf eine Art zerlegbar in die Summe eines einfachen „und eines dreifachen Quadrates.“

Wenn aber die Gleichung (7) besteht, so ist damit auch bewiesen, dass sich das λ^2- und das $3\lambda^2$-fache dieser Primzahlen von der Form $6p+1$ auf eben dieselbe Weise darstellen lasse, wobei λ ganz beliebig ist. Denn es ist auch:

$$(8) \qquad \begin{cases} \lambda^2 p = (\lambda A)^2 + 3(\lambda B)^2 \\ 3\lambda^2 p = (3\lambda B)^2 + 3(\lambda A)^2. \end{cases}$$

Es folgt aber aus (6) auch:

„Dass ein Product aus n Primzahlen von der Form $6m+1$ „sich immer auf 2 Arten in A^2+3B^2 zerlegen lasse.“

Denn es sei:

$$p_1 = \alpha_1^2 + 3\beta_1^2$$
$$p_2 = \alpha_2^2 + 3\beta_2^2;$$

so folgt:

$$(9) \qquad \begin{cases} p_1 p_2 = (\alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2)^2 + 3(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2 \\ = (\alpha_1\alpha_2 - 3\beta_1\beta_2)^2 + 3(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)^2. \end{cases}$$

Nimmt man noch eine dritte Zahl p_3 hinzu, so ist $p_1 p_2 p_3$ offenbar auf 4 Arten zerlegbar, p_1, p_2, p_3, p_4 wäre auf 8, d. h. 2^3 Arten zerlegbar, und so schliesst man weiter, woraus offenbar obiger Lehrsatz resultirt.

Wenn man nun folgende Tabelle der bis 100 vorhandenen Zahlen p betrachtet:

$$\begin{array}{ll}
7 = 2^2 + 3\cdot 1^2 & \\
 & 13 = 1^2 + 3\cdot 2^2 = 3^2 + 2^2 \\
19 = 4^2 + 3\cdot 1^2 & \\
31 = 2^2 + 3\cdot 3^2 & \\
 & 37 = 5^2 + 3\cdot 2^2 = 6^2 + 1^2 \\
43 = 4^2 + 3\cdot 3^2 & \\
 & 61 = 7^2 + 3\cdot 2^2 = 5^2 + 6^2 \\
67 = 8^2 + 3\cdot 1^2 & \\
 & 73 = 5^2 + 3\cdot 4^2 = 8^2 + 3^2 \\
79 = 2^2 + 3\cdot 5^2 & \\
 & 97 = 7^2 + 3\cdot 4^2 = 9^2 + 4^2 \\
103 = 10^2 + 3\cdot 1^2, &
\end{array}$$

so bemerkt man sofort den Unterschied zwischen den Zahlen von der Form $12m+7$ und denen von der Form $12m+1$, welche letztere ja auch in die Summe zweier Quadrate zerlegbar sind.

Bei den letzteren nämlich ist A ungrade, B grade, während dies bei denen von der Form $12m+7$ umgekehrt ist. Jedoch ist gemäss (8) auch für $3(12m+1)$ A gerade, B ungerade.

Da unsere Untersuchung in § 7. erforderte, dass s eine gerade, t aber eine ungerade Zahl sei, so gilt sie somit für die Primzahlen von der Form $12m+7$ und für das Dreifache aller Primzahlen von der Form $12m+1$.

Dass in der Zerlegung von $12m+1$ A immer ungerade, B immer gerade sein muss, hat Dirichlet bewiesen. (Vgl. Lejeune-Dirichlet: Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré. Crelle, Bd. 3, S. 69.)

Wir wollen diesen zahlentheoretischen Ausführungen schliesslich noch eine kurze Bemerkung hinzufügen, welche darlegen soll, wie doch auch manche der vorher gefundenen analytischen Resultate geeignet sind die Fruchtbarkeit der höheren Analysis zur Herleitung zahlentheoretischer Wahrheiten zu bekunden, eine Beziehung zwischen beiden Feldern der Mathematik, welche durch die grossen Arbeiten Jacobi's und Dirichlet's zu so merkwürdigen Ergebnissen geführt hat.

Aus der Dreitheilung in § 2. (5) haben wir die Formel:

$$qQ+rR=pP.$$

Nun aber ist, wenn die folgenden Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ gerechnet werden:

$$(10)\qquad \begin{cases} p=\sum q^{hh}, & P=\sum q^{3hh} \\ q=\sum (-1)^h q^{hh}, & Q=\sum (-1)^h q^{3hh} \\ r=\sum q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2}, & R=\sum q^{\frac{3}{4}(2h+1)^2}. \end{cases}$$

Trägt man dieses ein, so folgt:

$$(11)\qquad \sum q^{kk+3hh}-\sum (-1)^{k+h} q^{kk+3hh}=\sum q^{\frac{1}{4}(2k+1)^2+\frac{3}{4}(2h+1)^2}.$$

Links blieben alle solche Formen $kk+3hh$ stehen, in denen h und k nicht zugleich grade oder ungrade sind, und zwar kommen dann die betreffenden Glieder sämmtlich positiv vor. Die übrigen Glieder, in denen h und k zugleich grade und ungrade sind, fallen heraus.

Rechts aber stehen offenbar alle Zahlen von der Form:

$$(12)\qquad A=kk+k+3hh+h+1$$

worin für k und h alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu combiniren sind. Aus A können immer nur ungrade Zahlen resultiren, da $kk+k$ sowohl als $3hh+3h$ immer grade sind, wie auch k und h beschaffen sein mögen. Da nun die Ausdrücke $hh+h$ und $kk+k$ die Reihe

aller dreieckigen Zahlen bilden, wenn k und h von $+\infty$ bis $-\infty$ geht, so folgt:

„Die Summe aus dem Doppelten einer dreieckigen Zahl und „dem Sechsfachen einer zweiten dreieckigen Zahl, vermehrt „um die Einheit, lässt sich immer durch $A^2 + 3B^2$ darstellen, „worin A und B nicht gleichzeitig grade oder ungrade sind."

Setzt man rechts erst $h = 0$, sodann $k = 0$, so folgt:

„Das Doppelte jeder dreieckigen Zahl vermehrt um die Einheit, „sowie das Sechsfache jeder dreieckigen Zahl um die Einheit „vermehrt, sind immer darstellbar durch die Summe eines ein„fachen und eines dreifachen Quadrates."

Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Von R. Beez zu Plauen im Voigtlande.

Im Folgenden wird diejenige n-fache Mannigfaltigkeit betrachtet werden, welche vermöge einer gegebenen Gleichung

$$F(x_0, x_1, \cdots x_n) = 0 \tag{1}$$

ausgesondert ist aus der $(n+1)$-fachen Mannigfaltigkeit $(x_0, x_1, \cdots x_n)$. Letztere mag als eine *absolut* gegebene oder (nach Riemann) als eine *ebene* Mannigfaltigkeit angesehen werden.

Auf $F = 0$ seien gegeben die unendlich nahen Punkte A und $A^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdot\cdot n)$, mit den Coordinaten $x_0, x_1, \cdots x_n$ und $x_0 + d_i x_0$, $x_1 + d_i x_1, \cdots x_n + d_i x_n$; so dass also die Formeln stattfinden:

$$F_0 d_i x_0 + F_1 d_i x_1 + \cdots + F_n d_i x_n = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n), \tag{2}$$

wo unter $F_0, F_1, \cdots F_n$ die Ableitungen von F zu verstehen sind. Ferner sei B ein *ausserhalb* $F = 0$ beliebig gegebener Punkt mit den Coordinaten $y_0, y_1, \cdots y_n$; dann ist das Volumen des durch die Punkte A, $A^{(i)}$ und B bestimmten Parallelepipedums dargestellt durch die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} y_0 - x_0 & d_1 x_0 & d_2 x_0 & \cdots & d_n x_0 \\ y_1 - x_1 & d_1 x_1 & d_2 x_1 & \cdots & d_n x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n - x_n & d_1 x_n & d_2 x_n & \cdots & d_n x_n \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Ferner seien $dw_0, dw_1, \cdots dw_n$ die Partialdeterminanten von R, genommen nach den Gliedern der ersten Vertikale; und endlich sei dw definirt durch:

$$(dw)^2 = (dw_0)^2 + (dw_1)^2 + \cdots (dw_n)^2. \tag{4}$$

Zufolge der soeben für $dw_0, dw_1, \cdots dw_n$ gegebenen Definition finden die identischen Gleichungen statt:

$$dw_0 \cdot d_i x_0 + dw_1 \cdot d_i x_1 + \cdot\cdot + dw_n \cdot d_i x_n = 0, \quad (i = 1, 2, \cdot\cdot n);$$

hieraus ergeben sich mit Rücksicht auf (2) die Proportionen

$$dw_0 : dw_1 : \cdots : dw_n = F_0 : F_1 : \cdots : F_n ;$$

aus diesen aber folgt mit Rücksicht auf (4):

$$(5) \qquad \frac{dw_k}{dw} = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n) .$$

Die Formeln (5) lassen erkennen, dass die Quotienten $\frac{dw_k}{dw}$ angesehen werden können als die Richtungscosinus der im Punkte A (oder $x_0, x_1, \ldots x_n$) auf der Mannigfaltigkeit $F = 0$ errichteten *Normale.*

Die Grössen $dw_0, dw_1, \ldots dw_n$ sind definirt als gewisse Partialdeterminanten von R; und es findet daher die identische Gleichung statt:

$$R = dw_0 (y_0 - x_0) + dw_1 (y_1 - x_1) + \cdots + dw_n (y_n - x_n) ,$$

eine Gleichung, welche auch so dargestellt werden kann:

$$\frac{R}{(AB) \cdot dw} = \frac{dw_0}{dw} \frac{y_0 - x_0}{(AB)} + \frac{dw_1}{dw} \frac{y_1 - x_1}{(AB)} + \cdots + \frac{dw_n}{dw} \frac{y_n - x_n}{(AB)},$$

wo (AB) die gegenseitige Entfernung der Punkte A und B bezeichnen soll. Die rechte Seite der letzten Formel repräsentirt, weil die $\frac{dw_k}{dw}$ die Richtungscosinus der Normale vorstellen, den Cosinus desjenigen Winkels φ, unter welchem diese Normale gegen die Linie (AB) geneigt ist, so dass man also erhält:

$$\frac{R}{(AB)\, dw} = \cos \varphi ,$$

oder was dasselbe ist*):

$$(6) \qquad dw = \frac{R}{(AB) \cos \varphi} .$$

---

*) Diese Formel (6) scheint mir wenig im Einklang zu stehen mit einer gewissen Bemerkung, welche Kronecker in seiner ausgezeichneten Abhandlung: „*Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variablen*" (Ber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1869, S. 170) gemacht hat. Denn, übertragen in die von mir angewandte Bezeichnungsweise, würde jene Bemerkung etwa so auszusprechen sein:

Wenn man für die $(n+1)$ der Mannigfaltigkeit $F = 0$ angehörigen Punkte A, A_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ und für irgend einen $(n+2)^{\text{ten}}$ *ausserhalb* dieser Mannigfaltigkeit liegenden Punkt B die Inhaltsdeterminante R bildet, und dieselbe durch die Entfernung

$$AB = \sqrt{(y_0 - x_0)^2 + (y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

dividirt, so nähert sich dieser Quotient dem Werthe des Elementes dw, sobald man den Punkt B ins Unendliche rückt.

Dass der in Rede stehende Mangel an Einklang in einem geringfügigen Versehen (respective Druckfehler) seinen Grund hat, dürfte wohl keinem Zweifel unterliegen.

Offenbar repräsentirt $(AB)\cos\varphi$ die *Höhe* des mit R bezeichneten Parallelepipedums. Dividirt man aber das Volumen R des Parallelepipedums durch seine *Höhe*, so erhält man seine *Basis*. Die Formel (6) lässt also erkennen, dass diese *Basis* gleich dw ist; *und es kann daher dw aufgefasst werden als ein unendlich kleines Element der gegebenen Mannigfaltigkeit $F = 0$.*

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zur Darstellung des *Krümmungsmaasses* der gegebenen Mannigfaltigkeit $F = 0$. Je zwei Punkte der Mannigfaltigkeit $F = 0$ und der (kugelförmigen) Mannigfaltigkeit

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1 \tag{7}$$

mögen *correspondirende* genannt werden, sobald zwischen ihren Coordinaten $x_0, x_1, \ldots x_n$ und $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ die Relationen stattfinden:

$$\xi_k = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{8}$$

Sind nun insbesondere $\mathsf{A}(\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n)$ und $\mathsf{A}^{(i)}(\xi_0 + d_i\xi_0, \xi_1 + d_i\xi_1, \ldots \xi_n + d_i\xi_n)$ die den Punkten A und $A^{(i)}$ correspondirenden, und setzt man [analog mit (3), (4)]:

$$\mathsf{P} = \begin{vmatrix} \eta_0 - \xi_0 & d_1\xi_0 & d_2\xi_0 & \ldots & d_n\xi_0 \\ \eta_1 - \xi_1 & d_1\xi_1 & d_2\xi_1 & \ldots & d_n\xi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n - \xi_n & d_1\xi_n & d_2\xi_n & \ldots & d_n\xi_n \end{vmatrix}, \tag{9}$$

und

$$(d\omega)^2 = (d\omega_0)^2 + (d\omega_1)^2 + \cdots + (d\omega_n)^2, \tag{10}$$

wo $d\omega_0, d\omega_1, \ldots d\omega_n$ die Partialdeterminanten von P nach den Gliedern der ersten Vertikale vorstellen sollen, so wird [analog mit (5)]:

$$\frac{d\omega_k}{d\omega} = \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}} = \frac{\xi_k}{1}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{11}$$

Aus (5) und (11) ergiebt sich mit Rücksicht auf (8) sofort:

$$\frac{d\omega_k}{d\omega} = \frac{dw_k}{dw}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{12}$$

Das *von Gauss eingeführte Krümmungsmaass* $K = \frac{d\omega}{dw}$ kann daher, wie aus (12) folgt, dargestellt werden durch:

$$K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \frac{d\omega_1}{dw_1} = \cdots\cdot = \frac{d\omega_n}{dw_n}. \tag{13}$$

Bei der weiteren Entwickelung des Ausdruckes von K mögen nun der Reihe nach drei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall.

Die Gleichung (1) der betrachteten Mannigfaltigkeit sei aufgelöst nach x_0, also gegeben in der Form:

$$x_0 - f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0. \tag{14}$$

Alsdann besitzen die Relationen (8) die Gestalt:

$$\xi_0 = \frac{1}{s}, \quad \xi_j = -\frac{f_j}{s}, \quad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{15^a}$$

wo $f_1, f_2, \ldots f_n$ die partiellen Ableitungen von f vorstellen, während s definirt ist durch:

$$s^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2. \tag{15^b}$$

Die Coordinaten $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind in diesem Falle nur abhängig von den n Argumenten $x_1, x_2, \ldots x_n$ (nicht von x_0); so dass man Formeln von folgender Gestalt erhält:

$$d_i\xi_k = \xi_{k1} d_i x_1 + \xi_{k2} d_i x_2 + \cdots + \xi_{kn} d_i x_n. \tag{16}$$

Beachtet man also, dass die Partialdeterminanten w_0 und ω_0 definirt worden sind durch:

$$w_0 = \begin{vmatrix} d_1x_1 & d_2x_1 & \ldots & d_nx_1 \\ d_1x_2 & d_2x_2 & \ldots & d_nx_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1x_n & d_2x_n & \ldots & d_nx_n \end{vmatrix}, \quad \omega_0 = \begin{vmatrix} d_1\xi_1 & d_2\xi_1 & \ldots & d_n\xi_1 \\ d_1\xi_2 & d_2\xi_2 & \ldots & d_n\xi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1\xi_n & d_2\xi_n & \ldots & d_n\xi_n \end{vmatrix},$$

so erhält man auf Grund der Formel (13) und unter Anwendung des Multiplicationstheorems der Determinanten sofort:

$$K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Durch Differentiation von (15ᵃ) findet man:

$$\xi_{jp} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_p} = \frac{1}{s^3}\left(f_j \cdot \sum_{k=1}^{k=n} f_k f_{kp} - s^2 f_{jp}\right), \tag{18}$$

wo die f_{kp}, f_{jp} die zweiten Ableitungen von f bezeichnen. Substituirt man diese Werthe (18) in (17), so folgt:

$$K = \frac{1}{s^{3n}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & \ldots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \ldots & f_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^2 - s^2 & f_2 f_1 & \ldots & f_n f_1 \\ f_1 f_2 & f_2^2 - s^2 & \ldots & f_n f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1 f_n & f_2 f_n & \ldots & f_n^2 - s^2 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Die zweite Determinante, welche für den Augenblick mit $\varphi(s^2)$ be-

zeichnet werden mag, reducirt sich auf den Werth $(-1)^n \cdot s^{2n-2}$. Denn ihre Entwickelung nach Potenzen von s^2 giebt:

$$\varphi(s^2) = \Delta_n - s^2 \Sigma\Delta_{n-1} + s^4 \Sigma\Delta_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s^{2n-2} \Sigma\Delta_1 + (-1)^n s^{2n},$$

worin $\Sigma\Delta_m$ die Summe aller Partialdeterminanten m^{ten} Grades von $\Delta_n = \varphi(0)$ bedeutet; diese Summen aber sind identisch Null mit alleiniger Ausnahme der letzten $\Sigma\Delta_1$; so dass man erhält:

$$\begin{aligned}\varphi(s^2) &= (-1)^{n-1} s^{2n-2} \Sigma\Delta_1 + (-1)^n s^{2n}, \\ &= (-1)^n \left[s^{2n} - s^{2n-2}(f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2)\right], \\ &= (-1)^n s^{2n-2}, \quad [\text{vgl. } (15^b)].\end{aligned}$$

Man erhält also schliesslich:

$$(20) \qquad K = \frac{(-1)^n}{s^{n+2}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

Zweiter Fall.

Die betrachtete n-fache Mannigfaltigkeit sei, wie in (1), gegeben durch die Gleichung:

$$(21) \qquad F(x_0, x_1, x_2, \dots x_n) = 0.$$

Um diesen Fall auf den früheren zurückzuführen, sei zuvörderst auf die Proportionen aufmerksam gemacht:

$$(22^a) \qquad 1 : (-f_1) : (-f_2) : \cdots : (-f_n) = F_0 : F_1 : F_2 : \cdots : F_n,$$

sowie auf die hieraus entspringenden Formeln:

$$(22^b) \qquad f_k = -\frac{F_k}{F_0},$$

$$(22^c) \qquad \frac{1}{s} = +\frac{F_0}{S}, \quad \frac{f_k}{s} = -\frac{F_k}{S}, \quad (k = 1, 2, \dots n),$$

wo s und S zur Abkürzung stehen für die Wurzelgrössen:

$$(22^d) \qquad \begin{aligned} s &= \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2}, \\ S &= \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2}. \end{aligned}$$

Aus (22^b) folgt sofort:

$$\begin{aligned} df_k &= \frac{F_k dF_0 - F_0 dF_k}{F_0^2}, \\ &= \frac{(F_k F_{00} - F_0 F_{k0}) dx_0 + (F_k F_{01} - F_0 F_{k1}) dx_1 + \cdots + (F_k F_{0n} - F_0 F_{kn}) dx_n}{F_0^2}; \end{aligned}$$

nun ist aber

$$dx_0 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n = (-1)\frac{F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_n dx_n}{F_0};$$

substituirt man diesen Werth für dx_0 in die letzte Formel, so erhält man das Differential df_k ausgedrückt durch die n Differentiale dx_1, $dx_2, \ldots dx_n$ (exclusive dx_0); und hieraus folgt alsdann sofort:

$$(23)\qquad f_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{U_{ki}}{F_0^3},$$

wo unter U_{ki} die Determinante zu verstehen ist:

$$(24)\qquad U_{ki} = \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_k \\ F_0 & F_{00} & F_{k0} \\ F_i & F_{i0} & F_{ki} \end{vmatrix}.$$

Substituirt man die Werthe (23) in (20), und bezeichnet man dabei die aus den n^2 Grössen U_{ki} zusammengesetzte Determinante kurzweg mit U, so erhält man:

$$(25)\qquad K = \frac{(-1)^n U}{s^{n+2} F_0^{3n}}.$$

Nun ist aber nach ($22^{a, b, c, d}$): $s = \frac{S}{F_0}$. Somit folgt:

$$(26)\qquad K = \frac{(-1)^n U}{S^{n+2} F_0^{2n-2}}.$$

Diese Formel ist, wie sogleich näher dargelegt werden soll, identisch mit der von Kronecker*) gegebenen Formel:

$$(27)\qquad K = -\frac{1}{S^{n+2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_0 & F_{00} & F_{10} & \ldots & F_{n0} \\ F_1 & F_{01} & F_{11} & \ldots & F_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{0n} & F_{1n} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix} = -\frac{R}{S^{n+2}}.$$

Multiplicirt man nämlich in dieser Kronecker'schen Determinante — sie mag R genannt werden — sämmtliche Vertikalreihen von der dritten an mit F_0, und zieht die respective mit $F_1, F_2, \ldots F_n$ multiplicirte zweite Vertikalreihe von denselben ab, so erhält man jene Determinante in folgender Gestalt:

---

*) Dieser Ausdruck (27) des Krümmungsmaasses K ist von Kronecker auf anderem Wege gefunden, nämlich aus dem Satze abgeleitet worden, dass die Krümmung der n-fachen Mannigfaltigkeit dargestellt wird durch den reciproken Werth des Productes der n Hauptkrümmungshalbmesser. (Vgl. d. Ber. der Berliner Ak. der Wiss. 1869, S. 695.)

$$R = \frac{1}{F_0^n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & 0 & \cdots & 0 \\ F_0 & F_{00} & F_0 F_{10} - F_1 F_{00} & \cdots & F_0 F_{n0} - F_n F_{00} \\ F_1 & F_{01} & F_0 F_{11} - F_1 F_{01} & \cdots & F_0 F_{n1} - F_n F_{01} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{0n} & F_0 F_{1n} - F_1 F_{0n} & \cdots & F_0 F_{nn} - F_n F_{0n} \end{vmatrix},$$

wofür offenbar einfacher geschrieben werden kann:

$$R = -\frac{1}{F_0^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} F_0 & F_0 F_{10} - F_1 F_{00} & \cdots & F_0 F_{n0} - F_n F_{00} \\ F_1 & F_0 F_{11} - F_1 F_{01} & \cdots & F_0 F_{n1} - F_n F_{01} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_0 F_{1n} - F_1 F_{0n} & \cdots & F_0 F_{nn} - F_n F_{0n} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun in dieser letzten Determinante jede Horizontalreihe von der zweiten an mit F_0, und subtrahirt die respective mit $F_1, F_2, \cdots F_n$ multiplicirte erste Horizontalreihe, so verschwinden sämmtliche Glieder der ersten Vertikalreihe bis auf F_0 und man erhält:

$$R = \frac{(-1)^{n+1}\, U}{F_0^{2n-2}},$$

wo U die schon früher genannte Bedeutung hat. Substituirt man aber diesen Werth der Determinante R in die Kronecker'sche Formel (27), so folgt:

$$K = \frac{(-1)^n\, U}{S^{n+2}\, F_0^{2n-2}},$$

und dieser Ausdruck ist in der That identisch mit dem in (26) gefundenen.

Dritter Fall.

Die betrachtete n-fache Mannigfaltigkeit sei gegeben durch die $(n+1)$ simultanen Gleichungen:

(28) $$x_k = f_k(p_1, p_2, \cdots p_n), \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n).$$

Unter A und A mögen folgende Determinanten verstanden werden:

(29) $$A = \begin{vmatrix} y_0 - x_0 & \frac{\partial x_0}{\partial p_1} & \frac{\partial x_0}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial x_0}{\partial p_n} \\ y_1 - x_1 & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n - x_n & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{vmatrix} \eta_0 - \xi_0 & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_n} \\ \eta_1 - \xi_1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n - \xi_n & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_n} \end{vmatrix};$$

ferner seien $A_0, A_1, \cdots A_n$ und $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_n$ die Partialdeterminanten von A und A, genommen nach den Gliedern der ersten Vertikalen; ausserdem sei H definirt durch:

(30) $$H^2 = A_0^2 + A_1^2 + \cdots + A_n^2.$$

Alsdann finden, falls man die früher mit $d_1, d_2, \cdots d_n$ bezeichneten Verschiebungen den Parametern $p_1, p_2, \cdots p_n$ entsprechen lässt, zwischen den Determinanten dw_k, $d\omega_k$ und A_k, A_k die einfachen Beziehungen statt:

$$(31)\qquad dw_k = A_k\, dp_1\, dp_2 \cdots dp_n\,, \qquad d\omega_k = \mathsf{A}_k\, dp_1\, dp_2 \cdots dp_n\,.$$

Nun ist nach (11) und (12):

$$(32)\qquad \xi_k = \frac{dw_k}{dw} = \frac{dw_k}{\sqrt{(dw_0)^2 + (dw_1)^2 + \cdots + (dw_n)^2}}\,,$$

oder weil nach (31) die dw_k mit den A_k proportional sind, und mit Rücksicht auf (30):

$$(33)\qquad \xi_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + \cdots + A_n^2}} = \frac{A_k}{H}\,;$$

hieraus folgt sofort:

$$(34)\qquad \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} = \frac{1}{H^2}\left(H\frac{\partial A_k}{\partial p_i} - A_k\frac{\partial H}{\partial p_i}\right).$$

Um im gegenwärtigen Falle einen geeigneten Ausdruck für das Krümmungsmaass K zu finden, gehen wir aus von der Formel (13), welche mit Rücksicht auf (31) so dargestellt werden kann:

$$(35)\qquad K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \frac{\mathsf{A}_0}{A_0}\,.$$

Substituirt man hier für A_0 seine eigentliche Bedeutung [vgl. (29)], indem man dabei für die $\frac{\partial \xi_k}{\partial p_i}$ die Werthe (34) einsetzt, so folgt nach einer leichten Umformung:

$$(36)\qquad K = \frac{1}{A_0\, H^{n+2}}\begin{vmatrix} HH & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ H\frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial A_1}{\partial p_1} & \frac{\partial A_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ H\frac{\partial H}{\partial p_n} & \frac{\partial A_1}{\partial p_n} & \frac{\partial A_2}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

Substituirt man in diese Determinante die Werthe der HH und $H\frac{\partial H}{\partial p_k}$ (30), und subtrahirt von der ersten Vertikalreihe die Summe der respective mit $A_1, A_2, \cdots A_n$ multiplicirten übrigen Vertikalreihen, so folgt sofort:

$$(37)\qquad K = \frac{1}{H^{n+2}}\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \frac{\partial A_0}{\partial p_1} & \frac{\partial A_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial A_0}{\partial p_n} & \frac{\partial A_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial p_n} \end{vmatrix};$$

und hiermit ist also das Krümmungsmaass K in sehr einfacher Weise ausgedrückt durch die mit $A_0, A_1, \cdots A_n$ bezeichneten Partialdeterminanten [vgl. (29)] *und durch die Grösse H* (30).

Es mag schliesslich der erhaltene Ausdruck (37) noch einer gewissen Transformation unterworfen werden, durch welche er in Analogie tritt zu dem von Gauss gegebenen Ausdruck. Zu diesem Zwecke sei zunächst bemerkt, dass zufolge der für $A_0, A_1, \cdots A_n$ gegebenen Definition die identischen Gleichungen stattfinden:

$$(38^a) \qquad 1 = \frac{1}{H^2} \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_0}{d p_n} & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix},$$

$$(38^b) \qquad 0 = A_0 \frac{\partial x_0}{\partial p_k} + A_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_k} + \cdots + A_n \frac{\partial x_n}{\partial p_k};$$

ausserdem werde die Abkürzung eingeführt:

$$(39) \qquad D_{ik} = \frac{\partial A_0}{\partial p_i}\frac{\partial x_0}{\partial p_k} + \frac{\partial A_1}{\partial p_i}\frac{\partial x_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial p_i}\frac{\partial x_n}{\partial p_k},$$

$$= -\left(A_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_i \partial p_k} + A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} + \cdots + A_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k}\right).$$

Durch Multiplication von (37) mit (38^a) ergiebt sich alsdann sofort:

$$(40) \qquad K = \frac{1}{H^{n+2}} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{vmatrix}.$$

Hiermit ist unser Ziel erreicht. Denn die vorstehende Formel (40) *verwandelt sich in der That für $n = 2$ in die bekannte Gauss'sche Formel:*

$$K = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2},$$

(Gauss' Werke, Bd. IV, S. 234). Kaum bedarf es der Bemerkung, dass bei Gauss $A_0 = A$, $A_1 = B$, $A_2 = C$, ferner $p_1 = p$, $p_2 = q$, endlich $D_{11} = D$, $D_{12} = D_{21} = D'$, $D_{22} = D''$ gesetzt ist.

Plauen im Voigtlande. April, 1873.

Ueber die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln.

Von D. Bobylew in St. Petersburg.

In den Lehrbüchern der Elektrostatik wird, bei Betrachtung der gegenseitigen ponderomotorischen Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln *gleicher* Grösse, auf Fälle aufmerksam gemacht*), in denen jene Einwirkung Null ist. Doch existiren solche Fälle auch dann, wenn die Kugeln von *ungleicher* Grösse sind. In der That kann man — und dies zu zeigen ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes — die in Rede stehende Einwirkung zwischen zwei (einander nicht berührenden) Kugeln jedesmal zum Verschwinden bringen, sobald man nur dem Verhältniss der auf den beiden Kugeln angehäuften Elektricitätsmengen einen geeigneten Werth zuertheilt; und zwar existiren für *jede gegebene Entfernung* g der beiden Kugelmittelpunkte *zwei* solche Werthe, welche sich darstellen als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten bestimmte Functionen von g sind; diese Wurzeln sind stets reell.

§ 1.

Allgemeine Betrachtungen **).

Ein System elektrischer Conductoren A', A'', $\cdots$, deren jeder isolirt ist, sei geladen respective mit den Elektricitätsmengen E', E'', $\cdots$. Ferner sei *das Potential des Systems auf sich selber* bezeichnet mit

$$W = \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \frac{eDs \cdot e_1 Ds_1}{r}\,; \tag{1}$$

*) Beer. Einleitung in die Elektrostatik. Braunschweig, 1865. S. 93. — Köttertzsch. Lehrbuch der Elektrostatik. (Leipzig, 1872.) S. 314.

**) Diese allgemeinen Betrachtungen, obwohl schon von Thomson angestellt und benutzt [vgl. Philosophical Magazine, Ser. 4, Vol. V, p. 292, Formel (f), und p. 294, Formel (18)], scheinen dennoch im Ganzen wenig bekannt zu sein. Die Redaction der Annalen hat sich daher der Mühe unterzogen, diese Betrachtungen, welche für das Verständniss des Bobylew'schen Aufsatzes unentbehrlich sind, im vorliegenden § in Kürze zu reproduciren.

hier bedeuten e, e_1 die in irgend zwei Oberflächenelementen Ds, Ds_1 vorhandenen elektrischen Dichtigkeiten, und r die Entfernung der beiden Elemente von einander; sowohl die Summation nach Ds, als auch diejenige nach Ds_1 ist ausgedehnt über *sämmtliche* Oberflächenelemente des ganzen Systemes. Die Formel (1) kann auch so geschrieben werden:

$$(2) \qquad W = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\left(e Ds\, \Sigma \frac{e_1 Ds_1}{r}\right) = \tfrac{1}{2}\, \Sigma(V e Ds)\,,$$

wo alsdann V *das Potential des Systems auf einen Punkt* repräsentirt. Die Summe $\Sigma(V e Ds)$ kann, entsprechend den einzelnen Conductoren A', A'', ..., in ebenso viele einzelne Summen zerlegt werden; so dass man erhält:

$$(3) \qquad W = \tfrac{1}{2}\, \Sigma(V' e' Ds') + \tfrac{1}{2}\, \Sigma(V'' e'' Ds'') + \cdots$$

Befindet sich nun die elektrische Materie bei der gegebenen räumlichen Lage des Systemes A', A'', $\cdots$ in ihrem Gleichgewichtszustande, so wird das Potential V auf jedem Conductor von *constantem* Werthe sein. Bezeichnet man diese den einzelnen Conductoren entsprechenden constanten Werthe mit C', C'', $\cdots$ so folgt aus (3):

$$(4) \qquad W = \tfrac{1}{2}\, C'\, \Sigma(e' Ds') + \tfrac{1}{2}\, C''\, \Sigma(e'' Ds'') + \cdots,$$

oder was dasselbe ist:

$$(5) \qquad W = \tfrac{1}{2}\, C' E' + \tfrac{1}{2}\, C'' E'' + \cdots,$$

wo E', E'', $\cdots$ die schon genannten Bedeutungen besitzen, nämlich die elektrischen Ladungen der einzelnen Conductoren repräsentiren.

Lassen wir das System A', A'', $\cdots$ aus seiner ursprünglichen räumlichen Lage in eine benachbarte Lage übergehen, so wird, nach Eintritt des entsprechenden elektrischen Gleichgewichtszustandes, die elektrische Vertheilung auf jedem einzelnen Conductor eine etwas andere sein als früher. Bezeichnen wir für diese neue räumliche Lage und den neuen elektrischen Gleichgewichtszustand das Potential des Systemes auf sich selber mit $W + dW$, so wird der Zuwachs dW zerlegbar sein in zwei partielle Zuwüchse δW und ΔW, von denen der erstere herrührt von den Aenderungen der *räumlichen Lage*, während letzterer den Aenderungen der *elektrischen Dichtigkeiten* entspricht. Wir erhalten also mit Rücksicht auf (1) folgende Formeln:

$$(6) \qquad dW = \delta W + \Delta W,$$

$$(7) \qquad \delta W = -\tfrac{1}{2}\, \Sigma\Sigma\left(\frac{e Ds \cdot e_1 Ds_1}{r^2}\, dr\right),$$

$$(8) \qquad \Delta W = +\tfrac{1}{2}\, \Sigma\Sigma \frac{de Ds \cdot e_1 Ds_1 + e Ds \cdot de_1 Ds_1}{r}\,,$$

wo die Aenderungen der r mit dr, und diejenigen der e, e_1 mit de, de_1 bezeichnet sind.

Die Formel (8) kann, wie leicht zu übersehen ist, einfacher dargestellt werden, nämlich so:

$$\Delta W = \Sigma\Sigma \frac{de\,Ds \cdot e_1 Ds_1}{r} = \Sigma\left(de\,Ds \cdot \Sigma \frac{e_1 Ds_1}{r}\right),$$

oder, wenn man V in genau derselben Bedeutung wie früher (2) braucht:

$$\Delta W = \Sigma(V\,de\,Ds).$$

Hieraus aber folgt, wenn man die Summe, entsprechend den einzelnen Conductoren A', A'', $\cdots$, in ebenso viele einzelne Summen zerlegt:

$$\Delta W = \Sigma(V'de'Ds') + \Sigma(V''de''Ds'') + \cdots.$$

Diese Formel endlich kann, weil $V' = C'$, $V'' = C''$, $\cdots$ ist, auch so geschrieben werden:

$$\Delta W = C' \cdot \Sigma(de'Ds') + C'' \cdot \Sigma(de''Ds'') + \cdots,$$

oder auch so:

$$\Delta W = C' \cdot dE' + C'' \cdot dE'' + \cdots,$$

oder schliesslich, weil die zuertheilten Ladungen E', E'', $\cdots$ unveränderlich sind, auch so:

(9) $$\Delta W = 0.$$

Aus (6) und (9) ergiebt sich:

(10) $$dW = \delta W.$$

Die von den elektrischen Kräften in dem gegebenen System während der betrachteten Lagenveränderung verrichtete ponderomotorische Arbeit drückt sich bekanntlich*) aus durch $-\delta W$, und kann daher, zufolge (10), auch dargestellt werden durch $-dW$. Somit ergiebt sich folgender Satz.

(11) *Befindet sich ein aus lauter isolirten und mit Elektricität geladenen Conductoren bestehendes System in beliebig gegebener Lage, und die in ihm enthaltene elektrische Materie in dem entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird die von den elektrostatischen Kräften beim Uebergange des Systems in irgend eine benachbarte Lage verrichtete ponderomotorische Arbeit darstellbar sein durch $-dW$, wo W und $W + dW$ diejenigen Werthe bezeichnen, welche das elektrostatische Potential des Systemes auf sich selber bei der ursprünglichen und bei der neuen Lage, jedes mal nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes, annimmt.*

Hieraus ergiebt sich durch Anwendung auf ein System von zwei Kugeln ein specieller Satz, welcher, wenn man den Centralabstand der beiden Kugeln mit g bezeichnet, folgendermassen auszusprechen ist:

*) Vgl. Neumann: Die elektrischen Kräfte. (Leipzig, 1873.) S. 24 bis 33.

(12) *Befinden sich zwei isolirte und elektrisch geladene Kugeln in einer beliebig gegebenen Lage* (g), *und befindet sich die in ihnen vorhandene elektrische Materie in dem entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird zwischen den beiden Kugeln eine ponderomotorische Kraft vorhanden sein, welche, repulsiv gerechnet, gleich* $-\frac{dW}{dg}$ *ist. Hier bedeuten* W *und* $W + dW$ *diejenigen Werthe, welche das elektrostatische Potential des Systemes auf sich selber bei den Lagen* (g) *und* $(g + dg)$, *jedesmal nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes, annimmt.*

Ferner ergiebt sich aus (11), wie beiläufig bemerkt sein mag, auch noch folgender Satz:

(13) *Ist von den beiden isolirten und elektrisch geladenen Kugeln die eine fest aufgestellt, die andere aber drehbar um einen gegebenen Durchmesser, und denkt man sich die in ihnen enthaltene elektrische Materie wiederum im Gleichgewichtszustande, so wird das von der ersten Kugel auf die zweite ausgeübte ponderomotorische Drehungsmoment gleich Null sein.*

§ 2.

Die ponderomotorische Kraft F, mit welcher zwei elektrisch geladene Kugeln auf einander einwirken.

Wir betrachten zwei isolirte, mit irgend welchen Elektricitätsmengen E und H geladene Kugeln, in beliebig gegebener Lage und im Zustande des elektrischen Gleichgewichts; und stellen uns die Aufgabe, die ponderomotorische Kraft F, mit welcher die beiden Kugeln auf einander einwirken, unter Anwendung des Satzes (12) näher zu berechnen.

Es seien M und M die Mittelpunkte der beiden Kugeln. Auf der Verbindungslinie $M\mathrm{M}$ construiren wir diejenigen beiden Punkte A und A', in denen sie geschnitten wird von einer auxiliären Kugelfläche, die orthogonal ist zu jeder der beiden gegebenen Kugelflächen. Diese Punkte A und A benutzen wir als die

Pole eines dipolaren Coordinatensystemes. Ist also Q ein beliebiger Punkt des Raumes, und sind QA und QA' die von ihm nach jenen Polen hinlaufenden Linien, so werden die *dipolaren Coordinaten* ϑ, ω des Punktes Q definirt zu denken sein durch die Formeln:

$$(14^a) \qquad \begin{cases} \vartheta = \log \dfrac{QA'}{QA}, \\ \omega = \sphericalangle AQA'. \end{cases}$$

Ferner seien T und Θ die ϑ-Coordinaten der beiden Mittelpunkte M und M, und $\Theta - T = \Delta$; so dass also

(14[b]) $$T = \text{pos.}, \quad \Theta = \text{neg.}, \quad \Delta = \text{neg.}$$

Gleichzeitig werde gesetzt:

(14[c]) $$e^{-\frac{1}{2}T} = p, \quad e^{+\frac{1}{2}\Theta} = \varpi, \quad e^{\frac{1}{2}\Delta} = e^{\frac{1}{2}(\Theta - T)} = q; \text{ (wo } e = 2{,}718\cdots\text{)};$$

so dass also die Relation stattfindet

(14[d]) $$p\varpi = q\,.$$

Endlich mögen die Radien der beiden Kugeln mit r und ϱ, und die Entfernungen $M\mathsf{M}$ und AA' respective mit g und $2a$ bezeichnet sein. Die Grössen r, ϱ sind alsdann unveränderlich gegeben; während hingegen T, Θ, Δ, p, ϖ, q, a abhängig von der augenblicklichen Entfernung der beiden Kugeln, also Functionen von g sind. Besonders hervorzuheben ist,

(15) dass die Grössen p, ϖ, q (falls die beiden Kugeln endlich sind und einander nicht berühren) *positive ächte Brüche* sind, zwischen denen, je nachdem $r > \varrho$ oder $r = \varrho$ ist, die Relationen stattfinden:

$$p > \varpi > q \quad \text{für } r > \varrho,$$
$$p = \varpi > q \quad \text{für } r = \varrho.$$

Denken wir uns die beiden Kugeln in der Centraldistanz g, und die auf ihnen vorhandene elektrische Materie im entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird *das elektrische Potential V der beiden Kugeln auf irgend einen Punkt* (ϑ, ω), *der ausserhalb* der Kugeln liegt, ausgedrückt sein durch*):

(16) $$V = \sqrt{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \begin{array}{l} C \dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\vartheta - T)} - e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Delta - \vartheta)}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} \\ + \Gamma \dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Theta - \vartheta)} - e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Delta + \vartheta)}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} \end{array} \right\} P^{(n)}(\cos\omega),$$

wo unter C und Γ diejenigen constanten Werthe zu verstehen sind, welche das Potential V *innerhalb* der Kugeln, sowie auch *an ihren Oberflächen* besitzt; dabei repräsentirt $P^{(n)}$ die bekannte Laplace'sche Function.

Mit Hülfe der Formel (16) gelangt man in bekannter Weise**) zu gewissen Ausdrücken für die elektrischen Dichtigkeiten und Ladungen. Setzt man zur Abkürzung:

---

*) C. Neumann. Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. (Halle, 1862.) S. 55.

**) Neumann l. c. p. XII (der Einleitung).

$$
(17)\quad \begin{cases}
L = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(2n+1)T}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\varDelta}} = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{p^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}}, \\
H = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)\varDelta}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\varDelta}} = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}}, \\
J = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Theta}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\varDelta}} = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{\varpi^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}},
\end{cases}
$$

so sind die für die elektrischen Ladungen E und H der beiden Kugeln resultirenden Ausdrücke folgende:

$$
(18)\quad \begin{cases}
E = + CL - \Gamma H \\
\mathsf{H} = - CH + \Gamma J.
\end{cases}
$$

Bezeichnet endlich W *das Potential des Systemes der beiden Kugeln auf sich selbst*, so ist nach (5):

$$
(19)\quad W = \tfrac{1}{2} CE + \tfrac{1}{2} \Gamma \mathsf{H}.
$$

Analoge Formeln werden sich nun offenbar ergeben, wenn man (ohne sonst irgend welche Aenderungen vorzunehmen) an Stelle der bisher gegebenen Centraldistanz $M\mathsf{M} = g$ eine etwas andere Centraldistanz $g + dg$ der Betrachtung zu Grunde legt. Bezeichnet man die Werthe, welche C, Γ, L, H, J, W alsdann annehmen, mit $C + dC$, $\Gamma + d\Gamma$, $L + dL$, $H + dH$, $J + dJ$, $W + dW$, und beachtet man, dass die elektrischen Ladungen E, H *dieselben* sein sollen, wie früher, so ergeben sich aus (18) und (19) folgende Relationen:

$$
(20)\quad \begin{cases}
0 = + L dC - H d\Gamma + C dL - \Gamma dH, \\
0 = - H dC + J d\Gamma - C dH + \Gamma dJ,
\end{cases}
$$

$$
(21)\quad dW = \tfrac{1}{2} (E dC + \mathsf{H} d\Gamma).
$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen (20) respective mit C und Γ, und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (18):

$$
(22)\quad 0 = (E dC + \mathsf{H} d\Gamma) + (C^2 dL - 2 C\Gamma dH + \Gamma^2 dJ);
$$

endlich folgt aus (21) und (22):

$$
(23)\quad dW = - \tfrac{1}{2} (C^2 dL - 2 C\Gamma dH + \Gamma^2 dJ).
$$

Nach dem Satze (12) ist nun aber die ponderomotorische Kraft F, mit welcher die beiden Kugeln bei der Centraldistanz g repulsiv auf einander wirken, gleich $-\dfrac{dW}{dg}$. Somit folgt aus (23):

$$
(24)\quad F = \tfrac{1}{2} \left(C^2 \frac{dL}{dg} - 2 C\Gamma \frac{dH}{dg} + \Gamma^2 \frac{dJ}{dg} \right).
$$

Bei einer *gegebenen* Centraldistanz g wird daher die Kraft F verschwinden, sobald man den Quotienten

(25) $$x = \frac{C}{\Gamma}$$

der Art einrichtet, dass der quadratischen Gleichung

(26) $$x^2 \frac{dL}{dg} - 2x \frac{dH}{dg} + \frac{dJ}{dg} = 0$$

Genüge geschieht. Jener Quotient $x = \frac{C}{\Gamma}$ hängt aber, wie aus (18) folgt, mit den Quotienten $\frac{E}{\mathsf{H}}$ durch die Relation zusammen:

(27) $$\frac{E}{\mathsf{H}} = \frac{xL - H}{J - xH}.$$

Somit ergiebt sich folgendes Resultat:

(28) *Bezeichnet man für eine beliebig gegebene Centraldistanz g die Wurzeln der quadratischen Gleichung* (26) *mit x' und x'', so wird, um die Kraft F bei dieser Centraldistanz zum Verschwinden zu bringen, nur erforderlich sein, dass man dem Quotienten $\frac{E}{\mathsf{H}}$ einen der beiden Werthe*

$$\frac{x'L - H}{J - x'H}, \qquad \frac{x''L - H}{J - x''H}$$

zuertheilt.

In den nachfolgeneden Expositionen soll gezeigt werden, dass die in Rede stehenden beiden Wurzeln x', x'' stets *reell* sind.

§ 3.

Nähere Untersuchung derjenigen quadratischen Gleichung, von welcher das Verschwinden der Kraft F abhängig ist.

Beachtet man die relative Lage der vier Punkte M, M, A, A':

so ergeben sich mit Rücksicht auf (14[a, b, c, d]) die Relationen:

(29[a]) $$MA' + A'\mathsf{M} = MA + A\mathsf{M} = M\mathsf{M} = g,$$

(29[b]) $$MA' - MA = \mathsf{M}A - \mathsf{M}A' = AA' = 2a.$$

Ferner ergiebt sich aus (14[a, b, c, d]):

(30) $$p^{-2} = e^T = \frac{MA'}{MA}, \quad \varpi^2 = e^\Theta = \frac{\mathsf{M}A'}{\mathsf{M}A},$$

oder was dasselbe ist:

$$p^{-2} = \frac{(MA')^2}{MA \cdot MA'}, \qquad \varpi^2 = \frac{(\mathsf{M}A')^2}{\mathsf{M}A \cdot \mathsf{M}A'}.$$

Hiefür aber kann, weil $MA \cdot MA' = r^2$ und $\mathsf{M}A \cdot \mathsf{M}A' = \varrho^2$ ist*), auch geschrieben werden:

$$(31) \qquad p^{-2} = \frac{(MA')^2}{r^2}, \qquad \varpi^2 = \frac{(\mathsf{M}A')^2}{\varrho^2}.$$

Endlich folgt aus (30) und (31)

$$(32) \qquad \begin{cases} MA' = rp^{-1}, & \mathsf{M}A' = \varrho\varpi, \\ MA = rp, & \mathsf{M}A = \varrho\varpi^{-1}; \end{cases}$$

und hierdurch erlangen die Relationen (29[a, b]) folgende Gestalt:

$$(33^a) \qquad rp^{-1} + \varrho\varpi = rp + \varrho\varpi^{-1} = g,$$

$$(33^b) \qquad r(p^{-1} - p) = \varrho(\varpi^{-1} - \varpi) = 2a.$$

Wir haben nun r, ϱ als gegebene *Constanten*, hingegen g als eine *Variable* anzusehen; von g abhängig sind die Grössen T, Θ, Δ, p, ϖ, q, a (14[a, b, c, d]), somit auch die Grössen L, H, J (17). *Es handelt sich nun um die Bildung der Differentialquotienten* $\frac{dL}{dg}$, $\frac{dH}{dg}$, $\frac{dJ}{dg}$, *d. i. um die Bildung der Coefficienten der quadratischen Gleichung* (26).

Durch Differentiation der Gleichungen (33[a]) nach g erhält man:

$$(34^a) \qquad r\frac{dp}{dg} = -\frac{1+\varpi^2}{1-q^2}p^2, \qquad \varrho\frac{d\varpi}{dg} = -\frac{1+p^2}{1-q^2}\varpi^2;$$

und in analoger Weise findet man aus (33[b]):

$$(34^b) \qquad 2\frac{da}{dg} = -\frac{1+p^2}{p^2}\,r\frac{dp}{dg} = -\frac{1+\varpi^2}{\varpi^2}\,\varrho\frac{d\varpi}{dg}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (34[a]) respective mit den aus (33[b]) entspringenden Relationen:

$$\frac{2a}{r} = \frac{1-p^2}{p}, \qquad \frac{2a}{\varrho} = \frac{1-\varpi^2}{\varpi},$$

so ergiebt sich:

$$(35^a) \quad 2a\frac{dp}{dg} = -\frac{(1+\varpi^2)(1-p^2)p}{1-q^2}, \qquad 2a\frac{d\varpi}{dg} = -\frac{(1+p^2)(1-\varpi^2)\varpi}{1-q^2}.$$

Ferner folgt aus (34[b]) mit Rücksicht auf (34[a]):

$$(35^b) \qquad 2\frac{da}{dg} = +\frac{(1+p^2)(1+\varpi^2)}{1-q^2}.$$

Endlich ist nach (14[d]): $q = p\varpi$; so dass also der Differentialquotient $\frac{dq}{dg}$ ausdrückbar ist durch $\frac{dp}{dg}$ und $\frac{d\varpi}{dg}$. Somit erhält man unter Benutzung der Formeln (35[a]):

---

*) Neumann l. c. p. 29.

(35^c) $$2a\frac{dq}{dg} = -2q\,.$$

Wir gehen nunmehr über zu den Grössen L, H, J. Der Ausdruck L (17) kann folgendermassen umgestaltet werden:

$$L = 2a\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{p^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} = 2a\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{i=0}^{i=\infty}(p^{2n+1}q^{(2n+1)i}),$$

$$= 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\Big(q^i p\sum_{n=0}^{n=\infty}(q^{2ni}p^{2n})\Big),$$

$$= 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{q^i p}{1-q^{2i}p^2}\,.$$

In solcher Weise erhält man aus (17) im Ganzen folgende Formeln:

(36) $$\begin{cases} L = 2a\cdot\sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\dfrac{q^i p}{1-q^{2i}p^2}, \quad J = 2a\cdot\sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\dfrac{q^i\varpi}{1-q^{2i}\varpi^2}. \\ H = 2a\cdot\sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\dfrac{q^{i+1}}{1-q^{2i+2}} = 2a\cdot\sum\limits_{j=1}^{j=\infty}\dfrac{q^j}{1-q^{2j}}\,. \end{cases}$$

Differenzirt man nun den ersten dieser Ausdrücke, nämlich L nach der Entfernung g, so findet man mit Rücksicht auf (35^{a,b,c}) und nach einigen Reductionen:

(α) $$\frac{dL}{dg} = -2\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\Big(\frac{q^i p}{(1-q^{2i}p^2)^2}f_i\Big);$$

hier hat f_i die Bedeutung:

(β) $$f_i = \Big(i - p^2\,\frac{1-q^{2i}}{1-q^2}\Big) + \Big(iq^{2i}p^2 - q^2\,\frac{1-q^{2i}}{1-q^2}\Big),$$

und kann daher auch so dargestellt werden:

(γ) $$f_i = \sum_{k=1}^{k=i}(1-p^2q^{2(i-k)}) + \sum_{k=1}^{k=i}(q^{2i}p^2 - q^{2k}),$$

oder auch so:

(δ) $$f_i = \sum_{k=1}^{k=i}(1-q^{2k})\,(1-p^2q^{2(i-k)})\,.$$

Substituirt man diesen Werth für f_i in die Formel (α), und beachtet man, dass dieses f_i, wie aus (β) folgt, *für* $i=0$ *verschwindet*, so ergiebt sich:

(37) $$\frac{dL}{dg} = -2\cdot\sum_{i=1}^{i=\infty}\Big(\frac{q^i p}{(1-q^{2i}p^2)^2}\sum_{k=1}^{k=i}(1-q^{2k})\,(1-p^2q^{2i-2k})\Big);$$

denn in Folge des eben genannten Verschwindens kann als untere

Grenze der Summe $i = 1$ (statt des früheren $i = 0$) genommen werden.

Offenbar ergiebt sich für den Ausdruck J (36) ein analoges Resultat; nämlich:

$$(38)\quad \frac{dJ}{dg} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i \varpi}{(1-q^{2i}\varpi^2)^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1-q^{2k})(1-\varpi^2 q^{2i-2k}) \right).$$

Endlich erhält man aus (36) für den Differentialquotienten von H nach g den Werth:

$$\frac{dH}{dg} = -\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \left(2i(1+q^{2i}) - (1+p^2)(1+\varpi^2)\frac{1-q^{2i}}{1-q^2} \right);$$

und hieraus folgt nach einigen Umformungen:

$$(39)\quad \frac{dH}{dg} = -\sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \cdot \sum_{k=1}^{k=i} (1-p^2 q^{2i-2k})(1-\varpi^2 q^{2k-2}) \right)$$
$$- \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \cdot \sum_{k=1}^{k=i} (1-q^{2i-2k})(1-q^{2k}) \right).$$

Die Formeln (37), (38), (39) lassen, wenn man Rücksicht nimmt auf die Bemerkungen (15), sofort erkennen,

(40) dass die Differentialquotienten $\frac{dL}{dg}$, $\frac{dJ}{dg}$, $\frac{dH}{dg}$ stets *negativ* sind.

Durch eine weitere Transformation lassen sich die Differentialquotienten (17), (18), (19) in eine für unsere Zwecke bequemere Gestalt versetzen. Um diese Transformationen darlegen zu können, betrachten wir zuvörderst die beiden Ausdrücke:

$$(a)\quad \Phi = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i \xi}{(1-q^{2i}\xi^2)^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1-q^{2k})(1-\xi^2 q^{2i-2k}) \right),$$

$$(b)\quad \Psi = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1-p^2 q^{2i-2k})(1-\varpi^2 q^{2k-2}) \right),$$

wo in dem erstern ξ einen beliebigen ächten Bruch vorstellen soll. Vertauscht man in Φ und Ψ die Reihenfolge der Summationen, so wird:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((1-q^{2k})\,\xi \cdot \sum_{i=k}^{i=\infty} \frac{q^i(1-\xi^2 q^{2i-2k})}{(1-\xi^2 q^{2i})^2} \right),$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((1-\varpi^2 q^{2k-2}) \cdot \sum_{i=k}^{i=\infty} \frac{q^i(1-p^2 q^{2i-2k})}{(1-q^{2i})^2} \right).$$

Entwickelt man jetzt die Ausdrücke $\frac{1}{(1-\xi^2 q^{2i})^2}$ und $\frac{1}{(1-q^{2i})^2}$ mit Hülfe

der bekannten Formel $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\alpha^s$, vertauscht man sodann die Summationen nach i und s, und bringt man endlich die Summation nach i zur wirklichen Ausführung, so erhält man:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left((1-q^{2k})\xi\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\xi^{2s}\left[\frac{q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\xi^2 q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+3}}\right]\right),$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left((1-\varpi^2 q^{2k-2})\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\left[\frac{q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+1}} - \frac{p^2 q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+3}}\right]\right).$$

Wird nunmehr Vertauschung vorgenommen zwischen den Summationen nach k und s, und die Summation nach k zur Ausführung gebracht, so ergiebt sich:

$$\text{(a')}\quad \Phi = \sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\left[\frac{\xi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\xi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\right]\left[\frac{q^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{q^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\right],$$

$$\text{(b')}\quad \Psi = \sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\left[\frac{p^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{p^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\right]\left[\frac{\varpi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\varpi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\right].$$

Substituirt man in Φ, (a), (a') für ξ die Grössen p und ϖ, so erhält man die Ausdrücke für $\frac{dL}{dg}$ (37) und $\frac{dJ}{dg}$ (38). Substituirt man ferner daselbst $\xi = 1$, so erhält man die *zweite* Zeile des Ausdrucks für $\frac{dH}{dg}$ (39); während die *erste* Zeile desselben durch Ψ, (b), (b') dargestellt ist. Somit ergiebt sich:

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dg} = -2\cdot\sum\limits_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\,Y_s Z_s\,, \\ \dfrac{dJ}{dg} = -2\cdot\sum\limits_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\,\mathsf{H}_s Z_s\,, \\ \dfrac{dH}{dg} = -1\cdot\sum\limits_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\,(\mathsf{H}_s Y_s + Z_s^2)\,, \end{cases}$$

wo Y_s, H_s, Z_s die Bedeutungen haben:

$$(42)\quad \begin{cases} Y_s = \dfrac{p^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \dfrac{p^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\,, \\ \mathsf{H}_s = \dfrac{\varpi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \dfrac{\varpi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\,, \\ Z_s = \dfrac{q^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \dfrac{q^{2s+3}}{1-q^{2s+3}} = \dfrac{1}{1-q^{2s+1}} - \dfrac{1}{1-q^{2s+3}}\,. \end{cases}$$

§ 4.

Fortsetzung. Untersuchung der Wurzeln der quadratischen Gleichung.

Wie bereits bemerkt (15), sind p, ϖ, q positive ächte Brüche. Mit Rücksicht hierauf folgt aus (42) sofort,

(43) dass die Grössen Y_s, H_s, Z_s sämmtlich *positiv* sind; auch lässt sich nachweisen, dass zwischen diesen Grössen, je nachdem $r > \varrho$ oder $r = \varrho$ ist, folgende Relationen stattfinden:

$$Y_s > \mathsf{H}_s > Z_s \text{ für } r > \varrho\,,$$
$$Y_s = \mathsf{H}_s > Z_s \text{ für } r = \varrho\,.$$

Um diesen Nachweis zu führen, sind die Differenzen $Y_s - \mathsf{H}_s$ und $\mathsf{H}_s - Z_s$ einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen.

Setzt man zur Abkürzung $2s + 1 = n$, so folgt aus (42):

$$Y_s - \mathsf{H}_s = \frac{p^n - \varpi^n}{1 - q^n} - \frac{p^{n+2} - \varpi^{n+2}}{1 - q^{n+2}},$$

oder was dasselbe ist:

$$Y_s - \mathsf{H}_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\left(\frac{p^n(1-\varpi^{2n+2})}{1-\varpi^2} - \frac{\varpi^n(1-p^{2n+2})}{1-p^2}\right);$$

und hieraus folgt:

$$Y_s - \mathsf{H}_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})} \sum_{k=0}^{k=n} F,$$

wo F die Bedeutung hat:

$$\begin{aligned} F &= p^n \varpi^{2k} - \varpi^n p^{2k}, \\ &= (p\varpi)^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k}), \\ &= (p\varpi)^n(\varpi^{2k-n} - p^{2k-n}). \end{aligned}$$

Nun ist offenbar:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} F + \sum_{k=s+1}^{k=n} F,$$

oder, wenn man für F seinen Werth (bald in dieser, bald in jener Gestalt) substituirt:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} (p\varpi)^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k}) + \sum_{k=s+1}^{k=n} (p\varpi)^n(\varpi^{2k-n} - p^{2k-n}).$$

Beachtet man, dass $p\varpi = q$ ist, und substituirt man in der zweiten Summe rechter Hand an Stelle von k einen anderen Index k', mit k verbunden durch die Relation $k + k' = 2s + 1 = n$, so erhält man:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k}) + \sum_{k'=0}^{k'=s} q^n(\varpi^{n-2k'} - p^{n-2k'}).$$

Schreibt man endlich k für k', so folgt durch Zusammenziehung der beiden Summen:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(1-q^{n-2k})(p^{n-2k}-\varpi^{n-2k}).$$

Wir erhalten daher schliesslich:

$$(44)\quad Y_s - \mathsf{H}_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\cdot\sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(1-q^{n-2k})(p^{n-2k}-\varpi^{n-2k}),$$

wo n zur Abkürzung steht für $2s+1$. — Aus dieser Formel (44) folgt mit Rücksicht auf (15) sofort, dass die Differenz $Y_s - \mathsf{H}_s$ stets positiv ist, oder (genauer ausgedrückt), dass sie positiv oder null sein wird, je nachdem p grösser oder gleich ϖ ist. Mit andern Worten: wir erkennen,

dass $Y_s > \mathsf{H}_s$ ist für $r > \varrho$,

und dass $Y_s = \mathsf{H}_s$ ist für $r = \varrho$.

Somit ist die Behauptung (43) *erwiesen, insoweit dieselbe auf* Y_s *und* H_s *Bezug hat.*

Setzt man wiederum $2s+1=n$, so folgt aus (42):

$$\mathsf{H}_s - Z_s = \frac{\varpi^n - q^n}{1-q^n} - \frac{\varpi^{n+2}-q^{n+2}}{1-q^{n+2}},$$

oder was dasselbe ist:

$$\mathsf{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\left(\varpi^n(1+\varpi)\frac{1-q^n}{1-q} - q^n(1+q)\frac{1-\varpi^n}{1-\varpi}\right);$$

und hieraus folgt:

$$\mathsf{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\cdot\sum_{k=0}^{k=n-1} F,$$

wo F einen Ausdruck repräsentirt, der (mit Rücksicht auf die Relation $p\varpi = q$) in folgenden verschiedenen Gestalten dargestellt werden kann

$$\begin{aligned} F &= \varpi^n(1+\varpi)q^k - q^n(1+q)\varpi^k, \\ &= \varpi^n q^k\left[(1+\varpi)-(1+q)\left(\frac{q}{\varpi}\right)^n\left(\frac{\varpi}{q}\right)^k\right], \\ &= \varpi^n q^k[(1+\varpi)-(1+q)p^{n-k}]. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher schliesslich:

$$(45)\quad \mathsf{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\cdot\sum_{k=0}^{k=n-1}\varpi^n q^k[(1+\varpi)-(1+q)p^{n-k}],$$

wo n zur Abkürzung steht für $2s+1$. — Aus dieser Formel folgt mit Rücksicht auf (15) sofort, dass die Differenz $\mathsf{H}_s - Z_s$ jederzeit

positiv und von Null verschieden sein wird, einerlei ob $p > \varpi$ oder $p = \varpi$ ist. Es ergiebt sich also die Relation:

$$\mathsf{H}_s > Z_s \text{ als gültig für } r > \varrho\,, \quad \text{und auch für } r = \varrho\,,$$

Somit ist die Behauptung (43) *erwiesen, insofern dieselbe auf* H_s *und* Z_s *Bezug hat.*

Aus den Formeln (41) folgt augenblicklich:

$$2\frac{dH}{dg} - \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) = -2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)(Y_s - Z_s)(\mathsf{H}_s - Z_s);$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf die Relationen (43):

(46) $$2\frac{dH}{dg} - \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) < 0\,.$$

Andererseits folgt aus der Bemerkung (40):

(47) $$2\frac{dH}{dg} + \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) < 0\,.$$

Aus diesen beiden Formeln (46) und (47) erkennt man, dass die Grösse $2\frac{dH}{dg}$ ihrem *absoluten Betrage* nach höher steht als die Grösse $\left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)$; so dass man also schreiben kann:

(48) $$4\left(\frac{dH}{dg}\right)^2 > \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)^2.$$

Nun ist aber bekanntlich für zwei beliebig gegebene reelle Grössen α und β jederzeit $(\alpha+\beta)^2 \geqq 4\,\alpha\,\beta$; folglich wird:

(49) $$\left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)^2 \geqq 4\,\frac{dL}{dg}\,\frac{dJ}{dg}\,.$$

Aus (48) und (49) resultirt endlich:

(50) $$\left(\frac{dH}{dg}\right)^2 > \frac{dL}{dg}\,\frac{dJ}{dg}\,;$$

und hieraus endlich folgt, dass die beiden Wurzeln x', x'' *der zu untersuchenden quadratischen Gleichung* (26) *in der That stets reell sind; w. z. z. w.*

Petersburg, Juni 1873.

Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre*).

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

(Avec deux planches lithographiées.)

I. Définitions, propriétés connues ou évidentes.

1. Nous appelons *branche complète* la partie d'une courbe plane qui peut être parcourue d'une manière continue par un point qui, après en avoir passé une fois tout point fixe, revient au point de départ. En ne nous occupant ici que de propriétés projectives, nous ne regardons pas comme interruption de la continuité le passage par l'infini, si seulement le point mobile a la même direction limite en s'éloignant à l'infini et en en retournant.

Il y a**) deux espèces de branches complètes: les branches d'ordre pair, que toute droite rencontre en un nombre pair de points, et les branches d'ordre impair, que toute droite rencontre en un nombre impair de points. — Une branche d'ordre pair rencontre tante autre branche complète en un nombre pair de points, mais deux branches d'ordre impair se rencontrent en un nombre impair de points. — Une branche d'ordre pair sans points multiples, divise le plan en deux parties, dont l'une qui renferme des branches d'ordre impair s'appelle *l'externe*, l'autre qui n'en renferme aucune s'appelle *l'interne*.

Note. Il n'est pas nécessaire de sortir du plan pour prouver ces propriétés connues des branches complètes. Désignons par a une branche complète, par A et M un point fixe et un point mobile de cette branche. Si l'on prend le point A pour point de départ du mouvement de M, un des deux segments déterminés sur la droite infinie AM par les deux points A et M, commencera par être nul, pendant que l'autre est la droite entière. La même chose aura lieu au retour

*) Une *partie* des résultats de cette recherche ont été publiés dans les *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences* 28 juillet 1873, et dans un mémoire inséré au *Tidsskrift for Mathematik* 1873.

**) Voir v. Staudt: Geometrie der Lage.

de M à A. Il se présente ici deux cas différents: 1° celui où le segment qui commence par être nul finit par être nul, et 2° celui où ce segment finit par être la droite entière.

Désignons par b une autre branche complète dans le même plan. Toutes les fois que le point mobile M passe un point d'intersection avec la branche b, un des points d'intersection de la droite AM et de la branche b, passe de l'un des segments de AM à l'autre. Comme le segment AM qui commence par être nul commence par n'avoir aucun point d'intersection avec la branche b, on voit que le nombre des points d'intersection de a et b est pair au impair suivant que ce segment AM finit par rencontrer b en un nombre pair ou impair de points. S'il finit par être nul il finira, comme il commençait, par n'avoir aucun point d'intersection avec b: alors la branche a rencontre toute autre branche (y compris les droites) en un nombre pair de points. S'il finit par être la droite entière AM, la branche a rencontre, premièrement, toute droite en un nombre impair de points, et ensuite on voit qu'elle rencontre aussi toute autre branche douée de cette même propriété, qui caractérise les branches d'ordre impair, en un nombre impair de points.

Si la branche a, que nous supposons dénuée de points multiples, est d'ordre pair, si A est un point fixe placé au dehors de la branche, et M un point qui se meut sans la passer jamais, les nombres de points d'intersection avec a qui se trouvent sur les deux segments de AM restent, pendant tout le mouvement de M, pairs ou impairs. Dans le dernier cas on ne peut parvenir de M à A sans passer la branche. On voit ainsi qu'elle divise le plan en deux parties. Comme deux branches d'ordre impair se rencontrent toujours, il est impossible qu'il peut y en avoir dans toutes les deux parties séparées par une branche d'ordre pair. Mais on peut prouver qu'il y en a dans l'une. En effet, on peut construire une série de branches complètes (c), voisines à la branche donnée a et à une droite (branche d'orde impair) b, qui ne rencontrent pas a et qui aient le même nombre d'intersections avec une autre droite que celle-ci a avec a et b. Ce nombre étant impair, il faut qu'une des branches (c) soit d'ordre impair.

2. Une courbe algébrique sans points multiples, ne peut avoir plus d'une branche d'ordre impair. Si la courbe est d'ordre pair toutes ses branches complètes sont d'ordre pair, si elle est d'ordre impair l'une de ses branches est d'ordre impair, les autres d'ordre pair.

Une courbe du quatrième ordre (*quartique*) a, au plus, quatre branches externes l'une à l'autre, ou deux branches dont l'une se trouve dans la partie du plan interne à l'autre, et, dans ce dernier cas, la branche interne ne peut avoir des tangentes doubles ou d'inflexion.

Car, s'il en était autrement on pourrait construire des coniques rencontrant la courbe en plus de 8 points, ou des droites la rencontrant en plus de 4 points.

3. Une tangente double *réelle* d'une *quartique* peut être 1° une tangente double d'une seule branche, 2° une droite tangente à la courbe en deux points imaginaires, et 3° une tangente commune à deux branches différentes. Dans le premier cas les *points de contact ne peuvent être séparés par les points d'intersection avec deux autres tangentes doubles*; car l'une ou l'autre de celles-ci rencontrerait alors la courbe en un point différent de ses points de contact. La même chose a lieu, évidemment, si les points de contact sont imaginaires. Dans ces deux cas nous appelons les tangentes doubles *tangentes doubles de la première espèce*, respectivement *à contacts réels* et *à contacts imaginaires.* Les tangentes communes à des branches différentes s'appellent *tangentes doubles de la seconde espèce.*

4. Une tangente double de la première espèce à contacts réels, se trouve en entier dans la partie du plan externe à la branche qu'elle touche; car, s'il en était autrement elle rencontrerait la quartique en deux points différents des points de contact. La branche a entre les points de contact un arc rentrant, dont une partie, limitée par deux points d'inflexion, tourne sa convexité vers la partie interne du plan. Réciproquement, tout arc tournant sa convexité vers la partie interne du plan, occasionne une tangente double de la première espèce à contacts réels. On voit ainsi que *le nombre d'inflexions réelles d'une quartique, est égal au double du nombre de ses tangentes doubles de la première espèce à contacts réels.*

II. Nombre de tangentes doubles de la première espèce.

5. *Le nombre de tangentes doubles de la première espèce d'une quartique quelconque sans points multiples, est égal à quatre.*

Nous commencerons par prouver que *deux quartiques quelconques sans points multiples ont le même nombre de tangentes doubles de la première espèce.* Placées dans un même plan, les deux courbes déterminent un faisceau, où elles séparent deux séries de quartiques réelles*): les déformations infiniment petites que subissent successivement la courbe variable du faisceau dans l'une ou l'autre de ces séries, constituent une déformation finie, qui conduit de l'une des courbes données à l'autre. Il suffit donc de démontrer qu'aucune de ces déformations infiniment petites n'altère le nombre de tangentes doubles de la première espèce.

*) Nous appelons ici réelle toute courbe dont l'équation ne contient que des coëfficients réels.

On peut s'imaginer deux manières dont ce nombre pourrait être altéré: 1° si deux tangentes doubles de la première espèce coïncident pour devenir ensuite imaginaires, ou réciproquement, ou 2° si des tangentes doubles de première espèce se transforment en tangentes doubles de seconde espèce, ou réciproquement. La seule manière dont deux tangentes doubles d'une quartique peuvent coïncider, c'est si elle a un point double; car une quartique ne peut avoir, ni des tangentes triples, ni des tangentes doubles dont un des contacts soit du second ordre. Si une tangente double de première espèce à contacts réels se transforme en une tangente double de seconde espèce il faut que la branche tangente à la tangente double se divise en deux. Au moment de transition la courbe a un point double à branches réelles. Il n'existe aucune transition immédiate*) de tangentes doubles réelles à contacts imaginaires, à des tangentes doubles de seconde espèce.

Nous n'aurons donc à nous occuper que des transitions de la courbe variable du faisceau par les *courbes réelles données d'un point double,* et il sera permis de négliger les cas où d'autres singularités s'ajoutent au point double (tels que celui où la courbe a deux points doubles, ou un point d'inflexion coïncide avec le point double etc.). En effet, on peut éviter ces cas, qui ne se présentent que dans les faisceaux dont les constantes satisfont à des équations particulières, en disposant des positions des deux courbes données, ou en faisant subir à celles-ci des déformations assez legères pour n'affecter pas le nombre dont il s'agit — ce qui est possible, parceque les courbes données n'ont pas elles-mêmes des points doubles.

Un point double peut être réel ou imaginaire, et, dans le premier cas, avoir des branches réelles ou imaginaires. Notre faisceau ne contient aucune courbe réelle douée d'un *point double imaginaire*; car alors elle en aurait deux. Les deux tangentes doubles qui se confondent en une tangente menée d'un *point* isolé, sont de la seconde espèce; car un point isolé résulte du resserrement d'une branche qui va s'évanouir, ou il est le commencement d'une branche qui va naître. Dans le cas enfin d'un *point double à branches réelles***), les tangentes doubles de première espèce qui vont être imaginaires ou tangentes doubles de seconde espèce ont des contacts réels, et il n'y en a pas dont les contacts aillent être en même temps imaginaires, ou réciproquement. On doit donc prouver que le nombre de tangentes doubles de première

*) En des cas particuliers les deux transitions suivantes peuvent avoir lieu *à la fois*: 1° celle de tangente double à contacts imaginaires à tangente double d'une seule branche, et 2° celle à tangente double de seconde espèce. La dernière transition demande un point double.

**) On trouvera dans les n° 17. et suiv. une discussion de ce cas plus détaillée que nécessaire pour la démonstration actuelle.

espèce à contacts réels, reste inaltéré dans cette transition. Ce nombre est (nº 4.) la moitié de celui des inflexions réelles. Or, chacune des deux tangentes au point double est la position limite de trois tangentes d'inflexion, dont une seule est réelle soit avant soit après la transition par la courbe à point double*), et cette courbe singulière n'a pas d'autres tangentes d'inflexion coïncidentes. Donc, le nombre d'inflexions réelles ne subit aucune altération, et, par conséquent, le nombre dont il s'agit ni non plus.

Le nombre des tangentes doubles de première espèce d'une quartique sans points singuliers, a donc une valeur constante. Pour savoir quelle est cette valeur il suffit de connaître les tangentes doubles d'une seule courbe. Or la courbe qui a servi à Plücker d'exemple d'une quartique présentant 28 tangentes doubles réelles en a *quatre* qui sont de la première espèce. Donc etc.

Nous ajouterons à la démonstration dont nous nous sommes servis la remarque suivante. Un faisceau de quartiques ne contient pas en général d'autres courbes singulières**) — c'est à dire des courbes qui ont d'autres points ou tangentes singuliers qu'une courbe quelconque du faisceau — que celles qui ont un point double, et celles dont deux tangentes d'inflexion, coïncidant avec une tangente double, forment une tangente à contact du troisième ordre. Par ces tangentes doubles singulières se fait la transition de tangentes doubles de première espèce à contacts réels, à des tangentes doubles à contacts imaginaires. C'est donc seulement le nombre total des tangentes doubles de première espèce qui reste constant, et non pas ceux des deux classes de ces tangentes doubles.

6. Deux branches d'une quartique externes l'une à l'autre ont quatre tangentes communes, placées comme celles de deux coniques externes l'une à l'autre. Une cinquième, s'il y en avait, rencontrerait nécessairement la courbe en des points différents des points de contact, ce qui est impossible. Comme une quartique a 4, 3, 2, 1, 0 branches externes l'une à l'autre, elle aura 24, 12, 4, 0 tangentes doubles de seconde espèce. Le nombre total des tangentes doubles réelles sera donc 28, 16, 8, 4.

---

*) On le *voit* en faisant une figure; mais j'en ai aussi montré la raison algébrique dans les nºˢ 10—11 d'un Mémoire intitulé: *Almindelige Egenskaber* .... Recherche des propriétés générales des Systèmes de Courbes Planes, suivie d'une application à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires du 4ᵐᵉ ordre (imprimé avec un Résumé en français dans les Mémoires de l'*Académie danoise des Sciences,* Ser. V, Vol. 10).

**) La première et la troisième partie du Mémoire que je viens de citer contiennent des recherches sur les courbes singulières d'un système.

Plücker avait présumé*), et plus tard d'autres savants ont-ils prouvé (voir dans ce qui suit le nº 18.), que le nombre de tangentes doubles réelles ne peut avoir d'autres valeurs que 28, 16, 8, 4, 0; nous voyons ici qu'il faut aussi exclure le cas dernier.

Le nombre total des tangentes doubles de la première espèce d'une quartique étant égal à quatre, celui des tangentes doubles de la première espèce à contacts réels est au plus quatre. On voit donc qu'*une quartique ne peut avoir plus de 8 inflexions réelles.*

III. Propriétés des tangentes doubles de première espèce.

7. La propriété principale des tangentes doubles de première espèce est celle que nous avons déjà mentionnée (nº 3.), que tous les points d'intersection d'une de ces tangentes doubles avec les autres tangentes doubles de la quartique, se trouvent sur un seul des deux segments limités par les points de contact. En ayant égard à cette propriété on peut déduire les autres des propriétés générales des tangentes doubles.

On sait, par exemple, que toute tangente double d'une quartique est rencontrée par 27 des 63 systèmes de coniques ayant quatre contacts avec la quartique en des séries de couples en involution, et qu'à chacune de ces séries appartiennent le couple formé des points de contact, et cinq couples formés des points d'intersection avec dix autres tangentes doubles. Si la tangente double dont il s'agit est de la première espèce, on voit que toutes ces 27 involutions ont des points doubles réels. Mais nous n'insisterons pas à d'autres propriétés des tangentes doubles de la première espèce, que celles dont nous aurons à faire usage dans la classification des formes différentes des quartiques. C'est de ces propriétés que nous allons nous occuper.

8. Si les côtés d'un triangle ABC sont des tangentes doubles d'une quartique, D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2 étant les points de contact, on sait, suivant le théorème de Carnot, que

$$\frac{BD_1 \cdot BD_2}{CD_1 \cdot CD_2} \cdot \frac{CE_1 \cdot CE_2}{AE_1 \cdot AE_2} \cdot \frac{AF_1 \cdot AF_2}{BF_1 \cdot BF_2} = \pm 1 .$$

Aux cas où l'on sait seulement que le premier membre de cette équation est positif, on voit qu'il a la valeur de $+1$, et que, par conséquent, les six points de contact se trouvent sur une même conique. Or $\frac{BD_1 \cdot BD_2}{CD_1 \cdot CD_2} \lessgtr 0$, suivant que B et C *séparent* D_1 et D_2 ou non. Par conséquent, si, dans le triangle formé de trois tangentes doubles d'une quartique, aucun des couples de points de contact n'est séparé

*) Theorie der algebraischen Curven p. 253.

par les sommets du triangle, ou si deux couples sont séparés, les six points de contact se trouvent sur une même conique.

On trouve en particulier que *les points de contact de trois tangentes doubles de première espèce se trouvent sur une même conique*, et que du même *les points de contact d'une tangente double de seconde espèce, et ceux de deux tangentes doubles de première espèce qui ne séparent pas les points de contact de la tangente double de seconde espèce, se trouvent sur une conique.*

9. Si, de quatre couples de points, toutes les combinaisons à trois se trouvent sur des coniques, les quatre coniques ainsi déterminées coïncident. En effet, si l'on désigne par $\varphi = 0$ une de ces quatre coniques, et par $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ les droites dont les points d'intersection avec φ font trois des quatre couples, les autres coniques seront représentées par des équations des formes suivantes:

$$yz + a\varphi = 0,$$
$$zx + b\varphi = 0,$$
$$xy + c\varphi = 0,$$

où a, b et c sont des constantes. Toutes ces coniques doivent passer par les points du quatrième couple. Ces *deux* points doivent, par conséquent, satisfaire aux équations

$$ax \cdot \varphi = by \cdot \varphi = cz \cdot \varphi,$$

ce qui est impossible à moins que φ passe par un de ces points. Mais alors φ coïncide avex les trois autres coniques $C \cdot F \cdot D$.

En appliquant ce lemme aux tangentes doubles de première espèce, on voit que *tous les points de contact des tangentes doubles de la première espèce d'une quartique se trouvent sur une conique.* Ce théorème montre de nouveau que le nombre des tangents doubles de première espèce est au plus quatre (mais non pas qu'il a toujours cette valeur).

10. Le lemme du n° 9. nous fournit encore le théorème suivant:

*Aucun des triangles formés de trois tangentes doubles**) *de première espèce ne peut renfermer deux branches externes l'une à l'autre.*

En effet, s'il y en avait deux dans un seul triangle les points de contact des quatre tangentes communes aux deux branches se trouveraient (selon les n° 8 et 9.) sur la conique passant par les points de contact des tangentes doubles de première espèce. Cette conique rencontrerait ainsi la quartique en plus de 8 points, ce qui est impossible.

---

*) Trois droites forment, dans la géométrie projective, quatre triangles. Quatre droites forment trois quadrilatères et quatre triangles. Chaque segment, fait sur une des droites par les autres, est à la fois côté d'un quadrilatère et d'un triangle. Deux quelconques des droites contiennent des côtés consécutifs de deux quadrilatères, et des côtés opposés du troisième.

On conclut du théorème prouvé que toutes les branches de la courbe doivent se trouver, soit dans les trois quadrilatères, soit dans les quatre triangles, formés des quatre tangentes doubles de première espèce, et qu'aucune de ces sept parties du plan ne contient deux branches externes l'une à l'autre. Car un quadrilatère quelconque ajouté à un triangle quelconque, fait un triangle limité par trois tangentes doubles de première espèce.

IV. Énumération des formes des quartiques sans points multiples.

11. Quant à sa forme une quartique appartient toujours (selon les nos 2. et 10.) à une des trois classes suivantes:

Quartiques composées de deux branches dont l'une se trouve dans la partie du plan interne à l'autre. Nous appelons ces courbes, qui sont toujours renfermées dans un seul quadrilatère ou triangle*), *quartiques annulaires.*

Quartiques composées de trois branches, au plus, distribuées dans les trois quadrilatères. Nous appelons ces courbes *quartiques quadrilatérales.*

Quartiques composées de quatre branches, au plus, distribuées dans les quatre triangles. Nous appelons ces courbes *quartiques trilatérales.*

On aura des divisions ultérieures des quartiques en ayant égard, 1° au nombre des tangentes doubles de première espèce à contacts réels, et à la distribution de ces tangentes doubles aux différentes branches, ou 2° au nombre des branches réelles. Nous ne ferons usage que de la première de ces deux bases de division. Toutefois il sera clair qu'au moins les branches ayant des tangentes doubles de première espèce sont réelles.

12. Il s'agit notamment de se rendre compte des différentes positions que peut prendre la conique φ qui passe par les 8 points de contact des tangentes doubles de la première espèce. Comme tous ses deux points d'intersection avec une des droites, si elle en a de réels, se trouvent sur un seul des trois segments de la droite, elle pénètre, au plus, dans $r+1$ de sept parties du plan si elle a des intersections réelles avec r des quatre droites. Cette considération nous montrera l'impossibilité de quelques cas qui se présentent (voir III., IV. et VII. dans l'énumération suivante).

---

*) Nous désignons ici et dans ce qui suit, par les seuls mots de „quadrilatères" et „triangles" les trois quadrilatères et les quatre triangles que forment les tangentes doubles de première espèce. Nous y appliquerons aussi le nom commun de „parties du plan".

I. *La conique φ rencontre tous les côtés d'un quadrilatère.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans les quatre triangles.

II. *La conique φ rencontre trois côtés d'un quadrilatère et un côté d'un autre.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans trois des triangles; elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

III. *La conique φ rencontre deux côtés de deux quadrilatères.* On ne peut avoir des côtés opposés de tous les deux quadrilatères (voir la note du n° 10.), ni non plus des côtés consecutifs de tous les deux quadrilatères. En effet, dans ce dernier cas la conique pénètrerait dans six parties du plan (les deux quadrilatères et tous les quatre triangles, ce qu'on voit sans difficulté au moyen d'une figure). Il ne reste donc que le cas où *les côtés de l'un des quadrilatères sont opposés, eux de l'autre consécutifs.* Alors la conique pénètre seulement dans quatre parties du plan: les deux quadrilatères et deux triangles; elle rencontre aussi deux côtés de chacun de ceux-ci.

IV. *La conique φ rencontre deux côtés d'un quadrilatère, et un côté de chacun des deux autres.* On apercevra sans difficulté que les deux côtés du premier quadrilatère sont *opposés*, que la conique pénètre dans les trois quadrilatères et dans deux triangles, et qu'elle rencontre tous les trois côtés de l'un de ceux-ci.

V. *La conique φ rencontre trois côtés d'un quadrilatère.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans trois triangles.

VI. *La conique φ rencontre deux côtés opposés d'un quadrilatère et un côté d'un autre.* Elle pénètre alors dans les deux quadrilatères et dans deux triangles, et elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

VII. *La conique φ rencontre deux côtés consécutifs d'un quadrilatère, et un côté du quadrilatère où les côtés, segments des mêmes tangentes doubles que les deux côtés du premier quadrilatère, sont opposés.* Elle pénètre alors dans les deux quadrilatères et dans deux triangles, et elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

VIII. *La conique rencontre les trois côtés d'un triangle* (un côté de chacun des quadrilatères). Elle pénètre dans le triangle et dans les trois quadrilatères.

IX et X. *La conique φ rencontre deux côtés, soit opposés, soit consécutifs, d'un quadrilatère.* Elle pénètre dans le quadrilatère et dans deux triangles.

XI. *La conique φ rencontre deux côtés d'un triangle.* Elle pénètre dans le triangle et dans deux quadrilatères.

XII. *La conique φ rencontre un côté d'un quadrilatère* (triangle). Elle pénètre dans le quadrilatère et dans le triangle.

XIII. *La conique φ ne rencontre aucune des quatre droites.*

On voit sans difficulté que toutes les positions de φ, énumérées ici, sont possibles.

13. En indiquant les quartiques annulaires, quadrilatérales et trilatérales qui correspondent aux positions de la conique φ définies dans le n° précédent, nous aurons une énumération des différentes formes des quartiques qui sera, du moins, *complète*. Nous montrerons qu'elle n'est pas *trop étendue*, en donnant des exemples de toutes les formes énumérées.

Nous appellerons, dans notre énumération, *r-folium* une branche d'ordre pair, douée de r tangentes doubles de première espèce. Une branche d'ordre pair, sans aucune tangente double de première espèce ($r = 0$), s'appelle un ovale (quand même elle rencontre la droite à l'infini). Les nombres indiqués pour des ovales ne sont que des *maxima*; seulement une quartique annulaire deviendrait quadrilatérale ou trilatérale, si son ovale interne cessait d'être réel. Les nombres I., II. etc. indiquent, suivant le n° précédent, les positions des points de contact des tangentes doubles de première espèce. L'indication de ces positions fait une partie essentielle de la définition de chaque forme.

I.

1) Quartique annulaire, composée d'1 *quadrifolium* et d'1 ovale interne. (Fig. 1.)

2) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *quadrifolium* et de 2 ovales. (Courbe 1 de la fig. 2.)

3) Quartique trilatérale, composée de 4 *unifolia*. (Courbe 2 de la fig. 2.)

II.

4) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *trifolium*, d'1 *unifolium* et d'1 ovale. (Courbe 1 de la fig. 3.)

5) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium*, de 2 *unifolia* et d'1 ovale. (Courbe 2 de la fig. 3.)

III.

6) Quartique quadrilatérale, composée de 2 *bifolia* et d'1 ovale. (Courbe 1 de la fig. 4.)

7) Quartique trilatérale, composée de 2 *bifolia* et de 2 ovales. (Courbe 2 de la fig. 4.)

IV.

8) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 2 *unifolia*. (Courbe 1 de la fig. 5.)

9) Quartique trilatérale, composée d'1 *trifolium*, d'1 *unifolium* et de 2 ovales. (Courbe 2 de la fig. 5.)

V.

10) Quartique annulaire, composée d'1 *trifolium* et d'1 ovale interne.

11) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *trifolium* et de 2 ovales.

12) Quartique trilatérale, composée de 3 *unifolia* et d'1 ovale.

VI. et VII.

13) et 15) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium*, d'1 *unifolium* et d'1 ovale.

14) et 16) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium*, d'1 *unifolium* et de 2 ovales.

VIII.

17) Quartique annulaire, composée d'1 *trifolium* et d'un ovale interne.

18) Quartique quadrilatérale, composée de 3 *unifolia*.

19) Quartique trilatérale, composée d'1 *trifolium* et de 3 ovales.

IX. et X.

20) et 23) Quartique annulaire, composée d'1 *bifolium* et d'1 ovale interne.

21) et 24) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 2 ovales.

22) et 25) Quartique trilatérale, composée de 2 *unifolia* et de 2 ovales.

XI.

26) Quartique annulaire, composée d'1 *bifolium* et d'1 ovale interne.

27) Quartique quadrilatérale, composée de 2 *unifolia* et d'1 ovale.

28) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 3 ovales.

XII.

29) et 30) Quartique annulaire, composée d'1 *unifolium*, placé, soit dans un quadrilatère, soit dans un triangle, et d'1 ovale interne.

31) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *unifolium* et de 2 ovales.

32) Quartique trilatérale, composée d'1 *unifolium* et de 3 ovales.

XIII.

33) et 34) Quartique annulaire, composée d'un ovale, placé, soit dans un quadrilatère, soit dans un triangle, et un ovale interne.

35) Quartique quadrilatérale, composée de 3 ovales.

36) Quartique trilatérale, composée de 4 ovales.

Les 9 premières de ces différentes formes suffiront à donner une idée assez claire de la variété des formes des quartiques; car les autres n'en sont que les simplifications qu'on trouve si les contacts d'une ou plusieurs tangentes doubles deviennent imaginaires. Plusieurs de ces

dernières formes ne diffèrent entre elles que par la position, peu essentielle, de tangentes doubles à contacts imaginaires.

V. Démonstration de l'existence de toutes les formes énumérées.

14. On sait q'une quartique quelconque peut être représentée par une équation de la forme

$$(1) \qquad xyzu + k\varphi^2 = 0\,,$$

où $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$ sont quatre tangentes doubles dont les points de contact se trouvent sur une même conique $\varphi = 0$. Comme $xyzu$ change son signe toutes les fois que le point représenté franchit une des quatre tangentes doubles, cette quantité a un signe différent, suivant que le point se trouve dans un des quadrilatères ou dans un des triangles que forment ces quatre droites. Supposons, pour fixer les idées, que $xyzu < 0$ si le point se trouve dans un des quadrilatères, et que $xyzu > 0$ s'il se trouve dans un des triangles. Alors *tous les points de la quartique représentée par l'équation* (1) *se trouveront dans un des quadrilatères si* $k > 0$, *dans un des triangles, si* $k < 0$. Nous voyons ainsi que l'une des deux propriétés des quatre tangentes doubles de première espèce dont nous avons parlé à la fin du n° 10., est une propriété générale de quatre tangentes doubles dont les points de contact sont placés sur une conique.

Si les tangentes doubles sont de la première espèce il *faut* que la conique φ ait une des 13 positions énumérées dans le n° 12.; mais cette condition ne *suffit* pas. Cependant, on peut prouver que, pour ces positions de φ, *si k diffère peu de zéro, la courbe est une quartique quadrilatérale ou trilatérale ayant x, y, z, u pour tangentes doubles de première espèce.*

En effet, *si* $k = 0$ l'équation (1) représentera une courbe composée des quatre tangentes doubles. On voit ainsi que, si k diffère très peu de zéro, la courbe doit être composée, soit d'une seule branche dans chaque quadrilatère si $k > 0$, soit d'une seule branche dans chaque triangle si $k < 0$. Alors, suivant notre supposition sur la position de φ, aucune des quatre tangentes doubles ne peut être tangente à deux branches différentes. Elles sont donc de la première espèce, et la courbe est une quartique quadrilatérale ou trilatérale suivant que $k \gtrless 0$.

Comme toutes les 13 positions de la conique φ sont possibles, nous voyons, non seulement que toutes les différentes quartiques quadrilatérales et trilatérales que nous avons énumérées existent, mais aussi que leurs nombres d'ovales peuvent atteindre aux *maxima* que nous avons indiqués.

15. Aussi pour démontrer l'existence des *quartiques annulaires* nous ferons usage de l'équation (1). Commençons par supposer que

la conique φ soit tangente aux quatre droites x, y, z, u. Alors la conique φ se trouve nécessairement dans un des quadrilatères, formés par ces droites. Pour $k > 0$ le même quadrilatère contiendra une branche de la quartique, qui, aux points de contact de φ, a des contacts du 3me ordre avec les droites x, y, z, u, et qui reste par conséquent, au voisinage de ces points de contact, dans la partie du plan externe à la conique. Comme ces points sont les seuls où elle rencontre φ, elle entoure cette conique. Or on peut déterminer k ainsi que la quartique (1) passe par un point quelconque interne à la conique φ. Ce point appartient nécessairement à une branche de la courbe déterminée interne à celle dont nous venons de parler. La courbe est donc une quartique annulaire.

En faisant subir à une des quartiques annulaires qu'on trouve ainsi (où l'ovale interne ne se réduit pas à un point isolé) des altérations assez petites, pour que l'ovale interne ne s'évanouisse, ni ne se confonde avec la branche externe, on peut obtenir des exemples de toutes les quartiques annulaires, renfermées dans un quadrilatère, dont nous avons parlé. Il suffit de remplacer les tangentes x, y, z, u de la conique φ, par d'autres droites très voisines qui n'y sont plus tangentes.

Quant aux quartiques annulaires renfermées dans un triangle, on procède de la même manière, en commençant seulement du cas où φ est renfermée dans un des triangles formés par x, y, z, u, et tangente à ses côtés.

16. L'existence des 36 formes énumérées est donc démontrée; mais nous croyons bon de regarder encore, dans un certain cas, les variations d'une courbe du faisceau que représente l'équation (1)

$$xyzu + k\varphi^2 = 0\,,$$

si k est un paramètre variable. Le cas auquel nous nous bornons est celui où φ rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère, formé par x, y, z, u, en des points placés ainsi que le faisceau contienne des quartiques annulaires. Nous supposerons que la valeur de k croisse de 0 par ∞ à 0.

Pour $k = 0$, la courbe est composée de quatre droites; elle a donc six points doubles à branches réelles.

Pour de petites valeurs positives de k, la courbe est une quartique quadrilatérale (forme 2) douée de deux ovales réels. Pour des valeurs croissantes de k, ces ovales doivent disparaître, avant que la courbe devienne une quartique annulaire. Au moment de la disposition ils se réduisent à des points isolés. Il y a donc, dans cette série de quartiques quadrilatérales, faisant partie du faisceau, deux courbes douées

d'un point isolé (ou, en particulier, une courbe douée de deux points isolés).

La transition aux quartiques annulaires (forme 1) se fait par une courbe composée d'un *quadrifolium* et d'un point isolé interne. Ce point est le commencement d'un ovale interne, qui croît, jusqu'à ce qu'il se confond avec le quadrifolium, qui l'entoure, et qui s'est retréci jusqu'à présent. La courbe de transition est douée d'un point double à branches réelles.

Après cette transition, on rencontre une nouvelle série de quartiques quadrilatérales consistant en un seul *quadrifolium*, qui se retrécit de plus en plus, jusqu'à ce qu'il se divise en deux branches, puis en trois et enfin en quatre branches. Chacune de ces trois divisions se fait par une courbe présentant un point double à branches réelles. Les courbes à deux branches ont seulement deux des droites x, y, z, u pour tangentes doubles de première espèce, les courbes à trois branches, une, et, pour les courbes à quatre branches, toutes ces quatre tangentes doubles sont de la seconde espèce. Ces trois séries de courbes du faisceau peuvent présenter de différentes formes; on peut, *par exemple*, en rencontrer la suite suivante: quartiques trilatérales composées de deux *bifolia* (forme 7 sans ovales), puis quartiques quadrilatérales composées d'un *bifolium* et de deux *unifolia* (forme 8), et enfin quartiques trilatérales composées de quatre *unifolia* (forme 3). Quelque que soit du reste cette suite, qui peut consister en plus de trois formes différentes, on finira toujours, pour des valeurs de k croissant à l'infini, par trouver les courbes composées de quatre *unifolia* dont nous venons de parler; car, pour $k = \infty$, la courbe du faisceau se réduit à la conique double φ^2 ayant pour sommets*) les huit points d'intersection avec les droites x, y, z, u, et, par conséquent, pour de très grandes valeurs positives de k, elle doit être composée de quatre branches, qui tendent à couvrir deux fois les quatre arcs de la conique φ qui se trouvent dans le *quadrilatère*.

Dès que le paramètre k, après avoir été infini, prend des valeurs négatives, la courbe du faisceau, venant de couvrir deux fois les quatre arcs de φ qui se trouvent dans *les triangles*, devient de nouveau une quartique trilatérale composée de quatre unifolia; mais à présent les droites x, y, z, u en sont les tangentes doubles de la première espèce. Elle garde cette forme, jusqu'à ce qu'elle coïncide, pour $k = 0$, avec les quatre droites fixes.

Nous avons vu que la courbe du faisceau qui correspond à $k = 0$ a 6 points doubles. Elle compte donc pour 6 courbes du faisceau

---

*) On appelle *sommet* un point d'une courbe singulière d'un système qui a la propriété que toute droite passant par lui est tangente à la courbe.

douées de points doubles. Nous avons encore rencontré, dans le faisceau, 7 courbes réelles douées de points doubles; trois de ces points sont isolés, quatre ont des branches réelles. Il y a enfin dans le faisceau une conique double. Or on peut prouver*) qu'il y a, en général, dans un faisceau de quartiques 27 courbes douées de points doubles, mais qu'une conique double en absorbe 14. Nous voyons donc qu'il n'y a pas, dans le faisceau actuel, à côté des courbes réelles que nous avons nommées, des courbes imaginaires douées de points doubles.

VI. Quartiques douées de points doubles.

17. Les résultats que nous avons trouvés en étudiant les formes des quartiques générales, sont aussi applicables aux cas limites où les courbes présentent des points singuliers.

Seulement, on doit se rendre compte du nombre des tangentes doubles de la première espèce qui prennent alors des positions particulières. Si nous nous bornons aux courbes douées de points doubles, nous aurons à nous occuper séparément des espèces suivantes de points doubles: *1° points isolés, 2° points de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre, 3° points de connexion de deux branches, externes l'une à l'autre, 4° points d'intersection des deux parties d'une branche qui se divise en deux branches d'ordre impair, 5° points doubles imaginaires.*

18. *Un point isolé* n'est qu'un ovale infiniment petit, et les tangentes qu'on peut en mener aux autres branches de la courbe sont, nous l'avons dit dans le n° 5., des positions limites de tangentes doubles de la seconde espèce.

Une courbe présentant des points isolés est toujours une forme limite de courbes présentant (au moins) le même nombre d'ovales**); mais nous étant bornés, quant à la réalité des ovales des différentes formes, à en indiquer le nombre *maximum*, nous ne discuterons, ni non plus, combien de ces ovales peuvent se réduire, à la fois, à des points isolés.

19. Par un *point de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre* ne passe aucune droite réelle qui est tangente à la courbe en un autre point. Une courbe présentant de ces points doubles, comme une courbe présentant des points isolés, *garde donc toutes ses quatre tangentes doubles de première espèce.* Les différentes formes de ces courbes sont des limites de quartiques annulaires; elles n'ont donc

*) Voir mon Mémoire déjà cité sur les *Systèmes de Courbes* p. 83.

**) Nous ne parlons pas ici de points isolés formés par la coïncidence de *plusieurs* points doubles en cuspidaux.

pas d'autres branches que celles que joignent ces points singuliers. Il n'est pas difficile de prouver que, réciproquement, toute forme de quartiques annulaires, présentant r tangentes doubles à contacts réels, conduit à des courbes douées de $1, 2 \cdots r$ des points doubles dont nous nous occupons. S'il y a plus d'un de ces points on peut aussi les regarder comme des points de connexion de branches externes l'une à l'autre et jointes d'une manière cyclique (voir le n° suivant). Il n'existe pas des quartiques qui aient à la fois des points de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre, et d'autres points doubles.

20. Un *point de connexion de deux branches externes l'une à l'autre*, a la propriété, qui le distingue des points dont nous venons de parler, d'être centre d'un faisceau qui contient, soit des droites qui rencontrent encore en deux points la branche unique composée des deux branches qui forment le point double, soit des droites qui ne la rencontrent qu'en ce point. Les premières de ces droites sont séparées des dernières par deux droites tangentes à la branche dont il s'agit en des points différents du point double. Si l'on regarde la courbe comme limite de courbes où les deux branches sont séparées, chacune de ces deux tangentes est à la fois la position limite d'une tangente double de première espèce, et d'une tangente commune aux deux branches. Les tangentes menées du point double aux autres branches de la courbe sont des positions limites de tangentes doubles de seconde espèce. On voit donc que *les tangentes menées du point double absorbent deux tangentes doubles de première espèce.* La courbe en a donc encore deux.

On aurait aussi pu considérer la courbe comme limite de courbes dont une seule branche tend à se diviser en deux. Alors toutes les tangentes menées du point double sont des limites de tangentes doubles imaginaires, pendant que les deux tangentes communes aux deux branches sont des limites de tangentes doubles de première espèce.

Si une quartique a plusieurs points de connexion de branches externes l'une à l'autre, et qu'on la regarde comme limite de courbes où ces branches sont séparées, on voit — de la même manière, à peu près, que dans les cas où il n'y avait qu'un seul de ces points — que chacun de ces points doubles est position limite de points de contact de deux tangentes doubles de première espèce. Il s'ensuit que, pour déduire les formes de quartiques douées de ces points des formes de quartiques générales, énumérées dans le n° 13., il faut seulement faire passer la conique φ par des points d'intersection des tangentes doubles de première espèce, ou faire coïncider deux de ces tangentes doubles (à contacts réels). Dans ce dernier cas la courbe est composée de deux branches liées par deux points doubles d'une manière *cyclique,* c'est à dire ainsi qu'elles *divisent la partie du plan externe à elles en*

deux parties. Alors on peut aussi regarder la courbe comme composée de deux branches d'ordre pair qui se rencontrent en deux points. — Deux branches peuvent aussi avoir deux points de connexion sans être liées d'une manière cyclique. Cela arrivera si la conique φ passe par deux sommets opposés d'un quadrilatère: alors deux branches des quartiques quadrilatérales, limites des formes 2, 4 et 6 de l'énumération au nº 13., forment une seule branche complète d'ordre pair, qui passe deux fois par chacun des sommets du quadrilatère, et qui rencontre toute droite en deux ou quatre points. — Si deux tangentes doubles de première espèce à contacts réels coïncident, en même temps que la conique φ passe par le point d'intersection des deux autres, on obtient une courbe dont les deux branches, liées d'une manière cyclique, ont encore un troisième point de connexion: Ces deux branches forment une seule branche complète d'ordre pair à trois points doubles, qui rencontre toute droite en deux ou quatre points. — Trois branches peuvent être liées, *soit* les deux à la troisième par deux points de connexion, *soit* les deux entre elles (d'une manière non cyclique) par deux points de connexion, et la troisième à une d'elles par un troisième point de connexion, *soit* d'une manière cyclique par trois points de connexion. Dans tous ces trois cas les trois branches en forment une seule. — Quatre branches peuvent être liées, *soit* d'une manière *successive* par trois points de connexion, *soit* les trois à la quatrième par trois points de connexion. Les quatre branches en forment une seule. — Pour compléter ces considérations on pourrait regarder aussi des quartiques composées de deux coniques.

Une courbe ayant des points de connexion de branches externes l'une à l'autre peut avoir, en même temps, des points isolés.

21. *Deux branches d'ordre impair dont se compose une branche d'ordre pair* d'une quartique ont la propriété de rencontrer toute droite en un ou en trois points. Comme, de plus, le nombre total des intersections d'une droite avec les deux branches est au plus quatre, ces deux branches ne se rencontrent qu'en un seul point, qui est un *point double* de la quartique, et le faisceau de droites par ce point double se divise en quatre parties, dont les deux contiennent des droites rencontrant encore en deux points l'une ou l'autre des deux branches, les deux autres, qui séparent les deux premières, des droites qui ne rencontrent des deux branches qu'au point double. Les limites de ces quatre parties du faisceau sont quatre droites tangentes aux deux branches en des points différents du point double. Deux de ces tangentes se trouvent dans l'une, et deux, dans l'autre des deux parties du plan séparées par les deux branches. Si la branche composée est la limite d'une série de branches d'ordre pair ordinaires, l'une des deux parties du plan devient externe, l'autre interne. Les deux tangentes

qui se trouvent dans la partie externe sont les positions limites des quatre tangentes doubles de première espèce, les deux tangentes dans la partie interne sont les limites de quatre tangentes imaginaires, qui vont être tangentes doubles de la première espèce, si, par la courbe singulière, il se fait une transition à des courbes où les parties externe et interne du plan sont changées entre elles.

On voit ainsi qu'une branche d'ordre pair qui tend à se diviser en deux branches d'ordre impair a quatre tangentes doubles de première espèce à contacts réels, et, par conséquent, 8 inflexions. Chacune des deux branches d'ordre impair a donc 3 inflexions réelles, ce qui est aussi, comme pour la branche d'ordre impair d'une cubique, une conséquence de la circonstance qu'elles rencontrent toute droite en un ou trois points.

Une quartique douée d'une des branches composées qui nous occupent peut avoir encore une seule branche, qui est nécessairement un ovale. Celui-ci peut être joint à un des branches d'ordre impair par un point double, ou se réduire à un point isolé. On peut obtenir toutes ces formes en assujétissant des quartiques composées d'une cubique et d'une droite qui n'en rencontre que la branche d'ordre impair en un seul point à des petites altérations. Pour les déduire des formes générales du n° 13., il faut faire coïncider les tangentes doubles de première espèce deux à deux, et faire passer la conique φ par leur point d'intersection.

22. Si une quartique réelle est douée de *deux points doubles imaginaires* quatre tangentes doubles coïncident avec la droite réelle qui joint ces deux points singuliers. On peut donc regarder la quartique comme courbe de transition de courbes où deux de ces tangentes doubles sont réelles à des courbes où elles sont imaginaires: alors les deux autres passeront en même temps de l'imaginaire au réel. En effet, comme le nombre de tangentes doubles de première espèce doit rester constant, il faut que la courbe variable en reprenne autant qu'elle perd. Or les tangentes doubles qui coïncident, au moment de transition, avec la droite joignant les deux points doubles sont de la première espèce tant qu'elles sont réelles, leurs points de contact étant imaginaires. Par conséquent, comme deux d'entre elles sont réelles avant, et imaginaires après la transition, il faut que les deux autres se comportent de la manière inverse. On voit ainsi que *la droite joignant les deux points doubles imaginaires absorbe deux tangentes doubles de la première espèce.* La courbe singulière en a donc encore deux.

On peut déduire les différentes formes de quartiques douées de deux points doubles imaginaires des formes 23—36 de quartiques gé-

nérales énumérées dans le n° 13., en faisant coïncider deux tangentes doubles de première espèce à contacts imaginaires. Comme, dans ce cas, la différence des triangles et des quadrilatères cesse, on obtient ainsi chaque forme deux fois. On voit que la courbe est renfermée dans deux triangles qui ont pour base commune un segment de la droite joignant les deux points doubles, pendant que leurs deux autres côtés sont des segments différents des deux tangentes doubles de première espèce, et qu'aucun de ces deux triangles ne contient des branches externes l'une à l'autre. La quartique peut avoir un point isolé ou un point de connexion de deux branches, mais aucun des points doubles dont nous avons parlé au n° 21.

VII. Applications à l'étude des surfaces du troisième ordre.

23. M. Geiser, dans son intéressant mémoire sur les tangentes doubles d'une quartique*), a montré qu'il est possible d'inscrire à un cône quelconque du quatrième ordre des surfaces du troisième ordre qui passent par le sommet du cône. On prend pour plan tangent z de la surface cubique en ce point un des 28 plans tangents doubles du cône. Si $\varphi_2 = 0$ est l'équation d'un cône du second ordre passant par les génératrices de contact de ce plan, l'équation du cône quartique est de la forme

$$z\varphi_3 - \varphi_2{}^2 = 0.$$

On voit donc que l'équation

$$\varphi_3 + 2\,\varphi_2 u + u^2 z = 0,$$

où $u = 0$ est un plan qui ne passe pas par le sommet, réprésente une surface cubique inscrite au cône.

Si le cône quartique donné et son plan tangent double z sont réels, il suffit, pour trouver une surface cubique réelle, de prendre pour φ_2 et u un cône et un plan réels. Or, nous avons prouvé que toute quartique plane a au moins, quatre tangentes doubles réelles; un cône quartique a donc au moins quatre plans tangents doubles réels. On voit ainsi *qu'il est toujours possible d'inscrire à un cône quartique réel des surfaces cubiques réelles.* Par conséquent, on peut appliquer à *toute* quartique plane des résultats déduits de propositions sur les surfaces cubiques, lors même que, dans ces propositions, on a égard à la réalité.

24. Nous pouvons, en nous servant d'un procédé réciproque à celui dont nous venons de parler, appliquer quelques-uns des résultats relatifs aux quartiques planes que nous avons trouvés, à l'étude des surfaces cubiques.

---

*) Mathematische Annalen I.

Nous avons vu (n° 6.) que le nombre total des tangentes doubles d'une quartique a toujours une des valeurs suivantes 28, 16, 8, 4. Or, les plans tangents doubles des cônes circonscrits à une surface cubique, et ayant pour sommets des points de la surface, sont 1° le plan tangent de la surface au sommet, et 2° les plans qui joignent le sommet aux droites de la surface. On voit ainsi qu'une surface cubique contient 27, 15, 7, 3 droites réelles, résultat trouvé par M. Schläfli*).

Nous avons vu, de plus, que le nombre des tangentes doubles de première espèce d'une courbe quartique est toujours égal à quatre. Si on prend pour sommets de cônes circonscrits à une même surface cubique différents points de cette surface, tous ces cônes auront les mêmes nombres totaux de plans tangents doubles. Ils auront, par conséquent, aussi les mêmes nombres de plans tangents doubles de seconde espèce, c'est à dire de plans tangents communs à deux nappes complètes. [Nous appelons nappe camplète d'un cône la partie du cône qui projette une branche complète d'une courbe plane.] *Le cône circonscrit à une surface cubique douée de 27, 15 ou 7 droites réelles (1^re^, 2^me^, 3^me^ species de M. Schläfli), et ayant un point de la surface pour sommet, sera donc composée de 4, 3, 2 nappes complètes externes l'une à l'autre.*

Le cône circonscrit à une cubique douée de 3 droites réelles ne consistera qu'en 1 ou 0 nappes ou en 2 dont l'une est interne à l'autre. Dans ce cas la surface peut être composée d'une nappe d'ordre pair et d'une nappe d'ordre impair (4^me^ species), ou seulement d'une nappe d'ordre impair (5^me^ species) **). Une droite menée d'une nappe d'ordre pair d'une surface cubique ne peut être tangente à la nappe d'ordre impair; mais d'un point d'une nappe d'ordre impair on peut toujours mener des tangentes, soit à cette même nappe, soit à la nappe d'ordre pair s'il y en a, et ces tangentes doivent appartenir à de différentes nappes du cône. On voit ainsi qu'*un cône quartique circonscrit à une surface cubique de la 4^me^ species, n'a aucune nappe réelle si le sommet se trouve sur la nappe d'ordre pair de la surface, mais une nappe interne à une autre si le sommet se trouve sur la nappe d'ordre impair de la surface.*

Un cône quartique circonscrit à une surface cubique de la 5^me^ species consiste en une seule nappe. En effet, suivant une remarque que

*) *Quart. Math. Journal* vol. II, et *Philosophical Transactions* vol. 153, 1863.

**) C'est M. Klein qui a montré que la surface est, dans ces deux cas, respectivement de la 4^me^ et de la 5^me^ species (Phys. med. Societät zu Erlangen 5 mai 1873). Nous le montrerons d'une autre manière dans le n° 26.

nous venons de faire, il a au moins une nappe. S'il avait encore une nappe interne, la surface cubique devrait se trouver soit entre les deux cônes, soit dans les parties de l'espace interne au cône interne et externe au cône externe. Dans le premier cas le sommet du cône serait un point singulier de la surface, et dans le second cas la surface aurait une nappe d'ordre pair, et serait, par conséquent, de la *4me species*.

25. Si le sommet du cône quartique est placé sur une droite réelle de la surface, cette droite devient une génératrice double du cône. Les plans tangents au cône le long de la droite sont les plans tangents de la surface aux points doubles de l'involution, formée par les couples de points de contact de la surface avec les plans passant par la droite. Cas deux plans tangents peuvent être réels ou imagiginaires; dans le dernier cas la droite est génératrice isolée du cône. Par la droite passent encore les plans tangents au cône qui sont: 1° le plan tangent à la surface au sommet du cône, et 2° les cinq plans qui contiennent les couples de droites de la surface qui rencontrent la droite donnée. Le premier plan est réel, les autres sont réels ou imaginaires.

Comme le nombre de nappes du cône quartique circonscrit est indépendant de la position du sommet sur la surface, les cônes à génératrice double ne sont pas des formes de transition à des cônes ayant une autre connexion des nappes, mais seulement des formes limites: les mêmes nappes et les mêmes plans tangents doubles sont réels avant et après le passage du sommet de l'un côté d'une droite de la surface à l'autre*). Aux plans tangents doubles, réels avant et après le passage, appartiennent toujours le plan tangent de la surface au sommet du cône, et le plan, qui tend à coïncider avec celui-ci, passant par la droite de la surface dont il s'agit, et, par conséquent, au moins deux autres plans tangents doubles qui tendent à coïncider. On voit donc que la génératrice double ne peut être une génératrice de connexion d'une nappe avec une nappe interne, ni non plus une génératrice de connexion de deux nappes qui sont réunies avant et après le passage du sommet au delà de la droite. Mais elle peut être une génératrice isolée, ou une génératrice de connexion de deux nappes, externes l'une à l'autre, qui sont séparées avant et après le

*) Dans le système de courbes d'intersections d'un plan avec les cônes circonscrits dont les sommets se trouvent sur une courbe C de la surface, la courbe d'intersection avec le cône ayant pour sommet un point d'intersection de la courbe C avec une droite de la surface, compte pour un nombre *pair* (6) de courbes à point double.

passage, ou une génératrice d'intersection de deux nappes d'ordre impair résultant de la division d'une nappe d'ordre pair. (Voir les nos 17. — 21.) Dans le dernier cas, deux (ou quatre s'il y a une nappe interne) des plans tangents réels au cône singulier qui passent par sa génératrice double sont des positions limites de plans tangents doubles imaginaires. Chacun de ces plans réels renferme donc deux droites imaginaires de la surface.

26. Ces considérations fournissent une nouvelle démonstration des théorèmes de M. Schläfli*) sur la réalité des plans des triangles formés par trois droites de la surface.

1re et 2me species. Aucune des 4 ou 3 nappes ne peut se diviser en deux nappes d'ordre impair (n° 21.). Un cône circonscrit dont le sommet est placé sur une des 27 ou 15 droites a donc cette droite pour génératrice isolée, ou pour génératrice de connexion de deux nappes. On voit donc que par chacune des droites réelles de la surface passent 5 *(1re species)* ou 3 *(2me species)* plans de triangle, et que toutes les droites de ces plans sont réelles. On trouve ainsi 45 ou 15 plans réels.

3me species. Si la génératrice double d'un cône circonscrit dont le sommet est placé sur une des 7 droites de la surface, est une génératrice isolée ou génératrice de connexion de 2 nappes du cône, un seul plan de triangle passe par elle. Si, au contraire, la génératrice est droite d'intersection de deux nappes d'ordre impair, tous les 5 plans de triangle qui passent par elle sont réels, et dans 3 de ces plans toutes les droites sont réelles (voir 21.). La droite rencontre dans le premier cas seulement 2 autres droites de la surface, dans le dernier, toutes les six autres droites. Le plan d'un triangle formé par trois droites réelles, est donc rencontré par toutes les autres 4 droites en des points d'une seule de ces trois droites. On voit ainsi que *tous les plans de triangle passent par une seule droite, et qu'il y en a 5,* dont les deux contiennent des couples de droites imaginaires.

4me species. Comme les cônes quartiques circonscrits n'ont plus des nappes externes l'une à l'autre, on ne trouve pas ici des cônes ayant une génératrice de connexion, ni non plus des cônes ayant une génératrice isolée; car par celle-ci, s'il y en avait, on ne pourrait mener des plans tangents réels. Les seuls cônes à génératrice double qu'on trouve ici ont une nappe composée de deux nappes d'ordre impair. Une autre nappe se trouve du côté qui devient l'interne si le sommet s'éloigne de la droite. *Par chacune des 3 droites réelles de la surface passent donc 5 plans de triangles,* dont les quatre contiennent

*) Loc. cit.

des couples de droites imaginaires. Il y a, en tout, 13 plans de triangle réels.

5^{me} *species*. Ce cas est analogue au précedent. Comme le cône n'a plus aucune nappe interne, seulement *3 plans de triangle passent par chacune des 3 droites réelles de la surface:* deux de ces 3 plans contiennent des couples de droites imaginaires. Le nombre total des plans de triangle réels est 7.

15 octobre 1873.

Ueber den grössten gemeinsamen Factor.

Von GORDAN in GIESSEN.

Herr Brill hat (Annalen IV. Bd. S. 530) einen Determinantensatz veröffentlicht, dessen Illustration der Gegenstand dieser Untersuchung sein soll. Ich will ihn hier dazu benutzen, um einige Eigenschaften des grössten gemeinsamen Factors zweier Functionen einer Veränderlichen herzuleiten.

Der Brill'sche Satz kann folgendermassen ausgedrückt werden:

„I. Es seien:

$$rn \text{ Grössen } x_{ik} \text{ und } sn \text{ Grössen } u_{ik}$$

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rn} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{s1} & u_{s2} & \dots & u_{sn} \end{vmatrix}$$

gegeben, wo wir r und s so wählen, dass:

$$r + s = n$$

ist. Zwischen diesen n^2 Grössen mögen rs Relationen:

$$(1) \qquad u_{k1} x_{i1} + u_{k2} x_{i2} \dots\dots\dots u_{kn} x_{in} = 0$$

bestehen. Die r-reihigen Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{1i_1} & x_{1,i_2} & \dots & x_{1,i_r} \\ x_{2,i_1} & \dots & \dots & x_{2,i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r,i_1} & \dots & \dots & x_{r,i_r} \end{vmatrix} = (i_1, i_2 \dots i_r)_x$$

des Systems der x sind alsdann den s-reihigen Determinanten

$$(k_1 k_2 \dots k_s)_u$$

des Systems der u proportional, welche ihnen der Art entsprechen, dass die Indices:

$$i_1 i_2 \dots\dots i_r k_1 \dots\dots k_s$$

eine Permutation der Zahlen:

$$1 2 \dots n$$

bilden."

Wir wollen aus diesem Brill'schen Satze einen andern herleiten, indem wir zunächst die sn Grössen u_{ik} durch die Coefficienten c_{ik} von r Functionen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi_1 = c_{1,n}x^{n-1} + c_{1,n-1}x^{n-2} \dots \dots c_{11} \\ \psi_2 = c_{2,n}x^{n-1} + c_{2,n-1}x^{n-2} \dots \dots c_{2,1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \psi_s = c_{s,n}x^{n-1} + c_{s,n-1}x^{n-2} \dots \dots c_{s,1}, \end{cases}$$

sodann aber die rn-Grössen x_{ik}

$$x_{i,k} = \pi_i^{k-1}$$

durch die Potenzen von r Grössen:

$$\pi_1; \quad \pi_2; \dots \pi_r$$

ersetzen. Wir erhalten durch diese Einsetzung folgenden neuen Satz:

„II. Haben die s-Gleichungen:

$$\psi_1 = 0 \dots \psi_s = 0$$

die r Wurzeln:

$$\pi_1, \quad \pi_2 \dots \pi_r$$

gemein, so sind die r reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \dots i_r)_\pi$ des Potenzensystems:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \pi_1^2 & \dots & \pi_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_r & \pi_r^2 & \dots & \pi_r^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(wo $\begin{vmatrix} \pi_1^{i_1-1} & \dots & \pi_1^{i_r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_r^{i_1-1} & \dots & \pi_r^{i_r-1} \end{vmatrix} = (i_1 \dots i_r)_\pi$ gesetzt ist) den s-reihigen Determinanten $(k_1, k_2 \dots k_s)_c$ des Coefficientensystems:

$$\begin{vmatrix} c_{k_1 1} & \dots \dots & c_{k_1 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k_s 1} & \dots \dots & c_{k_s n} \end{vmatrix}$$

proportional, welche ihnen so entsprechen, dass:

$$i_1 i_2 \dots i_r k_1 \dots k_s$$

eine Permutation der Zahlen $1 \dots n$ ist."

Zunächst will ich den Brill'schen Satz in dieser zweiten Form dazu anwenden, um gewisse bekannte Relationen zwischen den Coefficienten und Wurzeln *einer* Gleichung herzustellen.

Die Gleichung:

$$f = a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} \dots a_0$$

möge die Wurzeln:

$$\pi_1, \quad \pi_2 \dots \pi_\mu$$

besitzen. Setzt man im Satze II. $n = \mu + 1$; $r = \mu$; $s = 1$ und ersetzt man ψ_1 durch f, so gelangt man zu folgendem Satze:

„III. Die Coefficienten

$$a_{i_{\mu+1}}$$

einer Gleichung $f = 0$ sind den μ reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \ldots i_\mu)$ des Grössensystems:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \ldots\ldots\ldots & \pi_1{}^\mu \\ 1 & \pi_2 & \ldots\ldots\ldots & \pi_2{}^\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 1 & \pi_\mu & \ldots\ldots\ldots & \pi_\mu{}^\mu \end{vmatrix}$$

proportional multiplicirt mit $+ 1$ oder $- 1$, je nachdem die Anzahl der Inversionen der Permutation:

$$i_1, i_2 \ldots\ldots i_{\mu+1}$$

grade oder ungrade ist.“ —

Etwas verwickeltere Beziehungen zwischen den Coefficienten a und den Wurzeln π kann man folgendermassen erhalten. — Ersetzt man in dem Satze II. die Functionen ψ durch die Functionen

$$f, xf, x^2f, \ldots\ldots x^{\mu-1}f,$$

so gelangt man zu dem folgenden Satz:

„IV. Die μ-reihigen Determinanten $(i_1 \ldots\ldots i_\mu)_\pi$ des Systems der Wurzeln sind den ν-reihigen Determinanten $(i_{\mu+i} \ldots\ldots i_{\mu+\nu})_a$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu+1} & \ldots\ldots & a_0 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & a_\mu & \ldots\ldots\ldots & a_0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & a_\mu & \ldots\ldots & a_0 \end{vmatrix}$$

proportional.“

Für $\nu = 1$ geht dieser Satz in den vorigen über.

Ist in dem vorigen Satze $\mu = 1$, also:

$$f = a_1 x + a_0$$

so werden die Determinanten des Systems:

$$1\ \pi_1\ \pi_1{}^2 \ldots\ldots \pi_1{}^\nu$$

denen des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & a_1 & a_0 & \ldots\ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & a_1\ \ a_0 \end{vmatrix}$$

proportional. Hieraus lässt sich leicht der folgende Satz ableiten:

V. „Die Potenzen:

$$1\; x\; x^2 \ldots . x^\mu$$

sind den μ-reihigen Determinanten des Systems:

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & -x & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -x & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -x \end{vmatrix}$$

gleich.“

Aus dem Satze IV. lassen sich Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln *mehrerer* Gleichungen ableiten.

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} \ldots . a_0 \\ \varphi &= b_\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots . b_0 \end{aligned}$$

mögen die Wurzeln haben:

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu; \quad \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$$

Die Determinanten:

$$(i_1\, i_2 \ldots . i_\nu)_a \text{ und } (i_{\nu+1}\, i_{\nu+2} \ldots i_{\mu+\nu})_b$$

sind dann nach Satz IV. den Determinanten:

$$(i_{\nu+1}\, i_{\nu+2} \ldots . i_{\mu+\nu})_\alpha \text{ und } (i_1\, i_2 \ldots . i_\nu)_\beta$$

proportional, die Proportionalitätsfactoren haben die Werthe:

$$\frac{\begin{vmatrix} a_\mu & \ldots & \ldots & a_{\mu-\nu+1} \\ 0 & a_\mu & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_\mu & \ldots & \alpha_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}} = \frac{a^\nu}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)} \text{ und } \frac{b_\nu^\mu}{\Pi(\beta_i - \beta_k)}$$

und man hat also die Identität:

$$\Sigma(i_1 \ldots i_\nu)_a \cdot (i_{\nu+1} \ldots . i_{\mu+\nu})_b = \frac{a_\mu^\nu\, b_\nu^\mu}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)\, \Pi(\beta_i - \beta_k)}\, \Sigma(i_1 \ldots . i_\nu)_\beta (i_{\nu+1} \ldots . i_{\mu+\nu})_\alpha \,.$$

Nun ist nach dem Zerlegungssatz einer Determinante in Partialdeterminanten-Producte:

$$T = \begin{vmatrix} a_\mu \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, a_0 \; 0 \,.\,.\,.\,.\, 0 \\ 0 \;\; a_\mu \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, a_0 \,.\,.\,.\,. \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, a_\mu \,.\,.\,.\, a_0 \\ b_\nu \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, b_0 \; 0 \,.\,.\,.\, 0 \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, b_\nu \,.\,.\,.\, b_0 \end{vmatrix} = \Sigma_i (i_1 \ldots i_\nu)_a \,.\, (i_{\nu+1} \ldots i_{\mu+\nu})_b$$

$$\begin{vmatrix} 1 \; \alpha_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \alpha_1^{\mu+\nu-1} \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ 1 \; \alpha_\mu \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \alpha_\mu^{\mu+\nu-1} \\ 1 \; \beta_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \beta_1^{\mu+\nu-1} \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ 1 \; \beta_\nu \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \beta_\nu^{\mu+\nu-1} \end{vmatrix} \doteq \Sigma_i (i_1 \ldots\ldots i_\nu)_\beta \, (i_{\nu+1} \ldots i_{\mu+\nu})_\alpha$$

$$= \Pi(\alpha_i - \alpha_k)\, \Pi(\beta_i - \beta_k)\, \Pi(\alpha_i - \beta_k)$$

mithin ist:

$$T = a_\mu^{\,\nu}\, b_\nu^{\,\mu}\, \Pi(\alpha_i - \beta_k)$$

In ähnlicher Weise, wie wir so eben die Determinante T aus den Coefficienten zweier Gleichungen zusammengesetzt haben, kann man auch Determinanten aus denen von mehr Gleichungen bilden.

Wir wollen uns hier auf die Untersuchung von 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} \ldots\ldots\ldots a_0 = 0 \\ \varphi &= b_\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots\ldots\ldots b_0 = 0 \\ \psi &= c_\varrho x^\varrho + c_{\varrho-1} x^{\varrho-1} \ldots\ldots\ldots c_0 = 0 \end{aligned}$$

beschränken, und ihre Wurzeln durch:

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu ; \quad \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu ; \quad \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_\varrho$$

bezeichnen. Wir bilden aus ihnen das System der Formeln:

$$\begin{aligned} f &= 0; \quad xf = 0; \ldots\ldots x^{N-\mu-1} f = 0 \\ \varphi &= 0; \quad x\varphi = 0; \ldots\ldots x^{N-\nu-1} \varphi = 0 \\ \psi &= 0; \quad x\psi = 0; \ldots\ldots x^{N-\varrho-1} \psi = 0 \end{aligned}$$

welche linear in den N Potenzen sind:

$$1,\; x,\; x^2 \ldots\ldots x^{N-1}$$

und wählen N so, dass die Anzahl unserer Formeln ebenfalls N ist, also:

$$N = N - \mu + N - \nu + N - \varrho = \frac{\mu + \nu + \varrho}{2}$$

Die Determinante unseres Systems:

$$S = \begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & a_{\mu-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & \dots & 0_0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b_\nu & b_{\nu-1} & \dots & b_0 \\ c_\varrho & c_{\varrho-1} & c_{\varrho-2} & \dots & c_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & c_\varrho & c_{\varrho-1} & \dots & c_0 \end{vmatrix}$$

kann folgendermassen transformirt werden.

Nach Satz III. sind den $(N-\mu)$-reihigen Determinanten $(i_1 i_2 \dots i_{N-\mu})_a$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 & 0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

den μ-reihigen Determinanten $(i_{N-\mu+1}, i_{N-\mu+1} \dots i_N)_\alpha$ des Systems

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{N-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_2^{N-1} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_\mu & \alpha_\mu^2 & \dots & \alpha_\mu^{N-1} \end{vmatrix}$$

proportional, der Proportionalitätsfactor ist:

$$\frac{a_\mu^{N-\mu}}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)}.$$

Ordnet man nun S nach Producten von Unterdeterminanten der $N-\mu$ 1ten Zeilen, trägt für diese ihre Werthe ein und wendet sodann den Multiplicationssatz an, so entsteht die Formel:

$$S \,.\, \Pi(\alpha_i - \alpha_k)$$

$$= a_\mu^{N-\mu} \begin{vmatrix} \alpha_1^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\nu-2}\varphi(\alpha_1) \dots \varphi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\varrho-1}\psi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\varrho-2}\psi(\alpha_2) \dots \psi(\alpha_2) \\ \alpha_2^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_2) & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_\varrho^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_\varrho) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ordnet man diese Determinante nach Producten von Unter-Determinanten aus den $N-\nu$ ersten und $N-\varrho$ letzten Colonnen, so wird:

$$S \,.\, \Pi(\alpha_i-\alpha_k) = a_\mu^{N-\mu}\, \Sigma \varphi(\alpha_{i_1})\varphi(\alpha_{i_2})\ldots\varphi(\alpha_{i_{N-\nu}})\psi(\alpha_{i_{N-\nu+1}})\ldots\psi(\alpha_{i_\varrho})\,\cdot$$

$$\tau \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{i_1} & \alpha_{i_1}^2 & \ldots & \alpha_{i_1}^{N-\nu-1} \\ 1 & \alpha_{i_2} & \alpha_{i_2}^2 & \ldots & \alpha_{i_2}^{N-\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{i_{N-\nu}} & \alpha_{i_{N-\nu}}^2 & \ldots & \alpha_{i_{N-\nu}}^{N-\nu-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{i_{N-\nu+1}} & \ldots & \alpha_{i_{N-\nu+1}}^{N-\varrho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{i_\varrho} & \ldots & \alpha_{i_\varrho}^{N-\varrho-1} \end{vmatrix}$$

wo die Summation sich über alle Combinationen $i_1, i_2 \ldots i_{N-\nu}$ der Zahlen $1 \ldots . \mu$ erstreckt und τ das Vorzeichen $+1$ oder -1 bedeutet, ja nachdem die Permutation $i_1 \cdots i_\varrho$ eine grade oder ungrade Anzahl Inversionen besitzt.

Die Determinanten rechter Hand sind gleich Producten von Differenzen der α; hebt man dieselben gegen das Product linker Hand weg, so wird:

$$(4^a) \qquad S = \alpha_\mu^{N-\mu}\, \Sigma_i \frac{\varphi(x) \cdots \varphi(\alpha_{i_{N-\nu}})\,\psi(\alpha_{i_{N-\nu+1}}) \cdots \psi(\alpha_{i_\mu})}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\nu} \prod\limits_{s=N-\nu+1}^{s=\mu} (\alpha_{i_r}-\alpha_{i_s})}\,\tau\,.$$

In ähnlicher Weise kann man die beiden andern Formeln ableiten:

$$(4^b) \qquad S = (-1)^{(N-1)(N-\mu)}\, b_\nu^{N-\nu}\, \Sigma_i \frac{\psi(\beta_{i_1}) \cdots \psi(\beta_{i_{N-\varrho}})\, f(\beta_{i_{N-\varrho+1}}) \cdots f(\beta_{i_\nu})}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\varrho} \prod\limits_{s=N-\varrho+1}^{s=\nu} (\beta_{i_r}-\beta_{i_s})}\,\tau$$

$$(4^c) \qquad S = (-1)^{(N-1)\varrho}\, c_\varrho^{N-\varrho}\, \Sigma_i \frac{f(\gamma_{i_1}) \cdots f(\gamma_{i_{N-\mu}})\, \varphi(\gamma_{i_{N-\mu+1}}) \cdots f(\gamma_{i_\varrho})}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\mu} \prod\limits_{s=N-\mu+1}^{s=\varrho} (\gamma_{i_r}-\gamma_{i_s})}\,\tau\,.$$

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, dass die Formeln f und φ die λ Wurzeln:

$$\pi_1, \pi_2 \ldots \ldots \pi_\lambda$$

gemeinsam haben und dass dieselben mit den Wurzeln:

$$\alpha_\mu, \alpha_{\mu-1} \ldots \ldots \alpha_{\mu-\lambda+1}$$

von f und:

$$\beta_\nu, \beta_{\nu-1} \ldots \ldots \beta_{\nu-\lambda+1}$$

von φ übereinstimmen, dass also die Ausdrücke:

$$f(\pi_1) \ldots f(\pi_\lambda), \quad \varphi(\pi_1) \ldots . \varphi(\pi_\lambda)$$

identisch verschwinden.

Wir wollen zwei Fälle untersuchen, in denen:

$$\lambda > \frac{\mu+\nu-\varrho}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$$

ist. — Im ersten Falle verschwinden in der Formel (4^a) alle Glieder rechter Hand, da in der Zahlenreihe:

$$i_1, i_2 \ldots \ldots i_{N-\nu}$$

mindestens eine der Zahlen:

$$\mu,\ \mu-1\,..\,\mu-\lambda+1$$

vorkommt, also mindestens einer der Factoren:

$$\varphi(\alpha_{i_1})\,.\,.\,.\,.\,.\,\varphi(\alpha_{i_{N-\nu}})$$

verschwindet. — Hieraus folgt der Satz:

VI. „Haben die Gleichungen f und φ mehr als:

$$\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$$

Wurzeln gemein, so verschwindet die Determinante S für beliebige Werthe der Coefficienten c. Es verschwinden dann die ϱ-reihigen Determinanten des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_\mu & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_\nu & b_{\nu-1} & \dots & b_0 \end{vmatrix}.$$

(Man kann diesen Satz auch direct beweisen.)

In dem zweiten Falle, wo:

$$\lambda = \frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$$

ist, verschwinden alle Glieder rechter Hand, bei denen die Combination

$$i_1,\ i_2\,.\,.\,.\,.\,i_{N-\nu}$$

eine der Zahlen: $\mu,\ \mu-1,\ \mu-2\,.\,.\,.\,\mu-\lambda+1$ enthält, es bleibt also nur das Glied übrig, wo die Combination:

$$i_1,\ i_2\,.\,.\,.\,i_{N-\nu}$$

mit der Combination

$$1,\ 2\,.\,.\,.\,.\,N-\nu$$

übereinstimmt. Statt der Formel II. haben wir in diesem Falle die Relation:

$$S = a_\mu^{N-\mu}\,\frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})\,\psi(\alpha_{N-\nu+1})\cdots\cdots\psi(\alpha_\mu)}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\nu}\ \prod\limits_{s=N-\nu+1}^{s=\mu}(\alpha_r-\alpha_s)}$$

oder:

$$S = a_\mu^{N-\mu}\,\frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})\,\psi(\pi_1)\cdots\cdots\psi(\pi_{\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}})}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\nu}\ \prod\limits_{s=1}^{s=\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}}(\alpha_r-\pi_s)}\,. \tag{5}$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

VII. „Die Determinante S verschwindet in 2 Fällen:

1. Wenn f und φ mehr als $\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$ Wurzeln gemein haben.

Tafel I. (Bd. VII, S. 410.)

Fig. 1.

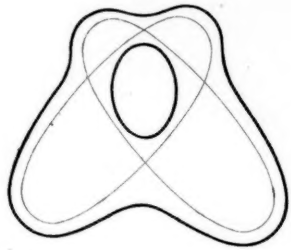


Fig. 3

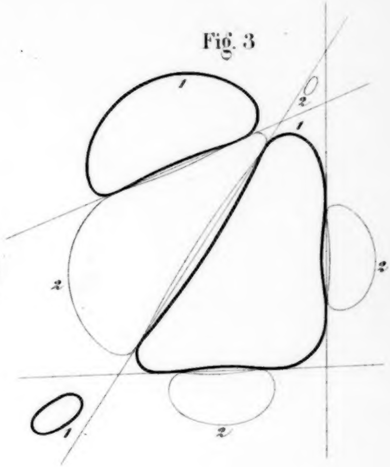
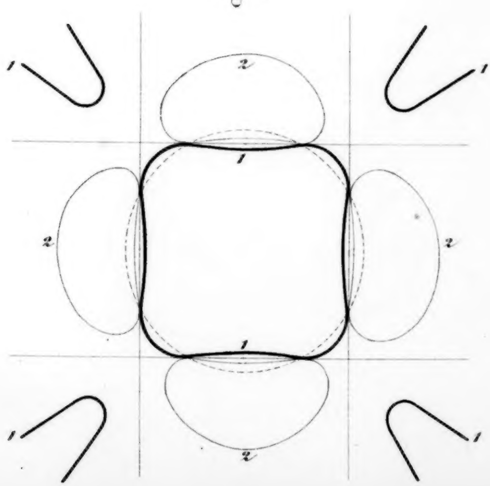


Fig. 2.



Tafel II. (Bd. VII, S. 410.)

Fig. 4.

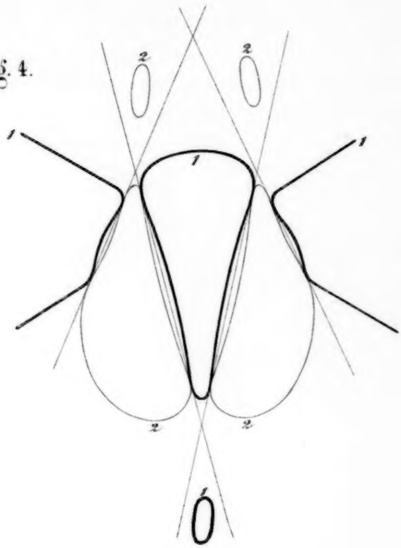
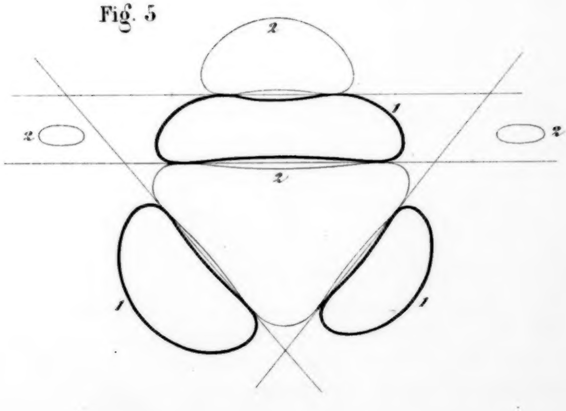


Fig. 5



2. Wenn f und φ $\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$ Wurzeln gemein haben und eine dieser Wurzeln ψ befriedigt."

Der zweite Theil lässt sich sehr leicht direct nachweisen.

Die obigen Formeln geben uns die Mittel an die Hand, den grössten gemeinsamen Factor:

$$\Theta = \Theta_\lambda x^\lambda + \Theta_{\lambda-1} x^{\lambda-1} \ldots\ldots \Theta_0 = \Theta_\lambda (x-\pi_1)(x-\pi_2)\ldots(x-\pi_\lambda)$$

der Functionen f und φ zu berechnen.

Zunächst erhält man Relationen zur Bestimmung der Coefficienten Θ_i mit Hülfe des Satzes IV. Nach demselben sind die ϱ-reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \ldots . i_\varrho)_\Theta$ des Systemes:

$$\left|\begin{array}{cccccc} \Theta_\lambda & \Theta_{\lambda-1} \ldots\ldots & \Theta_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Theta_\lambda & \ldots\ldots & \Theta_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \Theta_\lambda & \ldots & \Theta_0 \end{array}\right|$$

der Coefficienten der Formeln:

$$(6^a) \qquad \Theta = 0; \quad x\Theta = 0 \ldots\ldots x^{\varrho-1}\Theta = 0$$

den $N-\varrho$-reihigen Determinanten $(i_{\varrho+1} \ldots i_N)$ des Systems:

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & \pi_1 & \ldots\ldots & \pi_1^{N-1} \\ 1 & \pi_2 & \ldots\ldots & \pi_2^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_{N-\varrho} & \ldots\ldots & \pi_{N-\varrho}^{N-1} \end{array}\right|$$

proportional. Nach Satz II. sind nun die ϱ-reihigen Determinanten $(i_1 \ldots . i_\varrho)_{ab}$ des Systems:

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_\mu & a_{\mu-1} \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_\mu & \ldots & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_\nu & \ldots & b_0 \end{array}\right|$$

der Formeln:

$$(6^b) \quad f=0;\ xf=0 \ldots x^{N-\mu-1}f=0;\ \varphi=0;\ x\varphi=0 \ldots\ldots x^{N-\nu-1}\varphi=0$$

gleichfalls den Determinanten $(i_{\varrho+1} \cdots i_N)_\pi$ proportional, mithin auch den Determinanten $(i_1 \ldots i_\varrho)_\Theta$. Aus diesen Proportionen lassen sich die Grössen Θ bestimmen. Man kann diese Relationen auch daraus folgern, dass das Formelsystem (6^b) eine lineare Folge des Systems (6^a) ist.

Um Θ direct zu berechnen, ersetze man die Gleichung $\psi = 0$ durch die Gleichung

$$x - \xi = 0,$$

die Determinante S geht durch diese Substitution in die Determinante:

$$S_1 = 0 \left| \begin{array}{l} a_\mu \;\; a_{\mu-1} \;\; a_{\mu-1} \cdots\cdots a_0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_0 \\ b_\nu \;\; b_{\nu-1} \cdots\cdots\cdots b_0 \;\; 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \;\; 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_0 \\ 0 \;\; 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1 \;\; -\xi \;\; 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \;\; 1 \;\; -\xi \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1 \;\; -\xi \end{array} \right|$$

über. Derselbe hat nach F. (5) den Werth:

$$S_1 = a_\mu^{N-\mu} \frac{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})(\pi_1-\xi)(\pi_2-\xi)\cdots(\pi_\lambda-\xi)}{\prod(\alpha_r-\pi_s)}$$

(7) $$S_1 = \frac{(-1)^\lambda}{\Theta_\lambda} a_\mu^{N-\mu}\, \Theta(\xi)\, \frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})}{\prod(\alpha_r-\pi_s)}$$

ist also dem grössten gemeinsamen Factor von f und φ proportional. — Man kann ihr nach Satz V. die Form geben:

(8) $$\left| \begin{array}{l} a_\mu x^\lambda + a_{\mu-1} x^{\lambda-1} \cdots a_{\mu-\lambda} \cdot \;\; a_{\mu-1} \cdots a_0 \;\; 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ a_\mu x^{\lambda-1} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{\mu-\lambda+1} \;\; a_{\mu-2} \cdots\cdots a_0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_0 \\ b_\nu x^\lambda + b_{\nu-1} x^{\lambda-1} \cdots b_{\nu-\lambda} \;\; b_{\nu-1} \cdots b_0 \;\; 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ b_\nu x^{\lambda-1} \cdots\cdots\cdots\cdots b_{\nu-\lambda+1} \;\; b_\nu \cdots\cdots b_0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_0 \end{array} \right| = S_1 .$$

Wir sind oben, um die Resultante zweier Functionen f und φ vom m^{ten} und n^{ten} Grade zu bilden, von dem Formelsystem:

(9) $$f=0;\; xf=0 \ldots x^{n-1}f=0;\; \varphi=0;\; x\varphi=0 \ldots\ldots x^{m-1}\varphi=0$$

ausgegangen, und haben die Determinante T ihrer Coefficienten gebildet. Man kann nun, ohne den Werth T zu ändern, Combinationen dieser Formeln einführen. (Vgl. Baltzers Determinanten. 3. Aufl. S. 169.)

Wählen wir $n \geqq m$ und bezeichnen wir den Quotienten:

(10) $$F(x, y) = \frac{f(x)\,\varphi(y) - \varphi(x)\,f(y)}{x-y} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\, x^{i-1} y^{k-1},$$

so werden erstens die Coefficienten c_{ik} und c_{ki} einander gleich.

Ferner werden die Gleichungen:

(11) $$\begin{cases} \psi_1 = c_{1,n-1}\, x^{n-1} + c_{1,n-2}\, x^{n-2} \ldots\ldots\ldots c_{11} = 0 \\ \psi_2 = c_{2,n-1}\, x^{n-1} + c_{2,n-2}\, x^{n-2} \ldots\ldots\ldots c_{21} = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \psi_n = c_{n,n-1}\, x^{n-1} + c_{n,n-2}\, x^{n-2} \ldots\ldots\ldots c_{n1} = 0 \end{cases}$$

Combinationen der Formeln (9) und werden wie diese durch die gemeinsamen Wurzeln:

$$\pi_1,\ \pi_2 \ldots\ldots \pi_\lambda$$

von f und φ befriedigt; endlich ist die Determinante:

(12) $$R = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots\ldots & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots\ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{n,1} & \ldots & \ldots\ldots & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

gleich der Resultante T von f und φ.

Die Partialdeterminanten dieser Determinante sind:

$$\frac{\partial_\lambda R}{\partial c_{i_1,k_1}\,\partial c_{i_2,k_2} \cdots \partial c_{i_\lambda,k_\lambda}} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{i_{\lambda+1},k_{\lambda+1}} & \ldots\ldots\ldots & c_{i_{\lambda+1},k_n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{i_n,k_{\lambda+1}} & \ldots\ldots\ldots & c_{i_n,k_n} \end{vmatrix}$$

wo $i_1\, i_2 \ldots . i_n$; $k_1 \ldots k_n$ irgend welche Permutationen der Zahlen $1 \ldots . n$ bedeuten und ε die Zahl $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl der Inversionen in diesen beiden Permutationen zusammen grade oder ungrade ist. — Ich will diese Partialdeterminanten durch

$$\binom{i_1\, i_2 \ldots . i_\lambda}{k_1\, k_2 \ldots . k_\lambda}_c = \binom{k_1\, k_2 \ldots . k_\lambda}{i_1\, i_2 \ldots . i_\lambda}_c$$

bezeichnen.

Da die Wurzeln π die Gleichungen (11) befriedigen, so folgt aus Satz II., dass die Determinanten $\binom{i_1\, i_2 \ldots i_\lambda}{k_1\, k_2 \ldots k_\lambda}_c$ aus den Coefficienten der $n-\lambda$ Formeln $\psi_{k_{\lambda+1}} \ldots \psi_{k_n}$ den Determinanten $(i_1 i_2 \ldots i_\lambda)_\pi$ (vgl. Satz II.) proportional sind, dass also der Quotient:

$$\frac{\binom{i_1\, i_2 \ldots . i_\lambda}{k_1\, k_2 \ldots . k_\lambda}_c}{(i_1\, i_2 \ldots . i_\lambda)_\pi}$$

von der Indices i unabhängig ist. — Da aus dem nämlichen Grunde der Quotient:

$$\frac{\begin{pmatrix} k_1 k_2 \dots k_\lambda \\ i_1 i_2 \dots i_\lambda \end{pmatrix}_c}{(k_1 k_2 \dots k_\lambda)_\pi}$$

von den Indices k unabhängig ist, so folgt hieraus, dass der Quotient:

$$\frac{\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix}_c}{(i_1 \dots i_\lambda)_\pi (k_1 \dots k_\lambda)_\pi}$$

von den Indices i und k unabhängig ist. Dieser Quotient hat den Werth:

$$(13) \qquad \frac{\begin{pmatrix} 1\, 2 \dots \lambda \\ 1\, 2 \dots \lambda \end{pmatrix}_c}{(1 \dots \lambda)_\pi^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1\, 2 \dots \lambda \\ 1\, 2 \dots \lambda \end{pmatrix}_c}{\Pi(\pi_i - \pi_k)^2} = C,$$

wir wollen ihn durch C bezeichnen und gelangen so zu dem Formelsystem:

$$(14) \qquad \begin{pmatrix} i_1 \dots i_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix}_c = C (i_1 \dots i_\lambda)_\pi (k \dots k_\lambda)_\pi .$$

Um diese Formeln in eine einzige zusammenzuziehen, führe ich 2λ neue Functionen ein:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= p_{1,n} x^{n-1} + p_{1,n-1} x^{n-2} \dots p_{11} \\
P_2(x) &= p_{2,n} x^{n-1} + p_{2,n-1} x^{n-2} \dots p_{21} \\
&\dots \\
P_\lambda(x) &= p_{\lambda,n} x^{n-1} + p_{\lambda,n-1} x^{n-2} \dots p_{\lambda,1} \\
Q_1(x) &= q_{1,n} x^{n-1} + q_{1,n-1} x^{n-2} \dots q_{11} \\
&\dots \\
&\dots \\
Q_\lambda(x) &= q_{\lambda,n} x^{n-1} + q_{\lambda,n-1} x^{n-2} \dots q_{\lambda,1}
\end{aligned}$$

und transformire die Determinante:

$$(15) \qquad U = \begin{vmatrix}
c_{11} \dots c_{1n} & p_{11} \dots p_{\lambda 1} \\
\dots & \dots \\
\dots & \dots \\
c_{n1} \dots c_{nn} & p_{1n} \dots p_{\lambda n} \\
q_{11} \dots q_{1n} & 0 \dots 0 \\
\dots & \dots \\
\dots & \dots \\
q_{\lambda 1} \dots q_{\lambda n} & 0 \dots 0
\end{vmatrix} .$$

Man kann für dieselbe leicht den Werth finden:

$$U = \Sigma \binom{i_1\, i_2 \ldots .\, i_\lambda}{k_1\, k_2 \ldots .\, k_\lambda}_c (i_1\, i_2 \ldots i_\lambda)_p\, (k_1\, k_2 \ldots k_\lambda)_q\,,$$

wo sich die Summe über alle Combinationen $i_1 \ldots . i_\lambda$, $k_1 \ldots . k_\lambda$ der Zahlen $1 \ldots .. n$ erstreckt. — Nach Formel (14) erhalten wir demnach:

$$(16)\quad U = C\, \Sigma_i (i_1\, i_2 \ldots i_\lambda)_\pi (i_1 i_2 \ldots i_\lambda)_p\, \Sigma_k (k_1 \ldots . k_\lambda)_p (k_1 \ldots . k_\lambda)_\pi\,.$$

Nun ist nach dem Multiplikationssatze:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \ldots & \pi_1^{n-1} \\ 1 & \pi_2 & \ldots & \pi_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_\lambda & \ldots & \pi_\lambda^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1,n-1} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{\lambda 1} & p_{\lambda 2} & \ldots & p_{\lambda, n-1} \end{vmatrix} = \Sigma_i (i_1 i_2 \ldots i_\lambda)_\pi (i_1 \ldots i_\lambda)_p$$

$$= \begin{vmatrix} P_1(\pi_1) & P_1(\pi_2) & \ldots & P_1(\pi_\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_\lambda(\pi_1) & \ldots & \ldots & P_\lambda(\pi_\lambda) \end{vmatrix}$$

und ebenso:

$$\Sigma_k (k_1 \ldots k_\lambda)_\pi (k_1 \ldots k_\lambda)_q = \Sigma \pm Q_1(\pi_1) \ldots .. Q_\lambda(\pi_\lambda)\,,$$

mithin:

$$(17)\quad U = C\, \Sigma \pm P_1(\pi_1) \ldots . P_\lambda(\pi_\lambda)\, \Sigma \pm Q_1(\pi_1) \ldots \ldots Q_\lambda(\pi_\lambda)\,.$$

Um den grössten gemeinsamen Factor:

$$\Theta(x) = \Theta_\lambda x^\lambda \ldots \ldots \Theta_0$$

zu erhalten, gehe ich von der Relation aus:

$$\Theta(x) \cdot \Pi(\pi_i - \pi_k) = \Theta_\lambda \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^\lambda \\ 1 & \pi_1 & \ldots & \pi_1^\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_\lambda & \ldots & \pi_\lambda^\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \Theta_\lambda \left[(2,3 \ldots \lambda+1)_\pi - x(1,3,4 \ldots \lambda+1)_\pi \ldots \ldots (-1)^\lambda (1,2,3 \ldots \lambda)_\pi x^\lambda\right]$$

und wende darauf die Formel (14) an. Es wird dann:

$$\frac{1}{\Theta_\lambda}\,C(1\,\ldots\,\lambda)_\pi\,\Theta(x)\,\Pi(\pi_i-\pi_k)$$
$$=\binom{1\ldots\ldots\lambda+1}{1\ldots\ldots\lambda}_c - x\binom{1\,2\ldots\,\lambda+1}{1\,2\ldots\lambda}_c\ldots\ldots(-1)^\lambda\binom{1\,2\ldots\lambda+1}{1\,2\ldots\lambda}_c x^\lambda,$$

also nach Formel (13):

$$\frac{1}{\Theta_\lambda}\,(1\ldots\lambda)_c\,(1\ldots\lambda)_\pi\,\Theta(x)$$
$$=\begin{vmatrix} c_{\lambda+1,\lambda+1}x^\lambda + c_{\lambda+1,\lambda}x^{\lambda-1}\ldots\ldots c_{\lambda+1,1} & c_{\lambda+1,\lambda+2} & c_{\lambda+1,\lambda+3}\ldots\ldots c_{\lambda+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,\lambda+1}\;x^\lambda + c_{n,\lambda}\;x^{\lambda-1}\ldots\ldots c_{n,1} & c_{n,\lambda+2} & c_{n,\lambda+3}\ldots\ldots c_{n,n} \end{vmatrix};$$

mithin stellt die Determinante rechter Hand den grössten gemeinsamen Factor von f und φ dar. In ähnlicher Weise kann man viele Determinanten bilden, welche dem Θ proportional sind, man kann alle diese Bildungen in eine einzige Formel zusammen fassen.

Um dieselbe zu erhalten, führe ich $n-\lambda=\mu$ neue Variable:

$$x_1,\;x_2\;\ldots\;x_\mu$$

ein und bilde die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1\;x_1\;\ldots\ldots\;x_1^{n-1} \\ \ldots\ldots \\ 1\;x_\mu\;\ldots\ldots\;x_\mu^{n-1} \\ 1\;\pi_1\;\ldots\ldots\;\pi_1^{n-1} \\ \ldots\ldots \\ 1\;\pi_\lambda\;\ldots\ldots\;\pi_{\lambda-1} \end{vmatrix} =$$

$$=\Pi(x_i-x_k)\,\Pi(\pi_i-\pi_k)\,\Pi(x_i-\pi_k)=\frac{1}{\Theta_\lambda^\mu}\Pi(x_i-x_k)\,\Pi(\pi_i-\pi_k)\,\Pi\,\Theta(x_i)\,.$$

Ordnet man sie nach Producten von Partialdeterminanten, so erhält man für sie die Summe:

$$\Sigma_i\,\varepsilon\,(i_1\;i_2\;\ldots\;i_\mu)_x\,(i_{\mu+1}\;\ldots\;i_n)_\pi\;,$$

welche sich über alle Combinationen $i_1\ldots i_\mu$ von $1\ldots n$ erstreckt und worin ε das Vorzeichen bedeutet, welches in bekannter Weise von der Permutation der i abhängt.

So entsteht die Formel:

$$\Theta_\lambda^\mu\,\Sigma_i\,\varepsilon\,(i_1\ldots i_\mu)_x\,(i_{\mu+1}\ldots\ldots i_n)_\pi=\Pi(x_i-x_k)\,\Pi(\pi_i-\pi_k)\,\Pi\,\Theta(x_i)$$

und wenn man μ neue Variable

$$y_1,\ y_2\ \ldots\ y_\mu$$
einführt, auch:

$$\Theta_\lambda^\mu\, \Sigma_k\, \varepsilon (k_1 \ldots k_\mu)_y (k_{\mu+1} \ldots k_n)_\pi = \Pi(y_i - y_k)\, \Pi(\pi_i - \pi_k)\, \Pi\Theta(y_i).$$

Multiplicirt man diese beiden Formeln mit einander und wendet die Formel (14) an, so wird:

$$\Theta_\lambda^{2\mu}\, \Sigma\varepsilon \begin{pmatrix} i_{\mu+1} & i_{\mu+2} & \ldots & i_n \\ k_{\mu+1} & k_{\mu+2} & \ldots & k_n \end{pmatrix}_c (i_1 \ldots i_\mu)_x (k_1 \ldots k_\mu)_y$$
$$= C\, \Pi(x_i - x_k)\, \Pi(y_i - y_k)\, \Pi(\pi_i - \pi_k)^2\, \Pi\Theta(x_i)\,\Theta(y_i)\,,$$

oder nach Formel (13):

$$(18)\quad \Theta_\lambda^{2\mu}\, \Sigma_{i,k}\,.\,(i_1 \ldots i_\mu)_x (k_1 \ldots k_\mu)_y\ \Sigma \pm c_{i_1,k_1} c_{i_2,k_2} \ldots c_{i_\mu,k_\mu}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda \\ 1 \ldots \lambda \end{pmatrix}_c \Pi(x_i - x_k)\, \Pi(y_i - y_k)\, \Pi\Theta(x_i)\,\Theta(y_i)\,.$$

Nun ist nach dem Multiplicationssatze:

$$\begin{vmatrix} c_{1,k_1} & c_{2,k_1} & \ldots & c_{n,k_1} \\ c_{1,k_2} & c_{2,k_2} & \ldots & c_{n,k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1,k_\mu} & c_{2,k_\mu} & \ldots & c_{n,k_\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\mu & \ldots & x_\mu^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_i (i_1 \ldots i_\mu)_x\, \Sigma \pm c_{i_1,k_1} c_{i_2,k_2} \ldots c_{i_\mu,k_\mu} = \begin{vmatrix} \psi_{k_1}(x_1) & \psi_{k_1}(x_2) & \ldots & \psi_{k_1}(x_\mu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{k_\mu}(x_1) & \psi_{k_\mu}(x_2) & \ldots & \psi_{k_\mu}(x_\mu) \end{vmatrix}$$

und ebenso:

$$(19)\quad \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & \ldots & \psi_n(x_1) \\ \psi_1(x_2) & \ldots & \ldots & \psi_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x_\mu) & \psi_2(x_\mu) & \ldots & \psi_n(x_\mu) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \ldots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & \ldots & y_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & y_\mu & \ldots & y_\mu^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= \Sigma_k (k_1 \ldots k_\mu)_y\, \Sigma \pm \psi_{k_1}(x_1)\, \psi_{k_2}(x_2) \ldots \psi_{k_\mu}(x_\mu)$$
$$= \begin{vmatrix} F(x_1, y_1) & F(x_1, y_2) & \ldots & F(x_1, y_\mu) \\ F(x_2, y_1) & F(x_2, y_2) & \ldots & F(x_2, y_\mu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F(x_\mu, y_1) & F(x_\mu, y_2) & \ldots & F(x_\mu, y_\mu) \end{vmatrix} = V,$$

mithin:

$$\Theta_\lambda^{2\mu}\, V = \binom{1\,.\,.\,.\,\lambda}{1\,.\,.\,.\,\lambda}_c \Pi(x_i - x_k)\, \Pi(y_i - y_k)\, \Pi\Theta(x_i)\, \Theta(y_i)\,.$$

Sieht man hier x_1 als variabel, die übrigen Grössen x, y als constant an, so ist der Quotient:

$$\frac{V}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3) \cdots\cdots (x_1 - x_\mu)}$$

der grösste gemeinsame Factor von f und φ.

Giessen, im October 1873.

ant

Quadratische Transformationen des elliptischen Differentiales

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}}$$

unter der Voraussetzung $f(xxx) = 0$.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Die Transformation dritter Ordnung des Differentiales

$$\frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{\sqrt{a x_1^4 + 4 b x_1^3 x_2 + \cdots + c x_2^4}}$$

lässt sich bekanntlich in eleganter Weise an die Invariantentheorie knüpfen und ist in diesem Sinne nach dem Vorgange Hermite's und Cayley's noch jüngst von Clebsch in seiner Theorie der binären Formen ausführlich dargelegt worden. Den Ausgangspunkt der hierzu gehörigen Untersuchungen bildet eine merkwürdige typische Darstellung des simultanen Systems von zwei binären cubischen Formen. Da drei ternäre quadratische Formen in ganz analoger Weise typisch dargestellt werden können (vgl. Hermite in Band 57 des Borchardt'schen Journals S. 373), so lassen sich ähnliche Ergebnisse für die quadratischen Transformationen des Differentiales

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 f' x_1 + c_2 f' x_2 + c_3 f' x_3}, \quad f \equiv a_{111} x_1^3 + 3 a_{112} x_1^3 x_2 + \cdots + 6 a_{123} x_1 x_2 x_3 = 0,$$

erwarten. Sollen in der That drei ternäre Formen zweiten Grades χ_i $(i = 1, 2, 3)$ so bestimmt werden, dass vermöge der Substitutionen

$$\varrho x_1 = \chi_1 (u_1 u_2 u_3) \quad \varrho x_2 = \chi_2 (u_1 u_2 u_3) \quad \varrho x_3 = \chi_3 (u_1 u_2 u_3)$$

der Ausdruck

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 f'(x_1) + c_2 f'(x_2) + c_3 f'(x_3)}$$

in einen von der Form übergeht

$$\frac{\Sigma \pm k_1 u_2 du_3}{k_1 X'(u_1) + k_2 X'(u_2) + k_3 X'(u_3)},$$

worin

$$X(u_1 u_2 u_3) \equiv b_{111} u_1^3 + 3 b_{112} u_1^2 u_2 + \cdots + 6 b_{123} u_1 u_2 u_3 = 0,$$

so kann man nach den eben erwähnten Resultaten Hermite's von vornherein annehmen, dass die χ_i die partiellen Differentialquotienten

einer und derselben ganzen homogenen Function dritten Grades $\chi(u_1 u_2 u_3)$ seien. Der Zweck der vorliegenden Note ist, drei solche Formen χ anzugeben, für deren jede die Gleichungen

$$\varrho x_i = \frac{\partial \chi}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

eine solche Substitution bilden.

Die Contravariante $S_f = S_f(u_1 u_2 u_3)$ der Form f*) geht durch die Transformation

$$(1) \qquad u_1 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 \qquad u_2 = f_2 \qquad u_3 = f_3$$

über in:

$$S_f(f_1, f_2, f_3) = \tfrac{3}{2} Sf^2 - \tfrac{1}{6}\Delta^2 \text{**)} = \tfrac{1}{6}(3\sqrt{S}f - \Delta)(3\sqrt{S}f + \Delta).$$

Hieraus und aus den Formeln, die in der Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan S. 51 entwickelt sind, ergiebt sich unmittelbar, dass unter Voraussetzung der Gleichungen

$$S_f = 0 \text{ und } \Psi = 3\sqrt{S}f + \Delta = 0$$

mit dem Systeme (1) gleichzeitig auch die Relation besteht:

$$\frac{\Sigma \pm c_1 u_2 d u_3}{c_1 \frac{\partial S_f}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial S_f}{\partial u_2} + c_3 \frac{\partial S_f}{\partial u_3}} = \frac{18\,\Delta\,\Sigma \pm k_1 x_2 d x_3}{(3\sqrt{S}f - \Delta)\left(k_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}\right)}$$
$$= \frac{-9\,\Sigma \pm k_1 x_2 d x_3}{k_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}},$$

worin die k_i, wie die c_i, völlig willkührlich sein können. Lässt man in der letzten Gleichung an Stelle der Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ von f die Coefficienten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ der Conjugirten P_f treten, so erhält man nach den von mir in Bd. IV. dieser Zeitschr. S. 144—163 bewiesenen Resultaten den Satz:

I. *Unter Zugrundelegung der Gleichungen*

$$\Delta = \tfrac{1}{36}\,\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0 \text{ und } \mathsf{P} = 3 P_f + \sqrt{R} S_f = 0$$

wird vermöge der Substitutionen

$$x_1 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial P_f}{\partial u_1} \qquad x_2 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial P_f}{\partial u_2} \qquad x_3 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial P_f}{\partial u_3}:$$

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 d x_3}{c_1 \Delta'(x_1) + c_2 \Delta'(x_2) + c_3 \Delta'(x_3)} = \frac{-36\sqrt{R}\,\Sigma \pm k_1 u_2 d u_3}{k_1 \mathsf{P}'(u_1) + k_2 \mathsf{P}'(u_2) + k_3 \mathsf{P}'(u_3)}.$$

---

*) Die hier angewandte Bezeichnungsweise stimmt genau mit der von mir in Band IV. dieser Zeitschrift S. 144—163 angegebenen überein.

**) Vgl. Gordan in Band I. dieser Zeitschrift S. 106, Tafel X, 2.

Mit Hülfe dieses Theoremes lassen sich nun auch leicht drei quadratische Transformationen finden, welche das Differential

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 d x_3}{c_1 f'(x_1) + c_2 f'(x_2) + c_3 f'(x_3)}$$

selbst in ein anderes gleicher Art verwandeln.

Es giebt bekanntlich drei Formen φ, für welche $\Delta\varphi = f$. Setzt man nämlich $\varphi = \varkappa f - \lambda\Delta$, so wird $\Delta(\varkappa f - \lambda\Delta) = f$, sobald $\varkappa$ und λ den Gleichungen genügen

$$G_1(\varkappa\lambda) = \tfrac{1}{4}\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa} = 0 \text{ und } G_2(\varkappa\lambda) = \tfrac{1}{4}\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda} = 1,$$

$$\varkappa^4 - 6S\varkappa^2\lambda^2 + 8T\varkappa\lambda^3 - 3S^2\lambda^4 = G(\varkappa\lambda)$$

gesetzt. Indem man das Theorem I. auf jede dieser drei Formen φ (anstatt auf f) anwendet, erhält man endlich:

II. *Unter Annahme der Gleichungen*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

und

$$\mathsf{X} = 3\sqrt{G(\varkappa\lambda)}\cdot R(\varkappa P_f - \lambda R_f) + S_1(\varkappa\lambda)R_f + S_2(\varkappa\lambda)P_f = 0$$

besteht, vermöge der Substitutionen

$$x_i = \tfrac{1}{3}\frac{\partial(\varkappa P_f - \lambda R_f)}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

die Relation

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 d x_3}{c_1 f'(x_1) + c_2 f'(x_2) + c_3 f'(x_3)} = \frac{-36\,R\,(\Sigma \pm k_1 u_2 d u_3)\,G_2(\varkappa\lambda)}{k_1\dfrac{\partial\mathsf{X}}{\partial u_1} + k_2\dfrac{\partial\mathsf{X}}{\partial u_2} + k_3\dfrac{\partial\mathsf{X}}{\partial u_3}},$$

sobald $\frac{\varkappa}{\lambda}$ *eine Wurzel der cubischen Gleichung* $G_1(\varkappa\lambda) = 0$.

Die durch diesen Satz (II) gelöste Aufgabe:

Aus einer gegebenen Curve dritter Ordnung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ *eine Curve dritter Classe* $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ *derart abzuleiten, dass* $f(\varphi'(u_1), \varphi'(u_2), \varphi'(u_3)) = 0$ *das Product zweier Curven dritter Classe darstellt,*

ist, wie eine einfache Abzählung lehrt, völlig bestimmt und besitzt ausser den drei hier mitgetheilten Lösungen sicherlich keine weiteren. Ich konnte jedoch bis jetzt keinen strengen *analytischen* Beweis hierfür finden.

Tübingen, im October 1873.

Ueber das simultane System zweier binären cubischen Formen.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Im 57. Bande des Borchardt'schen Journals S. 375 hat Hermite zum ersten Male auf eine typische Darstellung dieses Systems aufmerksam gemacht, bei der die beiden gegebenen Formen als Differentialquotienten einer und derselben Function vierten Grades erscheinen. Clebsch hat alsdann im 67. Bande derselben Zeitschrift S. 360 und später in seiner Theorie der binären Formen (S. 221—228, 392—405) diese typische Darstellung aufs genaueste studirt und namentlich die dabei auftretenden Coefficienten durch die Invarianten des vollständigen Systemes ausgedrückt, allerdings mit Hülfe weitläufiger und künstlicher Rechnungen. In der folgenden Note sollen diese Ergebnisse übersichtlicher gruppirt und in bedeutend einfacherer Weise abgeleitet werden. Den Schluss bildet eine interessante Anwendung auf die Curven dritten Grades.

Seien

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^3 = a_x^3 = b_x^3 = \cdots\cdot$$
$$\varphi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^3 = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \cdots\cdot$$

die beiden gegebenen Formen und

$$R = (ab)^2 (cd)(ac)(bd)$$

die Discriminante von f. Ferner setze man R, gebildet für irgend eine lineare Combination $z_1 f + z_2 \varphi$:

$$(1)\quad R_{z_1 f + z_2 \varphi} = z_1^4 R + 4 z_1^3 z_2 S + 6 z_1^2 z_2^2 T + 4 z_1 z_2^3 \Sigma + z_2^4 \mathrm{P} = \Phi(z_1, z_2)$$

und

$$J = (a\alpha)^3 = (f, \varphi)^3, \quad \vartheta = (a\alpha) a_x^2 \alpha_x^2 = (f, \varphi) = \vartheta_x^4.$$

Um vollständige Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise von Clebsch herbeizuführen, definiren wir endlich p, π und Ω durch die Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{4}(\vartheta b)^3\vartheta_x = p_1x_1 + p_2x_2 = p\,, \\ \frac{1}{4}(\vartheta\beta)^3\vartheta_x = \pi_1x_1 + \pi_2x_2 = \pi\,, \\ \qquad (p_1\pi_2 - p_2\pi_1) = -2\,\Omega\,. \end{cases}$$

Führen wir alsdann p und π durch die Formeln (2) als neue Variabeln ein, so gehen $-8\,\Omega^3 f$ und $-8\,\Omega^3\varphi$ in cubische Formen von p und π über, die wir beziehungsweise f' und φ' nennen wollen. Da

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}\left\{(\alpha p)\alpha_x^2 + (a\pi)a_x^2\right\} &= (\vartheta\alpha)(\vartheta a)\left\{(\vartheta a)^2\alpha_x^2 - (\vartheta\alpha)^2 a_x^2\right\} \\ &= (\vartheta\alpha)(\vartheta a)\left\{(\vartheta a)\alpha_x + (\vartheta\alpha)a_x\right\}(\alpha a)\vartheta_x \\ &= \tfrac{1}{2}(\vartheta\vartheta')^3\vartheta_x\vartheta_x' \equiv 0\,, \end{aligned}$$

so sind wegen der Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi'}{\partial\pi} &= \quad 4\,\Omega^2\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}p_2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}p_1\right\} = \quad 12\,\Omega^2(\alpha p)\alpha_x^2 \\ \frac{\partial f'}{\partial p} &= -4\,\Omega^2\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}\pi_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}\pi_1\right\} = -12\,\Omega^2(a\pi)a_x^2 \end{aligned}$$

$\frac{\partial\varphi'}{\partial\pi}$ und $\frac{\partial f'}{\partial p}$ identisch, und man hat also vermöge der Substitutionen (2) Gleichungen von der Gestalt

$$(3)\qquad -8\,\Omega^3 f = \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial\pi} \text{ und } -8\,\Omega^3\varphi = \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}\,,$$

worin $F = F(\pi, p)$ eine gewisse biquadratische Form von π und p. Die Invarianten i und j dieser Form lassen sich durch Ω und J ausdrücken. Da nämlich die Covariante ϑ, sowie die Invariante J durch die lineare Transformation (2) nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante $(p\pi) = -2\,\Omega$ sich ändern, so ergiebt sich nach (3):

$$64\,\Omega^6\vartheta = \frac{1}{4^2\cdot 3^2}\left\{\frac{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\pi}}{\partial p}\cdot\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial p}}{\partial\pi} - \frac{\partial\frac{\partial F}{\partial\pi}}{\partial\pi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial p}}{\partial p}\right\}(p\pi),$$

$$64\,\Omega^6(f,\varphi)^3 = \left(\frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial\pi},\ \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}\right)^3(p\pi)^3,$$

oder

$$(4)\qquad 64\,\Omega^6\vartheta = \frac{2}{4^2\cdot 3^2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\pi^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial\pi}\right)^2\right\} = H_F\,,$$

$$(5)\qquad 16\,\Omega^6 J = (F, F)^4 = i_F\,,$$

Aehnlich wird nach (4) und (3)

$$-8\cdot 64\,(\vartheta, f\pi_x + \varphi p_x)^4\,\Omega^8 = (H_F, F)^4(p\pi)^4\,,$$

oder, weil

$$(\vartheta, f\pi_x + \varphi p_x)^4 = (\vartheta a)^3(\vartheta\pi) + (\vartheta\alpha)^3(\vartheta p) = -\tfrac{3}{4}(p\pi) + \tfrac{3}{4}(\pi p) = 3\Omega,$$

$$(6)\qquad -96\,\Omega^5 = (H_F, F)^4 = j_F\,.$$

Vermittelst (5) und (6) findet sich nunmehr F leicht. Bildet man nämlich die Discriminante irgend einer linearen Combination $-8\Omega^3(z_1 f + z_2 \varphi)$, so unterscheidet sich diese nur um $(p\pi)^6$ von der Discriminante der in p und π cubischen Form $z_1 \frac{1}{4} \frac{\partial F}{\partial \pi} + z_2 \frac{1}{4} \frac{\partial F}{\partial p}$. Da die letztere gleich $\frac{1}{3} j_F\, F(z_1, z_2) - \frac{1}{2} i_F H_{F(z_1, z_2)}$ *), so hat man mit Rücksicht auf (1):

$$8^4 \Omega^{12} \Phi(z_1, z_2) = (\tfrac{1}{3} j_F F(z_1 z_2) - \tfrac{1}{2} i_F H_{F(z_1, z_2)})\,(p\pi)^6,$$

oder, indem man die völlig willkührlichen z_1 und z_2 resp. durch π und p ersetzt,

$$(7) \qquad -8\,\Omega^3 \Phi(\pi, p) = -8\,\Omega^3 \Phi = 4\,\Omega^2 F + J H_F,$$

also auch nach bekannten Sätzen über biquadratische binäre Formen:

$$24\,\Omega^3 H_\Phi = -4\,J^2 \Omega^2 F + H_F (6\,\Omega - J^3).$$

Durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich endlich

$$(8) \qquad \begin{cases} F = (\tfrac{1}{3} J^3 + 2\,\Omega)\,\Phi - J H_\Phi \\ H_F = 4\,(H_\Phi - \tfrac{1}{3} J^2 \Phi)\,\Omega^2\,, \end{cases}$$

so dass sämmtliche Coefficienten in F durch die fünf Invarianten $R, S, \cdot \cdot$ P und durch J und Ω ausgedrückt sind. Die zwei Relationen zwischen den sieben letzteren ergeben sich sofort, indem man die Invarianten i und j der Form $8\,\Omega^3\Phi$ aus (7) berechnet:

$$j_\Phi = 2\,J^4 + 24\,\Omega J$$

$$9\,j_\Phi = 2\,J^6 + 108\,\Omega^2 + 36\,\Omega J^3\,.$$

Ueberhaupt lässt sich, nachdem einmal F als Combination von Φ und H_Φ gefunden, ohne Mühe aus jedem Satze über binäre biquadratische Formen ein entsprechender für das vorliegende System ableiten. Als einziges Beispiel einer solchen Uebertragung führen wir hier noch die Berechnung von i_ϑ an, um daraus Schlüsse auf die Theorie der Curven dritter Ordnung ziehen zu können. Man hat nach (4) und (5)

$$64\,\Omega^{10}_{i_\vartheta} = i_{H_F} (p\pi)^4 = \frac{i_F^2}{6} (p\pi)^4 = \frac{16^3}{6}\,\Omega^{10} J^2,$$

d. h.

$$i_\vartheta = \frac{32}{3}\,J^2,$$

eine Formel, welche den Satz giebt:

Das Verschwinden von J ist nothwendig und hinreichend, damit das Doppelverhältniss aus den 4 Wurzeln der Gleichung $\vartheta = 0$ gleich einer imaginären Cubikwurzel der Einheit werde.

---

*) $F(z_1, z_2)$ geht aus F vermöge Ersetzung von π durch z_1 und von p durch z_2 hervor.

Geometrisch ausgedrückt lautet dieses Theorem:

Wenn die vier Doppelpunkte der Involution $\varkappa f + \lambda \varphi = 0$ *äquianharmonisch liegen, ist* $J = 0$, *und umgekehrt.*

Durch ein bekanntes Uebertragungsprincip erhält man hieraus für die Curvenlehre:

Alle Geraden $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, *welche von Curven eines Büschels dritter Ordnung* $\varkappa f(x_1 x_2 x_3) + \lambda \varphi(x_1 x_2 x_3) \equiv \varkappa a_x^3 + \lambda \alpha_x^3 = 0$ *in vier äquianharmonisch liegenden Punkten berührt werden, hüllen eine Curve dritter Classe ein, deren symbolische Gleichung* $(a \alpha u)^3 = 0$.

Wofern $\varphi(x_1 x_2 x_3) = \Delta f$, gleich der Hesse'schen Determinante von f, verschwindet $(a\alpha u)^3$ *) identisch, so dass man sagen kann:

Die vier Punkte, in denen irgend eine Gerade von vier Curven des syzygetischen Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta f = 0$ *berührt wird, liegen äquianharmonisch* **)

Mit diesem Satze hängt vermöge geometrischer Betrachtungen aufs engste zusammen ein anderer, der die Untersuchungen von Rosanes und Schröter in den Math. Annal. II, S. 549—562 ergänzt und in einem neuen Lichte erscheinen lässt:

Wenn zwei Dreiecke auf sechsfache Art perspectivisch liegen, so sind ihre 9 Schnittpunkte die Wendepunkte jeder durch sie gelegten Curve dritter Ordnung.

Der Beweis kann überaus leicht geführt werden. Sind nämlich $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ die Gleichungen der Scheitel des einen Dreiseits, so ist das Product der Ecken des andern Dreiseits nach dem von Rosanes auf S. 551 l. c. ausgesprochenen Theorem in der Form

$$a u_1^3 + b u_2^3 + c u_3^3 + 6\, d u_1 u_2 u_3 = 0$$

darstellbar, was offenbar den fraglichen Satz erhärtet.

Tübingen, im October 1873.

---

*) $(a \alpha u)^3 \equiv 0$ kommt überein mit der bekannten Salmon'schen Identität

$$a_x^3 \alpha_y^3 - 3\, a_x^2 a_y\, \alpha_x \alpha_y^2 + 3\, a_x a_y^2\, \alpha_x^2 \alpha_y - a_y^3 \alpha_x^3 = 0,$$

wenn man

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

setzt.

**) Dieses Theorem ist umkehrbar und also für syzygetische Büschel charakteristisch.

Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme.

Von A. Enneper in Göttingen.

Die ungemeinen Schwierigkeiten, welche die Aufstellung orthogonaler Flächensysteme darbietet, sowie die Wahrscheinlichkeit, dass die allgemeine Integration der drei Gleichungen, welche ausdrücken, dass sich die Flächen orthogonal schneiden, mit den vorhandenen Hülfsmitteln der Analysis kaum vollständig gelingen wird, führt von selbst darauf, dem allgemeinen Probleme noch weitere geometrische Beschränkungen beizufügen, welche es gestatten, die Coordinaten eines Punktes im Raume explicite in Function dreier Parameter darzustellen. In den nachfolgenden Untersuchungen sind zu den bisher bekannten Systemen einige neue Systeme von ziemlicher Allgemeinheit hinzugefügt, insofern die Ausdrücke für die Coordinaten willkührliche Functionen enthalten. Der grössern Deutlichkeit wegen sind die fundamentalen Gleichungen, soweit wie nöthig, kurz vorausgeschickt.

I.

Sind x, y, z die Coordinaten eines gemeinschaftlichen Punktes von drei gegenseitig zu einander orthogonalen Flächen, ferner u, v, w die drei Parameter des Systems, so finden bekanntlich die Gleichungen statt:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=0.
\end{aligned}\right.$$

Setzt man:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=P^2,\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=Q^2,\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2=R^2,
\end{aligned}\right.$$

bedeutet t eine der drei Coordinaten x, y, z, so findet man zur Bestimmung von t aus den Gleichungen (1) und (2) die folgenden sechs partiellen Differentialgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 t}{\partial u^2} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} - \dfrac{P}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} - \dfrac{P}{R^2}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial v^2} = -\dfrac{Q}{P^2}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} - \dfrac{Q}{R^2}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial w^2} = -\dfrac{R}{P^2}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} - \dfrac{R}{Q^2}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial w} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial v\,\partial w} = \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial v} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial w}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergeben sich endlich die folgenden sechs Differentialgleichungen zur Bestimmung der drei Quantitäten P, Q und R:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{P}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\right) + \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial Q}{\partial w} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial P}{\partial w}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{P}\dfrac{\partial R}{\partial u}\right) + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial R}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\right) + \dfrac{1}{P^2}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial R}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial v\,\partial w} = \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial Q}{\partial w} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial R}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial w} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial w} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial R}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial v} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial Q}{\partial u}. \end{cases}$$

Die Krümmungsverhältnisse einer der Flächen des Systems hängen bekanntlich von P, Q, R und den Differentialquotienten dieser Quantitäten nach u, v, w ab. Wird eine der Flächen dadurch geometrisch definirt, dass eine oder mehrere der Quantitäten P, Q, R bestimmte Werthe annehmen, so scheint es am einfachsten zu sein, zur analytischen Lösung sich der obigen Gleichungen zu bedienen. Einigen neuen Anwendungen dieser Gleichungen möge ein Verfahren vorangehn, mit dessen Hülfe es in manchen Fällen möglich ist, aus einem bestimmten orthogonalen Flächensysteme ein anderes System, oder unendlich viele Systeme abzuleiten, für den Fall, dass sich die Integration einer linearen, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vollständig bewerkstelligen lässt.

II.

Dem Punkte (x, y, z) möge der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf beliebige Weise entsprechen. Die Cosinus der Winkel, welche die Verbindungslinie der beiden Punkte mit jeder der Normalen zu einer der drei orthogonalen Flächen, welche sich im Punkte (x, y, z) schneiden, seien respective:

$$\frac{f}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}, \quad \frac{g}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}, \quad \frac{h}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}},$$

wo f, g, h beliebige Functionen von u, v, w sind. Für x_1, y_1, z_1 hat man dann die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = x + f\,\frac{1}{P}\,\frac{\partial x}{\partial u} + g\,\frac{1}{Q}\,\frac{\partial x}{\partial v} + h\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w}, \\ y_1 = y + f\,\frac{1}{P}\,\frac{\partial y}{\partial u} + g\,\frac{1}{Q}\,\frac{\partial y}{\partial v} + h\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial y}{\partial w}, \\ z_1 = z + f\,\frac{1}{P}\,\frac{\partial z}{\partial u} + g\,\frac{1}{Q}\,\frac{\partial z}{\partial v} + h\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial z}{\partial w}. \end{cases}$$

Die Quantitäten f, g, h lassen sich so bestimmen, dass der Punkt (x_1, y_1, z_1) ebenfalls einem orthogonalen Systeme angehört und dieses System lässt sich weiter dahin bestimmen, dass die drei Normalen in correspondirenden Punkten beider Flächensysteme parallel sind. Analytisch betrachtet kommt dieses auf die Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\frac{\partial x_1}{\partial s}}{\frac{\partial x}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial s}}{\frac{\partial y}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial s}}{\frac{\partial z}{\partial s}}$$

heraus, wo successive u, v, w statt s zu setzen ist. Bildet man aus (1) die Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach u, v, w, so lassen sich die rechten Seiten der Gleichungen für:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial w}$$

mit Hülfe der Gleichungen (3) und (4) von I. auf die Form bringen:

$$\frac{H}{P}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{H_1}{Q}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{H_2}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w}.$$

Nimmt man in den Gleichungen (2) $s = u$, bedeutet σ eine Unbestimmte, so hat man:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sigma\,\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u} = \sigma\,\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = \sigma\,\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Die vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (1) von I. geben:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=0,$$

Diese Gleichungen zeigen, dass in dem Ausdrucke von $\frac{\partial x_1}{\partial u}$ die Factoren von $\frac{\partial x}{\partial v}$ und $\frac{\partial x}{\partial w}$ verschwinden müssen. Auf diese Art erhält man aus der Doppelgleichung (2) für $s=u, v, w$ die folgenden sechs Gleichungen:

$$(3)\quad \frac{\partial g}{\partial u}=\frac{f}{Q}\frac{\partial P}{\partial v}, \qquad (4)\quad \frac{\partial h}{\partial u}=\frac{f}{R}\frac{\partial P}{\partial w},$$
$$(5)\quad \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{g}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}, \qquad (6)\quad \frac{\partial h}{\partial v}=\frac{g}{R}\frac{\partial Q}{\partial w},$$
$$(7)\quad \frac{\partial f}{\partial w}=\frac{h}{P}\frac{\partial R}{\partial u}, \qquad (8)\quad \frac{\partial g}{\partial w}=\frac{h}{Q}\frac{\partial R}{\partial v}.$$

Die vorstehenden sechs Gleichungen reduciren sich durch Elimination zweier der Functionen f, g, h auf zwei lineare, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die dritte der bemerkten Functionen. Aus (5) und (7) folgt nämlich:

$$(9)\qquad g=\frac{P}{\frac{\partial Q}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad h=\frac{P}{\frac{\partial R}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Setzt man diese Werthe von g und h in die Gleichungen (6) und (8), so reduciren sich diese Gleichungen in Folge der Gleichungen (5) und (6) aus I. auf eine Gleichung, nämlich auf die folgende:

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w}=\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial R}{\partial u}}{\frac{\partial Q}{\partial u}}+\frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\frac{1}{Q}\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial Q}{\partial u}}{\frac{\partial R}{\partial u}}.$$

Die Substitution der Werthe von g und h aus den Gleichungen (9) in die Gleichungen (3) und (4) giebt:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}&=\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}\right)}{\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}}+\frac{f}{PQ}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Q}{\partial u},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w}&=\frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}\right)}{\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}}+\frac{f}{PR}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial R}{\partial u}.
\end{aligned}\right.$$

Differentiirt man die erste Gleichung (11) nach w, die zweite nach v, bildet die Differenz der erhaltenen Resultate, so erhält man mittelst der Gleichungen (5) und (6) von I. die Gleichung (10). Man findet

überhaupt, dass von den drei Gleichungen (10) und (11) immer eine Folge der beiden andern ist, so dass also zur Bestimmung von f sich zwei Gleichungen ergeben, welche wesentlich von einander verschieden sind. Eine sehr einfache Anwendung der Gleichungen (10) und (11) liefert das System von drei orthogonalen Kugelflächen. Nimmt man:

(12) $$x = \frac{u}{D}, \quad y = \frac{v}{D}, \quad z = \frac{w}{D},$$

wo:

(13) $$D = u^2 + v^2 + w^2,$$

so ist:

(14) $$P = Q = R = \frac{1}{D}.$$

Die Gleichung (10) giebt dann:

$$D \frac{\partial^2 f}{\partial v\, \partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial D}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial D}{\partial w} = 0.$$

Wegen des Werthes von D aus (13) lässt sich die vorstehende Gleichung kürzer schreiben:

(15) $$\frac{\partial^2 Df}{\partial v\, \partial w} = 0.$$

Die Gleichungen (11) lassen sich nach (13) und (14) auf folgende Formen bringen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) = \left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) = \left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial w},$$

d. h. es ist:

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right)$$

sowohl von v wie von w unabhängig. Bedeutet U_1 eine Function von u allein, so ist:

$$\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u} = D U_1,$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{Df}{u} = \frac{DU_1}{u} = (v^2 + w^2) \frac{U_1}{u} + u U_1.$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{Df}{u} = (v^2 + w^2) \int \frac{U_1}{u} \partial u + \int u U_1 \partial u + \tau,$$

wo τ von u unabhängig ist. Wegen der Gleichung (15) ist $\frac{\partial^2 \tau}{\partial v\, \partial w} = 0$, also $\tau = V + W$, wo V und W respective beliebige Functionen der Argumente v und w sind. Es ist also:

$$\frac{Df}{u} = V + W + \int u\, U_1\, \partial u + (v^2 + w^2) \int \frac{U_1}{u}\, \partial u,$$

oder $v^2 + w^2 = D - u^2$ gesetzt:

$$\frac{Df}{u} = V + W + \int u\, U_1\, \partial u - u^2 \int \frac{U_1}{u}\, \partial u + D \int \frac{U_1}{u}\, \partial u\,.$$

Nimmt man endlich zur Vereinfachung:

$$\int u\, U_1\, \partial u - u^2 \int \frac{U_1}{u}\, \partial u = U\,,$$

so ist:

$$-2\,u \int \frac{U_1}{u}\, \partial u = \frac{\partial U}{\partial u} = U',$$

also:

(16) $$Df = (U + V + W)\,u - \tfrac{1}{2}\, D\, U'.$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (9) folgt:

(17) $$\begin{cases} Dg = (U + V + W)\,v - \tfrac{1}{2}\, D\, V', \\ Dh = (U + V + W)\,w - \tfrac{1}{2}\, D\, W'. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen (12), (13), (16) und (17) ergeben sich aus (1) für x_1, y_1, z_1 folgende Gleichungen:

(18) $$\begin{cases} x_1 = uH - \tfrac{1}{2} U', \quad y_1 = vH - \tfrac{1}{2} V', \quad z_1 = wH - \tfrac{1}{2} W', \\ H = \dfrac{uU' - U + vV' - V + wW' - w + 1}{u^2 + v^2 + w^2}\,. \end{cases}$$

Man kann die Gleichungen (18) leicht in etwas anderer Weise darstellen. Setzt man: $U - uU' = 2\,R$, so folgt durch Differentiation nach u die Gleichung:

$$-\tfrac{1}{2}\, \frac{\partial U'}{\partial u} = \frac{1}{u}\, \frac{\partial R}{\partial u}\,.$$

Diese Gleichung nach u integrirt giebt, mit Weglassung einer unnöthigen Constanten:

$$-\tfrac{1}{2}\, U' = \int \frac{\partial R}{u}\,,$$

oder $u^2 = \varrho$ gesetzt:

$$-\tfrac{1}{2}\, U' = \int \frac{R'\, \partial \varrho}{\sqrt{\varrho}}\,.$$

Nimmt man ferner $v^2 = \varrho_1$, $w^2 = \varrho_2$, $V - v\,V' = 2\,R_1$, $W - w\,W' + 1 = 2\,R_2$, so treten an Stelle der Gleichungen (18) die folgenden:

$$x_1 = -H\sqrt{\varrho} + \int \frac{R'\partial \varrho}{\sqrt{\varrho}},$$

$$y_1 = -H\sqrt{\varrho_1} + \int \frac{R_1'\partial \varrho_1}{\sqrt{\varrho_1}},$$

$$z_1 = -H\sqrt{\varrho_2} + \int \frac{R_2'\,\partial\varrho_2}{\sqrt{\varrho_2}},$$
$$H = \frac{R + R_1 + R_2}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2}.$$

Diese Gleichungen hat zuerst Darboux gegeben, bei Aufstellung der Systeme orthogonaler Flächen, für welche alle Krümmungslinien plan sind. (Mémoires scientifiques de l'école normale supérieure. Année 1866, t. III, p. 129.) Die obige Ableitung scheint der einfachste Weg zu sein, auf welchem man zu den Gleichungen (18) gelangt.

Legt man drei confocale Flächen zweiten Grades zu Grunde, so hat man:

$$\frac{x^2}{a^2 - s^2} + \frac{y^2}{b^2 - s^2} + \frac{z^2}{c^2 - s^2} = 1,$$

wo successive u, v, w statt s zu setzen ist. Bildet man die Werthe von P, Q, R, so nimmt die Gleichung (10) folgende Form an:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w} = \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{w\,(v^2 - u^2)}{(w^2 - u^2)\,(w^2 - v^2)} - \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{v\,(w^2 - u^2)}{(v^2 - u^2)\,(w^2 - v^2)},$$

wo $w > v > u$ angenommen ist. Führt man w_1 und v_1 als Variabele mittelst der Gleichungen:

$$\frac{1}{w^2 - u^2} = w_1, \quad \frac{1}{v^2 - u^2} = v_1$$

ein, so geht die obige Differentialgleichung über in:

$$2\,(v_1 - w_1)\,\frac{\partial^2 f}{\partial v_1\,\partial w_1} + \frac{\partial f}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial w_1} = 0.$$

Die vorstehende Gleichung ist nicht in endlicher Form integrabel, wie sich ergiebt, wenn man eine von Laplace ausgearbeitete Methode anwendet. Uebrigens ist die Gleichung auch als specieller Fall in einer allgemeinen Gleichung enthalten, welche Laplace als Beispiel der zuerst von Euler entdeckten Integrationsmethode untersucht hat. (Mémoires de l'Académie pour l'année 1773. Paris 1777, pag. 376.)

III.

Besteht ein System von Krümmungslinien einer Fläche aus Kreisen, so ist dieselbe die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelem Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige Raumcurve beschreibt. Sind beide Systeme Kreise, so kann die Fläche als Enveloppe einer Kugelfläche angesehen werden, welche drei gegebene Kugelflächen berührt. Diese Enveloppe, welche nach Dupin die Cyclide genannt wird, lässt sich so bestimmen, dass dieselbe einem orthogonalen Flächensysteme angehört, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Die Werthe der

Coordinaten geben, wegen der darin enthaltenen willkührlichen Functionen, zu manchen interessanten besondern Fällen Veranlassung. Für eine Fläche, welche einem orthogonalen Systeme angehört, seien u und v die Argumente der Krümmungslinien. Durch die Tangente zur Krümmungslinie, für welche u allein variabel ist, werde im Punkte (x, y, z) der Fläche der Normalschnitt gelegt und dessen Krümmungshalbmesser durch R_u bezeichnet. Nach bekannten Formeln ergiebt sich aus I.:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{1}{PR}\frac{\partial P}{\partial w}.$$

Ist dieser Krümmungshalbmesser constant, so muss R_u von u unabhängig sein, d. h. R_u kann nur Function von v und w sein. Ist $\psi(v, w)$ eine beliebige Function von v und w, setzt man einfach ψ statt $\psi(v, w)$, so folgt:

$$(1) \qquad \frac{1}{PR}\frac{\partial P}{\partial w} = \frac{1}{\psi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial w} = \frac{P}{\psi}.$$

Ist $\varphi(u, w)$ eine beliebige Function von u und w, welche einfach durch φ bezeichnet werde, so enthält die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{1}{QR}\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{Q}{\varphi}$$

die Bedingung, dass das System der Krümmungslinien, für welche v allein variirt, gleichzeitig plan und sphärisch ist, d. h. aus Kreisen besteht.

Die Gleichung (1) werde nach v, die Gleichung (2) nach u differentiirt. Mit Zuziehung der Gleichungen (6) von I. folgt dann:

$$\frac{1}{QR}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{P}{\psi},$$

$$\frac{1}{PR}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{Q}{\varphi}.$$

Wegen der Gleichungen (1) und (2) gehen diese Gleichungen über in:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{P}{\psi} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right)P = 0,$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{Q}{\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right)Q = 0.$$

Ist φ_1 nur von u und w abhängig, ψ_1 nur von v und w abhängig, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

$$\left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right)P = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \qquad \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right)Q = \frac{\psi_1}{\psi},$$

oder:

$$(3) \qquad P(\varphi - \psi) = \varphi_1\psi, \qquad Q(\psi - \varphi) = \psi_1\varphi.$$

Diese Werthe von P und Q in die Gleichungen (1) und (2) substituirt geben:

$$(4)\qquad \begin{cases} R = \dfrac{\psi}{\varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial w} + \dfrac{\varphi \dfrac{\partial \psi}{\partial w} - \psi \dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}{\varphi - \psi}, \\[2ex] R = \dfrac{\varphi}{\psi_1}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial w} + \dfrac{\varphi \dfrac{\partial \psi}{\partial w} - \psi \dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}{\varphi - \psi}. \end{cases}$$

Der doppelte Werth von R giebt:

$$\frac{1}{\varphi\varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial w} = \frac{1}{\psi\psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial w}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nur von u und w, die rechte nur von v und w abhängt, so folgt:

$$(5)\qquad \frac{1}{\varphi\varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial w} = \frac{1}{\psi\psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial w} = E,$$

wo E eine beliebige Function von w ist. Die beiden Gleichungen (4) reduciren sich wegen (5) auf folgende Gleichung:

$$(6)\qquad R = E\varphi\psi + \frac{\varphi \dfrac{\partial \psi}{\partial w} - \psi \dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}{\varphi - \psi}.$$

Die erste der Gleichungen (5) von I. nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial Q}{\partial w} = 0$$

wie nach (1), (2) und (3):

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{(\varphi - \psi)\,\psi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{(\psi - \varphi)\,\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{(\varphi - \psi)^2} = 0,$$

Führt man die Differentiationen aus, so folgt:

$$(7)\qquad \varphi\Psi + \psi\Phi = -1 + \Phi_1 + \Psi_1,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(8)\qquad \Psi = \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right), \qquad \Phi = \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right).$$

$$(9)\qquad \Psi_1 = \psi\Psi - \left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2, \qquad \Phi_1 = \varphi\Phi - \left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2.$$

Die Functionen Φ und Φ_1 hängen nur von u und w ab, die Functionen Ψ und Ψ_1 enthalten nur v und w. Differentiirt man die Gleichung (7) zuerst nach u und darauf nach v, so folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0.$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -D\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial u} = D\frac{\partial \psi}{\partial v},$$

oder:

$$\Phi = C - D\varphi\,,\qquad \Psi = B + D\psi\,, \tag{10}$$

wo B, C, D von u und v unabhängig sind. Für diese Werthe von Φ und Ψ giebt die Gleichung (7):

$$C\psi + B\varphi = -1 + \Phi_1 + \Psi_1\,,$$

oder:

$$\Phi_1 - B\varphi = -(\Psi_1 - C\psi - 1)\,.$$

Da die eine Seite dieser Gleichung unabhängig ist von u, die andere unabhängig von v, so folgt:

$$\Phi_1 - B\varphi = -A\,,\qquad \Psi_1 - C\psi = 1 + A\,, \tag{11}$$

wo A nur von w abhängt. Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$\frac{\partial(\varphi\Phi - \Phi_1)}{\partial u} = \frac{2}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial(\psi\Psi - \Psi_1)}{\partial v} = \frac{2}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right),$$

d. i. nach (8):

$$\frac{\partial(\varphi\Phi - \Phi_1)}{\partial u} = 2\,\Phi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,,\qquad \frac{\partial(\psi\Psi - \Psi_1)}{\partial v} = 2\,\Psi\,\frac{\partial\psi}{\partial v}\,.$$

Setzt man hierin für Φ, Φ_1, Ψ, Ψ_1 ihre Werthe aus (10) und (11), so folgt $B + C = 0$. Setzt man ferner die Werthe von Φ, Φ_1, Ψ, Ψ_1 aus (10) und (11) in die Gleichungen (9), nimmt $B = -C$, so ist:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = A + 2\,C\varphi - D\varphi^2\,,\\ &\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = -1 - A - 2\,C\psi + D\psi^2\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Sollen die rechten Seiten dieser Gleichungen gleichzeitig positiv sein, so kann keine der Quantitäten $AD + C^2$ und $(A+1)\,D + C^2$ verschwinden. Zur Abkürzung setze man:

$$\left\{\begin{aligned} p &= \sqrt{A + 2\,C\varphi - D\varphi^2}\,,\\ q &= \sqrt{-1 - A - 2\,C\psi + D\psi^2}\,. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) lassen sich dann ersetzen durch:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = p\,,\qquad \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v} = q\,. \tag{14}$$

Differentiirt man diese Gleichungen logarithmisch in Beziehung auf w, so folgt mit Rücksicht auf die Doppelgleichung (5):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} = \frac{1}{p}\frac{dp}{\partial w} + E\varphi\,,\\ &\frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v\,\partial w}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial w} + E\psi\,. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Da die Quantitäten A, C, D, E nur von u und v unabhängig sind, so sind dieselben allgemein Functionen von w. Die erste Gleichung (13) nach u differentiirt giebt:

$$p\frac{\partial p}{\partial u}=(C-D\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial u}. \tag{16}$$

Differentiirt man diese Gleichung nach w, so folgt mittelst der ersten Gleichung (15):

$$p\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial w}=\left[\frac{\partial C}{\partial w}-\varphi\frac{\partial D}{\partial w}-D\frac{\partial \varphi}{\partial w}+(C-D\varphi)E\varphi\right]\frac{\partial \varphi}{\partial u}. \tag{17}$$

Differentiirt man die Gleichung (6) nach u, so folgt, in Verbindung mit den Gleichungen (3) und (15):

$$\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}=\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w}-\frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi-\psi}-\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial w}-E\psi\right)\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

d. i. nach (14):

$$\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}=p\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w}-\frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi-\psi}-\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial w}-E\psi\right). \tag{18}$$

Analog folgt:

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial R}{\partial v}=q\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w}-\frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi-\psi}-\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial w}-E\varphi\right). \tag{19}$$

Die Gleichung (18) nach u differentiirt, giebt nach (14) und (16):

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}\right)=&\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w}-\frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi-\psi}\left(\frac{-p^2}{\varphi-\psi}+C-D\varphi\right)\\ &+\frac{p\frac{\partial p}{\partial w}+p^2E\varphi}{\varphi-\psi}-(C-D\varphi)(\varphi+\psi)E\\ &-\frac{\partial C}{\partial w}+\varphi\frac{\partial D}{\partial w}+D\frac{\partial \varphi}{\partial w}.\end{aligned}\right.$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial w}\right)=\frac{\partial}{\partial w}\frac{P}{\psi}=\frac{\partial}{\partial w}\frac{\varphi_1}{\varphi-\psi},$$

d. i. nach (5):

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial w}\right)=-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w}-\frac{\partial \psi}{\partial w}}{(\varphi-\psi)^2}+\frac{E\varphi}{\varphi-\psi}. \tag{21}$$

Die Gleichungen (3) und (14) geben:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\psi_1(\varphi-\psi)}=-\frac{q}{\varphi-\psi}.$$

Aus dieser Gleichung und (19) folgt durch Multiplication:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{1}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{(\varphi - \psi)^2} q^2 + \frac{q\frac{\partial q}{\partial w} + q^2 E\varphi}{\varphi - \psi}.$$

Addirt man diese Gleichung zur Summe der Gleichungen (20) und (21), so verschwindet in Folge der zweiten Gleichung (5) von I. die linke Seite. Es ist also:

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi}\left(C - D\varphi - \frac{1 + p^2 + q^2}{\varphi - \psi}\right) \\ &+ \frac{p\frac{\partial p}{\partial w} + q\frac{\partial q}{\partial w} + (1 + p^2 + q^2) E\varphi}{\varphi - \psi} \\ &- (C - D\varphi)(\varphi + \psi) E - \frac{\partial C}{\partial w} + \varphi \frac{\partial D}{\partial w} + D\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0. \end{aligned}$$

Da nun nach (13):

$$1 + p^2 + q^2 = 2\,C(\varphi - \psi) - D(\varphi^2 - \psi^2),$$

so geht die obige Gleichung über in:

$$(\varphi - \psi)\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w} + CE\right) = 0,$$

d. i.

(22) $$\tfrac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w} + CE = 0.$$

Zu demselben Resultate führt die dritte Gleichung (5) von I. Die bisher entwickelten Werthe von P, Q, R in Verbindung mit den Gleichungen (5), (12) und (23) genügen den sämmtlichen sechs Gleichungen (5) und (6) von I. Es bleibt übrig, die Werthe von x, y, z in Function von u, v, w so darzustellen, dass dieselben den Gleichungen (1) und (2) von I. genügen.

Die beiden letzten Gleichungen (4) von I. lassen sich schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = \frac{1}{PR}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial t}{\partial u},$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = \frac{1}{QR}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial t}{\partial v}.$$

In Folge der Gleichungen (1) ist also:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = \frac{1}{\psi}\frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial t}{\partial v}.$$

Setzt man successive x, y, z statt t, sind

ξ, η, ζ nur abhängig von u und w,
ξ_1, η_1, ζ_1 nur abhängig von v und w,

so erhält man durch Integration die folgenden sechs Gleichungen:

$$x - \xi_1 = \frac{\psi}{R}\frac{\partial x}{\partial w}, \qquad x - \xi = \frac{\varphi}{R}\frac{\partial x}{\partial w},$$
$$y - \eta_1 = \frac{\psi}{R}\frac{\partial y}{\partial w}, \qquad y - \eta = \frac{\varphi}{R}\frac{\partial y}{\partial w},$$
$$z - \zeta_1 = \frac{\psi}{R}\frac{\partial z}{\partial w}, \qquad z - \zeta = \frac{\varphi}{R}\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Diese Gleichungen geben:

$$(23) \qquad x = \frac{\xi\psi - \xi_1\varphi}{\psi - \varphi}, \quad y = \frac{\eta\psi - \eta_1\varphi}{\psi - \varphi}, \quad z = \frac{\zeta\psi - \zeta_1\varphi}{\psi - \varphi}.$$

$$(24) \quad \frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\xi - \xi_1}{\psi - \varphi}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\eta - \eta_1}{\psi - \varphi}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\varphi - \psi}.$$

Differentiirt man die Gleichungen (23) nach u, dividirt die so erhaltenen Differentialquotienten durch P, so folgt mittelst der Gleichungen (3):

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{1}{P}\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\xi - \xi_1}{\varphi - \psi}\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{1}{P}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\eta - \eta_1}{\varphi - \psi}\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{1}{P}\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\zeta - \zeta_1}{\varphi - \psi}\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u}. \end{cases}$$

Ebenso erhält man durch Differentiation nach v:

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{1}{Q}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \frac{\xi - \xi_1}{\varphi - \psi}\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ \frac{1}{Q}\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\eta - \eta_1}{\varphi - \psi}\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ \frac{1}{Q}\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \zeta_1}{\partial v} + \frac{\zeta - \zeta_1}{\varphi - \psi}\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v}. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate der Gleichungen (24) führt auf folgende Gleichung:

$$(27) \qquad (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 = (\varphi - \psi)^2.$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar durch Differentiation nach u und v:

$$(28) \quad \begin{cases} (\xi - \xi_1)\frac{\partial \xi}{\partial u} + (\eta - \eta_1)\frac{\partial \eta}{\partial u} + (\zeta - \zeta_1)\frac{\partial \zeta}{\partial u} = (\varphi - \psi)\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ (\xi - \xi_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + (\eta - \eta_1)\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + (\zeta - \zeta_1)\frac{\partial \zeta_1}{\partial v} = (\varphi - \psi)\frac{\partial \psi}{\partial v}. \end{cases}$$

Bildet man die Summe der Quadrate der Gleichungen (25) und ebenso der Gleichungen (26), so erhält man mittelst der vorstehenden Gleichungen und der Gleichungen (12):

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varphi_1^2}\left\{\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2\right\} = 1 + A + 2C\varphi - D\varphi^2, \\ \frac{1}{\psi_1^2}\left\{\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial v}\right)^2\right\} = -A - 2C\psi + D\psi^2. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen (24) — (28) werden zwei der Fundamentalgleichungen (1) von I. identisch, die dritte giebt:

$$(30) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Diese Gleichung folgt auch, wenn die Gleichung (27) successive nach u und v differentiirt wird.

Bildet man aus (23) die Werthe der Differentialquotienten von x, y, z nach w, substituirt aus (6) den Werth von R, so gehen die Gleichungen (24) über in:

$$(31) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial \xi}{\partial w} - E\xi = \dfrac{1}{\psi}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial w} - E\xi_1\,, \\ \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial \eta}{\partial w} - E\eta = \dfrac{1}{\psi}\dfrac{\partial \eta_1}{\partial w} - E\eta_1\,, \\ \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial \zeta}{\partial w} - E\zeta = \dfrac{1}{\psi}\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial w} - E\zeta_1\,, \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen (3) von I. geben für $t = x$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{1}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w} = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{1}{P^2}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w} = 0\,.$$

Hieraus erhält man, unter Zuziehung der Gleichungen (1), (3), (13), (14), (24), (25) und (26):

$$(32) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_1}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\varphi_1}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\right) + \dfrac{\xi - \xi_1}{\varphi - \psi}(C - D\psi) \\ \qquad - \dfrac{1}{\varphi - \psi}\left(\dfrac{1}{\varphi_1^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{1}{\psi_1^2}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = 0\,, \\ \dfrac{1}{\psi_1}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\psi_1}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}\right) - \dfrac{\xi - \xi_1}{\varphi - \psi}(C - D\varphi) \\ \qquad + \dfrac{1}{\varphi - \psi}\left(\dfrac{1}{\varphi_1^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{1}{\psi_1^2}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial v}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Die Summe dieser Gleichungen giebt:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) + D\xi + \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right) - D\xi_1 = 0\,.$$

Bezeichnet F eine Function von w, so zerfällt die vorstehende Gleichung in die beiden folgenden:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) + D\xi = F\,,$$

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right) - D\xi_1 = -F.$$

Die beiden Gleichungen (32) reduciren sich hierdurch auf:

$$\frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \xi\,(C - D\varphi) - F\varphi$$
$$+ \frac{1}{\psi_1^2}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \xi_1\,(C - D\psi) + F\psi = 0\,,$$

d. i.

$$\frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \xi\,(C - D\varphi) - F\varphi = -G,$$
$$\frac{1}{\psi_1^2}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \xi_1\,(C - D\psi) + F\psi = G\,,$$

wo G nur von w abhängt. Die erste der vorstehenden Gleichungen multiplicire man mit $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, die zweite mit $\frac{\partial \psi}{\partial v}$, führe nach (14) die Werthe von p und q ein. Es folgt dann:

$$p^2\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi\,p\frac{\partial p}{\partial u} - F\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,,$$
$$q^2\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \xi_1 q\frac{\partial q}{\partial v} + F\psi\frac{\partial \psi}{\partial v} = G\frac{\partial \psi}{\partial v}\,,$$

oder:

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\xi}{p} = \dfrac{F}{p^3}\,\varphi\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \dfrac{G}{p^3}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\xi_1}{q} = -\dfrac{F}{q^3}\,\psi\,\dfrac{\partial \psi}{\partial v} + \dfrac{G}{q^3}\dfrac{\partial \psi}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(34)\qquad AD + C^2 = a^2\,,\qquad (A+1)\,D + C^2 = b^2\,,$$

berücksichtigt die Werthe von p und q aus (13), so geben die Gleichungen (33) durch Integration:

$$\xi = pf_1 + \frac{CF - DG}{a^2}\,\varphi + \frac{AF + CG}{a^2}\,,$$
$$\xi_1 = qf_2 + \frac{CF - DG}{b^2}\,\psi + \frac{(A+1)\,F + CG}{b^2}\,,$$

wo f_1 und f_2 nur von w abhängen. Die vorstehenden Gleichungen schreibe man kürzer:

$$\xi = pf_1 + \frac{f}{a^2}\,\varphi - \frac{C}{2\,a^2b^2}\,f + f_0\,,$$
$$\xi_1 = qf_2 + \frac{f}{b^2}\,\psi + \frac{C}{2\,a^2b^2}\,f + f_0\,,$$

wo $CF - DG = f$ und:

$$\frac{AF + CG}{a^2} + \frac{(A+1)\,F + CG}{b^2} = 2\,f_0$$

gesetzt ist. Sind nun f, g, h; f_1, g_1, h_1; f_2, g_2, h_2 und f_0, g_0, h_0 Functionen von w, so erhält man auf die vorhin angegebene Art folgende Gleichungen:

$$(35)\quad \begin{cases} \xi = p f_1 + \dfrac{f}{a^2}\,\varphi - \dfrac{Cf}{2\,a^2 b^2} + f_0\,, \\ \eta = p g_1 + \dfrac{g}{a^2}\,\varphi - \dfrac{Cg}{2\,a^2 b^2} + g_0\,, \\ \zeta = p h_1 + \dfrac{h}{a^2}\,\varphi - \dfrac{Ch}{2\,a^2 b^2} + h_0\,, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} \xi_1 = q f_2 + \dfrac{f}{b^2}\,\psi + \dfrac{Cf}{2\,a^2 b^2} + f_0\,, \\ \eta_1 = q g_2 + \dfrac{g}{b^2}\,\psi + \dfrac{Cg}{2\,a^2 b^2} + g_0\,, \\ \zeta_1 = q h_2 + \dfrac{h}{b^2}\,\psi + \dfrac{Ch}{2\,a^2 b^2} + h_0\,, \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen (13), (14) und (35) geht die erste Gleichung (29) in folgende über:

$$(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2)\,(C - D\varphi)^2 + 2p\,(C - D\varphi)\,\frac{ff_1 + gg_1 + hh_1}{a^2}$$
$$+ \frac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4}\,(A + 2\,C\varphi - D\varphi^2) = 1 + A + 2\,C\varphi - D\varphi^2\,.$$

Soll nun φ nicht von u unabhängig sein, so kann die vorstehende Gleichung nur bestehen, wenn:

$$(37)\quad \begin{cases} ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0\,, \\ D\left\{D\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) - \dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} + 1\right\} = 0\,, \\ C\left\{D\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) - \dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} + 1\right\} = 0\,, \\ C^2\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) + A\,\dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} = 1 + A. \end{cases}$$

Da C und D nicht gleichzeitig wegen der Gleichungen (12) verschwinden können, so lässt sich das letzte System von Gleichungen durch folgende Gleichungen ersetzen:

$$(38)\quad \begin{cases} ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0\,, \\ D\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) = \dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} - 1\,, \\ a^2\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) = 1\,. \end{cases}$$

Die letzte der vorstehenden Gleichungen folgt aus der letzten Gleichung (37) mit Rücksicht auf den Werth von a^2 aus (34). Auf ganz ähnliche Weise geben die Gleichungen (36) in Verbindung mit den Gleichungen (13), (14) und der zweiten Gleichung (29) die folgenden Relationen:

$$(39)\quad \begin{cases} ff_2 + gg_2 + hh_2 = 0\,, \\ -D\,(f_2^2 + g_2^2 + h_2^2) = \dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{b^4} - 1\,, \\ C^2\,(f_2^2 + g_2^2 + h_2^2) = 1\,. \end{cases}$$

Die Gleichung (30) endlich giebt, da φ und ψ nicht unabhängig von u und v sein sollen:

$$f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2 = 0\,,$$
$$f^2 + g^2 + h^2 = (ab)^2\,.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (38) und (39) zeigen, dass:

$$\begin{array}{ccc} af_1\,, & ag_1\,, & ah_1\,; \\ bf_2\,, & bg_2\,, & bh_2\,; \\ \frac{f}{ab}\,, & \frac{g}{ab}\,, & \frac{h}{ab} \end{array}$$

als die Cosinus der Winkel angesehen werden können, welche drei gegenseitig orthogonale Richtungen im Raume bestimmen. Man nehme diese Richtungen respective parallel der Tangente, der Normalen zur Krümmungsebene und dem Krümmungsradius einer Curve doppelter Krümmung. Sind:

$$\begin{array}{c} \alpha,\ \beta,\ \gamma; \\ l,\ m,\ n; \\ \lambda,\ \mu,\ \nu \end{array}$$

die Winkel, welche die bemerkten Geraden mit den Coordinatenaxen bilden, so setze man:

$$\begin{array}{lll} af_1 = \cos\alpha\,, & ag_1 = \cos\beta\,, & ah_1 = \cos\gamma\,, \\ bf_2 = \cos l\,, & bg_2 = \cos m\,, & bh_2 = \cos n\,, \\ \frac{f}{ab} = \cos\lambda\,, & \frac{g}{ab} = \cos\mu\,, & \frac{h}{ab} = \cos\nu\,. \end{array}$$

Hierdurch werden die Gleichungen (35) und (36):

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \frac{p}{a}\cos\alpha + \left(\varphi\frac{b}{a} - \frac{C}{2ab}\right)\cos\lambda + f_0\,, \\ \eta = \frac{p}{a}\cos\beta + \left(\varphi\frac{b}{a} - \frac{C}{2ab}\right)\cos\mu + g_0\,, \\ \zeta = \frac{p}{a}\cos\gamma + \left(\varphi\frac{b}{a} - \frac{C}{2ab}\right)\cos\nu + h_0\,, \end{array}\right.$$

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi_1 = \frac{q}{b}\cos l + \left(\psi\frac{a}{b} + \frac{C}{2ab}\right)\cos\lambda + f_0\,, \\ \eta_1 = \frac{q}{b}\cos m + \left(\psi\frac{a}{b} + \frac{C}{2ab}\right)\cos\mu + g_0\,, \\ \zeta_1 = \frac{q}{b}\cos n + \left(\psi\frac{a}{b} + \frac{C}{2ab}\right)\cos\nu + h_0\,, \end{array}\right.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen und den Gleichungen (23) ergeben sich zur Bestimmung von x, y, z leicht die folgenden Gleichungen:

$$(42)\quad\begin{cases}(x-f_0)\cos\alpha+(y-g_0)\cos\beta+(z-h_0)\cos\gamma=\frac{p}{a}\,\frac{\psi}{\psi-\varphi}\,,\\(x-f_0)\cos l+(y-g_0)\cos m+(z-h_0)\cos n=\frac{q}{b}\,\frac{\varphi}{\varphi-\psi}\,,\\(x-f_0)\cos\lambda+(y-g_0)\cos\mu+(z-h_0)\cos\nu=\frac{D\varphi\psi-\frac{1}{2}C(\varphi+\psi)}{\psi-\varphi}.\end{cases}$$

Um die Differentialquotienten der Functionen f_0, g_0, h_0 nach w einfach darstellen zu können, muss man auf die Gleichungen (15) zurückgehen. Wegen der Gleichungen (13) giebt die erste Gleichung (15):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}=\frac{C-D\varphi}{p^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\partial A}{\partial w}+2\,\varphi\,\frac{\partial C}{\partial w}-\varphi^2\,\frac{\partial D}{\partial w}}{p^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+E\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,.$$

Diese Gleichung mit $\frac{1}{p}$ multiplicirt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)=\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w}+(A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w}}{p}$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi^2}{p^3}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial D}{\partial w}+\frac{E}{p}\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,,$$

wo a durch die Gleichung (34) bestimmt ist. Die vorstehende Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$(43)\qquad\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)=\frac{1}{p}\left(\frac{A+C\varphi}{2\,a^2}\,\frac{\partial D}{\partial w}+E\varphi\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$
$$+\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w}+(A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}(A+C\varphi)\varphi\,\frac{\partial D}{\partial w}}{p}\,.$$

Im ersten Terme rechts setze man nach (22) $\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w}=-CE$. Es ist dann:

$$\frac{1}{p}\left(\frac{A+C\varphi}{2\,a^2}\,\frac{\partial D}{\partial w}+E\varphi\right)=-\frac{AE}{a^2}\,\frac{C-D\varphi}{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{AE}{a^2}\,\frac{\partial p}{\partial u},$$

da $C-D\varphi=p\,\frac{\partial p}{\partial u}$. Die rechte Seite der Gleichung (43) ist also ein vollständiger Differerentialquotient. Bezeichnet W eine Function von w, so folgt durch Integration:

$$(44)\qquad\frac{1}{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}=W-\frac{AE}{a^2}\,p$$
$$+\frac{1}{a^2p}\left\{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w}+(A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}(A+C\varphi)\varphi\,\frac{\partial D}{\partial w}\right\}.$$

Mittelt dieser Gleichung und der Gleichung (22) erhält man leicht die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{p}{a}=\frac{C-D\varphi}{a}\,W+\frac{p}{a}\,E\varphi\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\,\varphi\,\frac{b}{a} = p\,W\,\frac{b}{a} + \frac{\varphi}{a}\,\frac{\partial b}{\partial w} + \frac{b}{a}\,E\varphi^2$$
$$+\frac{1}{b}\,\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{C}{a} + \frac{A\,\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}\,C\,\frac{\partial A}{\partial w} - A\,(A+1)\,E}{ab}\,.$$

Mit Rücksicht auf diese Differentialquotienten führt die Gleichung (40) zu folgendem Resultate:

$$\begin{aligned}(45)\qquad & \frac{1}{\varphi}\,\frac{\partial \xi}{\partial w} - E\xi = \left(\frac{\partial \cos\alpha}{\partial w} + b\,W\cos\lambda\right)\frac{p}{a\,\varphi} \\ & + \left\{\frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{C\,W}{a}\cos\alpha - \frac{C}{2\,ab}\,\frac{\partial \cos\lambda}{\partial w} - \frac{\cos\lambda}{2}\,\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{C}{ab}\right. \\ & \left. + \frac{A\,\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}\,C\,\frac{\partial A}{\partial w} - A^2 E}{a^3}\,b\cos\lambda\right\}\frac{1}{\varphi} \\ & - E\left(f_0 - \frac{C}{2\,ab}\cos\lambda\right) - \frac{D\,W}{a}\cos\alpha + \frac{\cos\lambda}{a}\,\frac{\partial b}{\partial w} + \frac{b}{a}\,\frac{\partial \cos\lambda}{\partial w} = 0.\end{aligned}$$

In den Gleichungen (31) sind die linken Seiten nur von u und w, die rechten Seiten nur von v und w abhängig, hieraus folgt, dass in den bemerkten Gleichungen jede Seite nur Function von w sein kann. Mit Beziehung hierauf folgt, dass in der Gleichung (45) die rechte Seite von u unabhängig sein muss, was nur stattfindet, wenn die Factoren von $\frac{p}{\varphi}$ und $\frac{1}{\varphi}$ verschwinden. Es ist also:

$$(46)\qquad \frac{\partial \cos\alpha}{\partial w} + b\,W\cos\lambda = 0.$$

$$\begin{aligned}(47)\qquad & \frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{C\,W}{a}\cos\alpha - \frac{C}{2\,ab}\,\frac{\partial \cos\lambda}{\partial w} - \frac{\cos\lambda}{2}\,\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{C}{ab} \\ & + \frac{A\,\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}\,C\,\frac{\partial A}{\partial w} - A^2 E}{a^3}\,b\cos\lambda = 0.\end{aligned}$$

Ist ds das Bogenelement, ferner ϱ der Krümmungsradius, r der Torsionsradius, welche den Winkeln α, l etc. entsprechen, so hat man bekanntlich:

$$\frac{\partial \cos\alpha}{\partial w} = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial s}{\partial w}\cos\lambda\,,\qquad \frac{\partial \cos l}{\partial w} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial s}{\partial w}\cos\lambda\,,$$
$$\frac{\partial \cos\lambda}{\partial w} = -\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} + \frac{\cos l}{r}\right)\frac{\partial s}{\partial w}\,.$$

Die Gleichung (46) giebt dann:

$$(48)\qquad \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial s}{\partial w} = -\,b\,W.$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (45) und (47) über in:

$$(49)\qquad \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \xi}{\partial w} - E\,\xi = -\,E\Big(f_0 - \frac{C}{2\,ab}\cos\lambda\Big) + \frac{\cos\lambda}{a}\frac{\partial b}{\partial w}$$
$$-\Big(\frac{1}{\varrho}\frac{a}{b}\cos\alpha + \frac{1}{r}\frac{b}{a}\cos l\Big)\frac{\partial s}{\partial w}\,.$$

$$(50)\qquad \frac{\partial f_0}{\partial w} - \Big(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\Big)\frac{C}{2\,ab}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{\cos\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{ab}$$
$$+\,\frac{A\dfrac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}\,C\dfrac{\partial A}{\partial w} - A^2 E}{a^3}\,b\cos\lambda = 0.$$

Multiplicirt und dividirt man in der Gleichung (49) den Factor von $\cos\lambda$ mit C, so lässt sich die Gleichung zur Bestimmung von f_0 auf folgende Form bringen:

$$(51)\qquad \frac{\partial f_0}{\partial w} = \Big(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\Big)\frac{C}{2\,ab}\frac{\partial s}{\partial w} + \frac{ab}{4\,C}\cos\lambda\,\frac{\partial}{\partial w}\Big(\frac{A}{a^2} + \frac{A+1}{b^2}\Big).$$

Vertauscht man in den Gleichungen (49) und (50) α, l, λ respective mit β, m, μ und γ, n, ν, so geht f_0 über in g_0 und h_0.

Analog wie die Gleichung (44) erhält man aus der zweiten Gleichung (15):

$$(52)\qquad \frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial w} = W_1 + \frac{(A+1)\,E}{b^2}\,q$$
$$+\,\frac{1}{b^2 q}\Big\{\tfrac{1}{2}\,(D\psi - C)\,\frac{\partial A}{\partial w} + (A + 1 + C\psi)\Big(\frac{\partial C}{\partial w} - \tfrac{1}{2}\,\psi\,\frac{\partial D}{\partial w}\Big)\Big\},$$

wo W_1 eine Function von w allein ist. Aus dieser Gleichung und der ersten Gleichung (41) stelle man die rechte Seite der ersten Gleichung (31) her. Da der erhaltene Ausdruck von v unabhängig sein muss, so erhält man entsprechend den Gleichungen (48) — (50) die folgenden:

$$(53)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial w} = -\,a\,W_1\,.$$

$$(54)\qquad \frac{1}{\psi}\frac{\partial \xi_1}{\partial w} - E\,\xi_1 = -\,E\Big(f_0 + \frac{C}{2\,ab}\cos\lambda\Big) + \frac{\cos\lambda}{b}\frac{\partial a}{\partial w}$$
$$-\Big(\frac{1}{\varrho}\frac{a}{b}\cos\alpha + \frac{1}{r}\frac{b}{a}\cos l\Big)\frac{\partial s}{\partial w}\,.$$

$$(55)\qquad \frac{\partial f_0}{\partial w} - \Big(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\Big)\frac{C}{2\,ab}\frac{\partial s}{\partial w} + \frac{\cos\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{a\,b}$$
$$+\,\frac{(A+1)\dfrac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}\,C\dfrac{\partial A}{\partial w} - (A+1)^2 E}{b^3}\,a\cos\lambda = 0.$$

Man beweist ohne Schwierigkeit, dass die rechten Seiten der Gleichungen (49) und (54) identisch sind, wie das auch in Folge der ersten Gleichung (31) der Fall sein muss. Analog wie die Gleichung (50) lässt sich auch die Gleichung (55) auf die Form der Gleichung (51) bringen.

Die Gleichungen (40) und (41) zeigen unmittelbar, dass für ein constantes w jeder der Punkte (ξ, η, ζ) und (ξ_1, η_1, ζ_1) auf einem Kegelschnitte liegt, deren Ebenen normal zu einander sind. Liegt der eine Punkt auf einer Ellipse, so liegt der andere auf einer Hyperbel, je nachdem D eine positive oder negative Grösse ist. Für $D = 0$ ergeben sich zwei Parabeln. Man findet so sehr leicht sämmtliche Eigenschaften der Cyclide wieder wie bei der directen Behandlung des Problems: Die Fläche zu finden, für welche in beiden Systemen von Krümmungslinien der Krümmungshalbmesser längs jeder der bemerkten Curven constant ist.

Die Gleichungen (44) und (52) lassen sich in manchen Fällen leicht integriren, wenn von den Functionen A, C, D, E von w eine oder mehrere constant genommen werden, wobei indessen immer die Relation (22) in Betracht zu ziehen ist. Die arbiträren Constanten, welche die Integration der Gleichungen (44) und (52) involvirt, sind respective gleich arbiträren Functionen von u und v zu setzen.

IV.

Die allgemeinen Gleichungen von I. gestatten eine sehr einfache und elegante Lösung des Problems: Welche Flächen mit einem System planer Krümmungslinien, deren Ebenen die Normalen zur Fläche enthalten, können einem orthogonalen Systeme angehören?

Sind u und w die Argumente der Krümmungslinien, so fordert die Lösung des Problems eine der Gleichungen $\frac{\partial P}{\partial w} \quad 0$ oder $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$. Nimmt man $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$, so reducirt sich die dritte Gleichung (6) von I. auf $\frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial Q}{\partial u} = 0$, also entweder $\frac{\partial R}{\partial v} = 0$ oder $\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$. Sei zuerst:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Wegen der vorstehenden Gleichungen reducirt sich die dritte Gleichung (3) von I. auf:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial w^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial w} \frac{\partial t}{\partial w}.$$

Setzt man successive x, y, z statt t, so folgt durch Integration:

$$(1) \qquad \frac{\partial x}{\partial w} = R \cos A, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = R \cos B, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = R \cos C,$$

wo A, B, C von w unabhängig sind. Wegen der dritten Gleichung (2) von I. geben die Gleichungen (1):

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

es sind also A, B, C die Winkel, welche eine Richtung, die in Beziehung auf den Parameter w constant ist, mit den Coordinatenaxen bildet.

Nimmt man in den Gleichungen (1):

$$R = \frac{\partial W}{\partial w},$$

wo W eine beliebige Function von w ist, sind X, Y, Z Functionen von u und v, so folgt:

$$(2) \quad x = X + W\cos A, \quad y = Y + W\cos B, \quad z = Z + W\cos C.$$

Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} + W\frac{\partial \cos A}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} + W\frac{\partial \cos A}{\partial v},$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen, der ähnlichen Differentialquotienten von y, z nach u, v und der Gleichungen (1) geben die drei Gleichungen (1) von I.:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \cos A}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial \cos B}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial \cos C}{\partial v} + \\ \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \cos A}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial \cos B}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial \cos C}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial \cos A}{\partial u}\frac{\partial \cos A}{\partial v} + \frac{\partial \cos B}{\partial u}\frac{\partial \cos B}{\partial v} + \frac{\partial \cos C}{\partial u}\frac{\partial \cos C}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \cos A\frac{\partial X}{\partial u} + \cos B\frac{\partial Y}{\partial u} + \cos C\frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \\ \cos A\frac{\partial X}{\partial v} + \cos B\frac{\partial Y}{\partial v} + \cos C\frac{\partial Z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Da nun X, Y, Z nur von u und v abhängen, sonst gänzlich unbestimmte Functionen dieser Variabeln sind, so kann man X, Y, Z als die Coordinaten eines Punktes einer ganz beliebigen Fläche ansehen. Die Gleichungen (4) zeigen dann, dass A, B, C die Winkel sind, welche die Normale im Punkte (X, Y, Z) mit den Coordinatenaxen bildet. Aus den Gleichungen (3) folgt ferner, dass u und v die Argumente der Krümmungslinien der beliebig angenommenen Fläche sind. Die geometrische Interpretation der Gleichungen (1) gestaltet sich hierdurch sehr einfach als ein System paralleler Flächen und den beiden Systemen developpabeler Flächen, gebildet aus den Normalen zu den Krümmungslinien einer beliebigen Fläche des ersten Systems.

Die zweite Annahme $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$ ersetze man durch Vertauschung von u mit w durch die beiden folgenden Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{\partial P}{\partial w} = 0\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial w} = 0\,.$$

Die beiden letzten Gleichungen (4) von I. geben nach (5):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial t}{\partial w}\right) = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial t}{\partial w}\right) = 0\,,$$

d. h. es ist $\frac{1}{R}\,\frac{\partial t}{\partial w}$ nur von w abhängig. Statt t setze man successive x, y, z; haben die Winkel α, l, λ etc. analoge Bedeutungen wie in III., so kann man setzen:

$$(6) \qquad \frac{1}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w} = \cos\lambda\,, \quad \frac{1}{R}\,\frac{\partial y}{\partial w} = \cos\mu\,, \quad \frac{1}{R}\,\frac{\partial z}{\partial w} = \cos\nu\,.$$

Variiren u und v allein, so repräsentiren die linken Seiten der Gleichungen (6) die Cosinus der Winkel, welche die Normale im Punkte (x, y, z) der Fläche $w =$ const. mit den Coordinatenaxen bildet. Diese Winkel sind von u und v unabhängig, d. h. die Fläche $w =$ const. ist eine Ebene. Sind f, g, h Functionen von w, so ist die Fläche, für welche w constant ist, bestimmt durch:

$$(x - f)\cos\lambda + (y - g)\cos\mu + (z - h)\cos\nu = 0\,,$$

oder, was dasselbe ist, durch:

$$\begin{vmatrix} x - f, & y - g, & z - h \\ \cos\alpha\,, & \cos\beta\,, & \cos\gamma \\ \cos l\,, & \cos m\,, & \cos n \end{vmatrix} = 0\,.$$

Sind X und Y näher zu bestimmende Functionen von u, v, w, so lässt sich die vorstehende Gleichung ersetzen durch:

$$(7) \qquad \begin{cases} x = f + X\cos\alpha + Y\cos l\,, \\ y = g + X\cos\beta + Y\cos m\,, \\ z = h + X\cos\gamma + Y\cos n\,, \end{cases}$$

Die Gleichungen (6) geben:

$$(8) \qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial w}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial w}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial w}\cos\gamma = 0\,, \\ \frac{\partial x}{\partial w}\cos l + \frac{\partial y}{\partial w}\cos m + \frac{\partial z}{\partial w}\cos n = 0\,. \end{cases}$$

Man kann immer setzen:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\alpha + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos l + W\cos\lambda\,, \\ \dfrac{\partial g}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\beta + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos m + W\cos\mu\,, \\ \dfrac{\partial h}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\gamma + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos n + W\cos\nu\,, \end{cases}$$

wo W, W_1, W_2 Functionen von w sind. Die Gleichungen (8) gehen mittelst der Gleichungen (7) und (9) über in:

$$\frac{\partial W_1}{\partial w} + \frac{\partial X}{\partial w} = 0\,, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial w} + \frac{\partial Y}{\partial w} = 0\,,$$

also:

$$(10)\qquad X = X_1 - W_1\,, \qquad Y = Y_1 - W_2\,,$$

wo X_1 und Y_1 von w unabhängig sind. Mit Weglassung einer Constanten giebt die erste Gleichung (9) durch partielle Integration:

$$f = W_1\cos\alpha + W_2\cos l + \int\left\{W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}\right\}\cos\lambda\,\partial w.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichungen (10) wird die erste Gleichung (7):

$$x = X_1\cos\alpha + Y_1\cos l + \int\left\{W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}\right\}\cos\lambda\,\partial w.$$

Setzt man einfach W statt $W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}$, so kann man, unbeschadet der Allgemeinheit, $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ setzen. In Folge der Gleichungen (10) sind dann X und Y in (7) von w unabhängig. Setzt man die Werthe von f, g, h aus (9) in (7), so erhält man schliesslich:

$$(11)\quad \begin{cases} x = \int W\cos\lambda\,\partial w + X\cos\alpha + Y\cos l\,, \\ y = \int W\cos\mu\,\partial w + X\cos\beta + Y\cos m\,, \\ z = \int W\cos\nu\,\partial w + X\cos\gamma + Y\cos n\,. \end{cases}$$

In den vorstehenden Gleichungen ist W eine beliebige Function von w. Da die Werthe von x, y, z der Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

genügen müssen, so erhält man zwischen X und Y die Relation:

$$(12)\qquad \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} = 0\,.$$

Man kann X und Y als die Coordinaten eines Punktes ansehen, welcher zu zwei Systemen von planen Curven gehören kann, je nachdem in den, übrigens willkührlichen, Ausdrücken von X und Y als Functionen von u und v der eine oder andere Parameter constant genommen wird. Die Gleichung (12) zeigt, dass zwei Curven beider Systeme sich orthogonal schneiden, also X und Y zwei beliebigen Systemen orthogonaler, ebener Curven angehören. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich folgende einfache Generation des Systems.

In einer Ebene, welche zwei Systeme orthogonaler Curven enthält, werde ein fester Punkt und zwei zu einander senkrechte, feste Geraden angenommen. Die Ebene bewege sich so, dass der feste Punkt eine Raumcurve C_1 beschreibt, während die beiden festen Geraden dabei den Tangenten und Normalen zur Krümmungsebene einer Raumcurve C parallel sind. Die Curve C_1 hängt der Art von der Curve C ab, dass ihre Tangenten den Hauptnormalen der Curve C parallel sind. Die beiden Systeme orthogonaler Curven beschreiben zwei Flächensysteme, welche in Gemeinschaft der Ebene in ihren verschiedenen Lagen ein orthogonales Flächensystem bilden.

Göttingen, im Mai 1872.

Die Form und Zahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen der Transformationen der ultraelliptischen Functionen für beliebige Transformationsgrade.

Von E. Dorn in Breslau.

Hermite basirt seine Untersuchungen über die Transformation der ultraelliptischen Functionen (Hermite, Théorie de la transformation des fonctions Abéliennes. Paris 1855.) auf die Behandlung des Systemes der 16 ganzzahligen Transformationscoefficienten:

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}\right\},$$

zwischen denen die Gleichungen bestehen:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_0\,d_1 + b_0\,c_1 - c_0\,b_1 - d_0\,a_1 = 0\,, \\ a_0\,d_2 + b_0\,c_2 - c_0\,b_2 - d_0\,a_2 = 0\,, \\ a_0\,d_3 + b_0\,c_3 - c_0\,b_3 - d_0\,a_3 = a_1\,d_2 + b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - d_1\,a_2 = k\,, \\ a_1\,d_3 + b_1\,c_3 - c_1\,b_3 - d_1\,a_3 = 0\,, \\ a_2\,d_3 + b_2\,c_3 - c_2\,b_3 - d_2\,a_3 = 0\,. \end{cases}$$

Es gelten sodann folgende Sätze:

Die Determinante des Systemes (1) ist ein vollständiges Quadrat, nämlich k^2. (Hermite pag. 3, 1°.)

Die Gleichungen (2) sind gleichbedeutend mit:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_0\,b_3 + a_1\,b_2 - a_2\,b_1 - a_3\,b_0 = 0\,, \\ a_0\,c_3 + a_1\,c_2 - a_2\,c_1 - a_3\,c_0 = 0\,, \\ a_0\,d_3 + a_1\,d_2 - a_2\,d_1 - a_3\,d_0 = k\,, \\ b_0\,c_3 + b_1\,c_2 - b_2\,c_1 - b_3\,c_0 = k\,, \\ b_0\,d_3 + b_1\,d_2 - b_2\,d_1 - b_3\,d_0 = 0\,, \\ c_0\,d_3 + c_1\,d_2 - c_2\,d_1 - c_3\,d_0 = 0\,. \end{cases}$$

(Hermite pag. 7.)

Sind zwei Systeme $a_0 \cdots$, $\alpha_0 \cdots$ den Gleichungen (2) unterworfen, so erhält man durch Zusammensetzung derselben ein neues System $A_0 \ldots$, für welches dieselben ebenfalls gelten, und zwar ist, wenn man die k entsprechende Grösse für das System $\alpha_0 \cdots \varkappa$, für das System $A_0 \cdots K$ nennt:

$$K = k\varkappa.$$

(Hermite, pag. 3, 4.)

Hermite theilt diese Sätze ohne den Beweis mit, der in der That leicht zu führen ist.

Wenn $\varkappa = 1$, nennt Hermite die Systeme $a_0 \cdots$ und $A_0 \cdots$ äquivalent.

Ist k eine Primzahl, so sind, wie Hermite ebenfalls ohne Beweis angiebt, die nicht äquivalenten Systeme repräsentirt durch folgende vier Grundformen:

$$\text{I.} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix}, \quad \text{II.} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix}, \quad \text{III.} \begin{Bmatrix} k & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{IV.} \begin{Bmatrix} k & 0 & i & i' \\ 0 & k & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

worin i, i', i'' sämmtliche Werthe $0, 1 \cdots k-1$ annehmen können. Es giebt also $1 + k + k^2 + k^3$ Klassen der Transformationen. (Hermite, pag. 4, 3^0, 4^0.)

Ich stelle mir die Aufgabe, die Form und Zahl der Repräsentanten der nicht äquivalenten Transformationen für beliebige k zu ermitteln.

Ich hatte ursprünglich die Aufgabe so gelöst, dass ich direct den Repräsentanten aufsuchte, mit welchem die vorgelegte Transformation äquivalent ist. Indessen verlangt diese Behandlungsweise ziemlich complicirte Untersuchungen über die Möglichkeit simultaner Lösungen gewisser Congruenzen, und ich habe es einfacher gefunden, durch successive Anwendung mehrerer lineärer Transformationen auf den Repräsentanten zu gelangen. Auf die Brauchbarkeit des successiven Verfahrens war ich bei der Behandlung einer andern Transformationsaufgabe von Hrn. Prof. Richelot aufmerksam gemacht.

Die Operation der Zusammensetzung zweier Systeme werde durch ein zwischengesetztes $\times$ bezeichnet. Ich suche nun zunächst zu machen:

$$(4) \qquad \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & b_1' & b_2' & b_3' \\ 0 & c_1' & c_2' & c_3' \\ 0 & d_1' & d_2' & d_3' \end{Bmatrix},$$

worin die $a_0 \cdots$ die Gleichungen (2) und (3) erfüllen, und die $\alpha_0 \cdots$ entsprechende Gleichungen, in denen nur k durch 1 zu ersetzen ist.

Das Verschwinden der drei letzten Coefficienten in der ersten Colonne ergiebt die Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} 0 = b_0\,\alpha_0 + b_1\,\beta_0 + b_2\,\gamma_0 + b_3\,\delta_0\,, \\ 0 = c_0\,\alpha_0 + c_1\,\beta_0 + c_2\,\gamma_0 + c_3\,\delta_0\,, \\ 0 = d_0\,\alpha_0 + d_1\,\beta_0 + d_2\,\gamma_0 + d_3\,\delta_0\,. \end{cases}$$

Mit Benutzung der Gleichungen (2) erhält man hieraus:

$$(6) \qquad \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 : \delta_0 = d_3 : d_2 : -d_1 : -d_0\,.$$

Da die Determinante des Systems $\alpha_0 \cdots 1$ ist, dürfen α_0, β_0, γ_0, δ_0 keinen gemeinsamen Factor besitzen und sind demnach durch (6) vollkommen bestimmt.

Man suche nun irgend ein Werthsystem α_3, β_3, γ_3, δ_3, welches der Gleichung genügt:

$$(7) \qquad \alpha_0\delta_3 + \beta_0\gamma_3 - \gamma_0\beta_3 - \delta_0\alpha_3 = 1\,,$$

und bestimme die Grössen α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2 aus folgenden Gleichungen (welche (3) entsprechen):

$$(8) \qquad \begin{cases} \text{a)}\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \alpha_3\beta_0 - \alpha_0\beta_3 = \nu_1\,, \\ \text{b)}\ \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = \alpha_3\gamma_0 - \alpha_0\gamma_3 = \nu_2\,, \\ \text{c)}\ \alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1 = 1 + \alpha_3\delta_0 - \alpha_0\delta_3 = \dfrac{1-\nu_3}{2}\,, \\ \text{d)}\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 1 + \beta_3\gamma_0 - \beta_0\gamma_3 = \dfrac{1+\nu_3}{2}\,, \\ \text{e)}\ \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1 = \beta_3\delta_0 - \beta_0\delta_3 = \nu_4\,, \\ \text{f)}\ \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 = \gamma_3\delta_0 - \gamma_0\delta_3 = \nu_5\,. \end{cases}$$

Dass übrigens, wenn man die rechte Seite von c) $\frac{1-\nu_3}{2}$ gesetzt hat, die von d) $\frac{1+\nu_3}{2}$ ist, geht aus (7) hervor.

Ich beweise jetzt, dass die Gleichungen (8) a) $\cdots$ f) in ganzen Zahlen auflösbar sind.

Zunächst nehme ich δ_1 und δ_2 so an, dass sie den grössten gemeinsamen Factor χ von ν_5, ν_4, $\frac{1-\nu_3}{2}$ enthalten, sonst aber weiter keinen besitzen. Enthielte nämlich δ_1 oder δ_2 einen Theiler von χ nicht, so folgte aus den leicht beweisbaren Relationen:

$$\beta_1\nu_5 - \gamma_1\nu_4 + \delta_1\,\frac{1+\nu_3}{2} = 0$$

$$\beta_2\nu_5 - \gamma_2\nu_4 + \delta_2\,\frac{1+\nu_3}{2} = 0$$

dass derselbe in $\frac{1+\nu_3}{2}$ enthalten sein müsste. $\frac{1+\nu_3}{2}$ und $\frac{1-\nu_3}{2}$, deren Summe $= 1$ ist, können aber keinen gemeinsamen Factor besitzen.

Die Gleichungen c) e) f) werden jetzt ganzzahlig aufgelöst. Sind irgend welche Lösungen derselben:

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2;\quad \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2;\quad \mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,$$

so sind sämmtliche Lösungen enthalten in:

$$\mathfrak{A}_1 + m_1 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{A}_2 + m_1 \frac{\delta_2}{\chi};$$

$$\mathfrak{B}_1 + m_2 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{B}_2 + m_2 \frac{\delta_2}{\chi};$$

$$\mathfrak{C}_1 + m_3 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{C}_2 + m_3 \frac{\delta_2}{\chi},$$

wo m_1, m_2, m_3 vorläufig beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Indem man hiemit in a) hineingeht, folgt:

$$\left(\mathfrak{A}_1 + m_1 \frac{\delta_1}{\chi}\right)\left(\mathfrak{B}_2 + m_2 \frac{\delta_2}{\chi}\right) - \left(\mathfrak{A}_2 + m_1 \frac{\delta_2}{\chi}\right)\left(\mathfrak{B}_1 + m_2 \frac{\delta_1}{\chi}\right) = \nu_1,$$

oder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 + m_1\left(\mathfrak{B}_2 \frac{\delta_1}{\chi} - \mathfrak{B}_1 \frac{\delta_2}{\chi}\right) + m_2\left(\mathfrak{A}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{A}_2 \frac{\delta_1}{\chi}\right) = \nu_1,$$

oder endlich:

$$(9)\qquad - m_1 \frac{\nu_4}{\chi} + m_2 \frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_1 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1),$$

und ebenso aus b):

$$(10)\qquad - m_1 \frac{\nu_5}{\chi} + m_3 \frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1).$$

Damit die Gleichung (9) lösbar ist, muss ein etwaiger gemeinsamer Factor von $\frac{\nu_4}{\chi}$ und $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$, welcher $= \omega$ sei, auch in der rechten Seite enthalten sein.

Wie man sich durch Substitution der Werthe von $\nu_1 \cdots \nu_5$ leicht überzeugt, ist:

$$(11)\qquad \frac{1+\nu_3}{2} \cdot \frac{1-\nu_3}{2} = \nu_2\nu_4 - \nu_1\nu_5,$$

folglich:

$$\frac{1+\nu_3}{2}\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 \frac{\nu_4}{\chi} - \nu_1 \frac{\nu_5}{\chi},$$

und es muss der $\frac{\nu_4}{\chi}$ und $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$ noch gemeinsame Factor auch in $\nu_1 \frac{\nu_5}{\chi}$ enthalten sein, also in ν_1, weil eben $\frac{\nu_4}{\chi}$, $\frac{\nu_5}{\chi}$, $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$ keinen gemeinsamen Factor mehr besitzen sollen.

Ferner ist nach c) und e):

$$\mathfrak{A}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{A}_2 \frac{\delta_1}{\chi} = \frac{1-\nu_3}{2\chi},$$

$$\mathfrak{B}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{B}_2 \frac{\delta_1}{\chi} = \frac{\nu_4}{\chi}.$$

Der den rechten Seiten gemeinsame Factor ω muss auch in der Determinante $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ enthalten sein, da sonst $\frac{\delta_1}{\chi}$ und $\frac{\delta_2}{\chi}$ noch einen gemeinsamen Factor besässen.

Der Nachweis für die Lösbarkeit von (10) ist ebenso mit Benutzung von c) und f) zu führen.

Wenn irgend eine ganzzahlige Lösung von (9) $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ ist, so sind die sämmtlichen Lösungen:

$$m_1 = \mathfrak{m}_1 + p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}, \quad m_2 = \mathfrak{m}_2 + p\,\frac{\nu_4}{\chi\omega},$$

wo p eine vorläufig beliebige ganze Zahl ist.

Geht man mit dem Werthe von m_1 in (10) hinein, so erhält man:

$$-\left(\mathfrak{m}_1 + p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\right)\frac{\nu_5}{\chi} + m_3\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1),$$

oder:

$$(12)\quad -p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\cdot\frac{\nu_5}{\chi} + m_3\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{m}_1\,\frac{\nu_5}{\chi}\,.$$

Damit diese Gleichung nach m_3 und p ganzzahlig lösbar sei, muss die rechte Seite den Factor $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ enthalten.

Zum Nachweise hievon setze ich in die rechte Seite von (12) aus (9) ein:

$$\mathfrak{m}_1 = \frac{-\nu_1 + (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) + \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}}{\left(\frac{\nu_4}{\chi}\right)},$$

und finde:

$$(13)\quad \begin{cases} \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) - \frac{\nu_5}{\nu_4}\left\{\nu_1 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) - \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}\right\} \\ = \frac{1}{\nu_4}\left\{\nu_2\nu_4 - \nu_1\nu_5 - \nu_4(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \nu_5(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) + \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}\nu_5\right\}. \end{cases}$$

Der Divisor ν_4 thut hier nichts zur Sache, weil er zu $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ relativ prim ist.

Das letzte Glied der Klammer in (13) enthält augenscheinlich $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$; die beiden ersten ebenfalls nach (11), und es handelt sich nur noch um:

$$\nu_4(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) - \nu_5(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1).$$

Setzt man für $\nu_4 : \mathfrak{B}_1\delta_2 - \mathfrak{B}_2\delta_1$, für $\nu_5 : \mathfrak{C}_1\delta_2 - \mathfrak{C}_2\delta_1$ so erhält man:

$$(\mathfrak{A}_1\delta_2 - \mathfrak{A}_2\delta_1)(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1) = \frac{1-\nu_3}{2\chi}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1),$$

woraus ersichtlich ist, dass auch hierin $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ enthalten ist.

Schreibt man die Gleichung (12):

$$m_3\omega - p\,\frac{\nu_3}{\chi} = \frac{1}{\left(\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\right)}\left\{\nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{m}_1\,\frac{\nu_3}{\chi}\right\},$$

so zeigt sich, dass sie in der That immer ganzzahlige Auflösungen zulässt, weil ω und $\frac{\nu_3}{\chi}$ relativ prim sind.

Die Gleichungen a) b) c) e) f) sind nun erfüllt; und d) ist auch befriedigt, da sie eine Folge der übrigen ist, wie man mit Hülfe von (11) leicht einsieht.

Daraus, dass die Coefficienten $a_0' \cdots$ die Gleichungen (2) befriedigen, folgt noch, dass auch $d_1' = 0$, $d_2' = 0$ werden.

Jetzt suche ich mit Hülfe einer zweiten linearen Transformation zu machen:

$$(14)\qquad \left\{\begin{matrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & b_1' & b_2' & b_3' \\ 0 & c_1' & c_2' & c_3' \\ 0 & 0 & 0 & d_3' \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} \alpha_0' & \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ 0 & \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ 0 & \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a_0'' & a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ 0 & b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ 0 & 0 & c_2'' & c_3'' \\ 0 & 0 & 0 & d_3'' \end{matrix}\right\}.$$

Bei der Zusammensetzung der Systeme ergiebt sich sofort, dass hiezu noch die Gleichung zu erfüllen ist:

$$(15)\qquad c_1'\beta_1' + c_2'\gamma_1' = 0\,,$$

also:

$$(16)\qquad \beta_1' : \gamma_1' = c_2' : -c_1'\,.$$

Den Gleichungen (2) entsprechen hier folgende:

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_0'\delta_3' = 1\,, \\ &\beta_1'\gamma_2' - \gamma_1'\beta_2' = 1\,, \\ &\alpha_1'\delta_3' + \beta_1'\gamma_3' - \gamma_1'\beta_3' = 0\,, \\ &\alpha_2'\delta_3' + \beta_2'\gamma_3' - \gamma_2'\beta_3' = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Hienach hat man $\alpha_0' = \delta_3' = 1$ zu setzen, ferner β_1' und γ_1' der Proportion (16) gemäss ohne gemeinsamen Factor anzunehmen. β_2' und γ_2' sind dann aus der zweiten Gleichung (17) zu bestimmen, welche ∞ viele Auflösungen zulässt. Endlich hat man noch zu machen:

$$\alpha_1' = -(\beta_1'\gamma_3' - \gamma_1'\beta_3')\,,$$
$$\alpha_2' = -(\beta_2'\gamma_3' - \gamma_2'\beta_3')\,,$$

wobei es übrigens freisteht, β_3' und $\gamma_3' = 0$ zu setzen, so dass auch α_1' und α_2' verschwinden.

Schliesslich setze ich die Transformation $a_0'' \cdots$ noch einmal mit einer linearen zusammen:

$$(18)\qquad \begin{Bmatrix} a_0'' & a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ 0 & b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ 0 & 0 & c_2'' & c_3'' \\ 0 & 0 & 0 & d_3'' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0'' & \alpha_1'' & \alpha_2'' & \alpha_3'' \\ 0 & \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \\ 0 & 0 & \gamma_2'' & \gamma_3'' \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 0 & C_2 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 \end{Bmatrix}.$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0''\alpha_0'', & A_1 &= a_0''\alpha_1'' + a_1''\beta_1'', & A_2 &= a_0''\alpha_2'' + a_1''\beta_2'' + a_2''\gamma_2'', \\ & & B_1 &= b_1''\beta_1'', & B_2 &= b_1''\beta_2'' + b_2''\gamma_2'', \\ & & & & C_2 &= c_2''\gamma_2'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= a_0''\alpha_3'' + a_1''\beta_3'' + a_2''\gamma_3'' + a_3''\delta_3'', \\ B_3 &= b_1''\beta_3'' + b_2''\gamma_3'' + b_3''\delta_3'', \\ C_3 &= c_2''\gamma_3'' + c_3''\delta_3'', \\ D_3 &= d_3''\delta_3''. \end{aligned}$$

Die Coefficienten a_0'' und d_3'' können, da ihr Product $= k$, entweder beide $+$ oder beide $-$ sein, folglich kann man α_0'' und δ_3'', deren Product $= 1$, immer so wählen, dass A_0 und D_3 positiv werden. Ebenso kann man auch die beiden andern Diagonalcoefficienten positiv machen durch geeignete Annahme von β_1'' und γ_2''.

Zwischen den Grössen $\alpha_0'' \cdots$ bestehen noch folgende Relationen (cf. (3)):

$$\alpha_0''\gamma_3'' + \alpha_1''\gamma_2'' = 0,$$
$$\alpha_0''\beta_3'' + \alpha_1''\beta_2'' - \alpha_2''\beta_1'' = 0,$$

so dass man nur noch über α_1'', β_2'', α_2'' (und α_3'') verfügen kann, wodurch γ_3'' und β_3'' bestimmt sind.

Man kann nun durch geeignete Wahl von:

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \alpha_1'' & \text{erreichen, dass} & 0 \leqq A_1 < A_0, \\ \beta_2'' & \quad\text{„} & \text{„} \quad 0 \leqq B_2 < B_1, \\ \alpha_2'' & \quad\text{„} & \text{„} \quad 0 \leqq A_2 < A_0, \\ \alpha_3'' & \quad\text{„} & \text{„} \quad 0 \leqq A_3 < A_0 \text{ wird.} \end{array}\right.$$

B_3 und C_3 sind hiedurch schon bestimmt. Sie genügen den Gleichungen:

$$(20)\qquad \begin{cases} A_0C_3 + A_1C_2 = 0, \\ A_0B_3 + A_1B_2 - A_2B_1 = 0. \end{cases}$$

Es ist also:

$$C_3 = -\frac{A_1C_2}{A_0}$$

und, weil A_0, A_1, C_2 nicht negativ, mit Berücksichtigung von (19):

$$0 \geqq C_3 > -C_2.$$

Ferner ist:

$$B_3 = -\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_0}.$$

Da nun beide Glieder des Zählers an sich positiv sind, so folgt wegen (19), dass der absolute Werth von $B_3 < B_1$. Uebrigens kann B_3 positiv wie negativ sein.

Die Transformation $a_0 \cdots$ ist also mit einer andern $A_0 \cdots$ äquivalent, bei der die Coefficienten unter der Diagonale 0, die Diagonalcoefficienten positiv, ferner jeder der noch übrigen Coefficienten absolut kleiner als der Diagonalcoefficient derselben Zeile und $A_1, A_2, A_3, B \geqq 0$ sind. Ausserdem befriedigen die Coefficienten die Gleichungen (20) und $A_0 D_3 = B_1 C_2 = k$.

Man überzeugt sich ferner leicht, dass keine zwei Transformationen der eben angegebenen Form unter einander äquivalent sein können, ohne identisch zu sein.

Man kann sie daher als Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen wählen.

Eine nähere Betrachtung zeigt indessen, dass die Coefficienten der Repräsentanten innerhalb der so eben angegebenen Grenzen nicht vollkommen willkührlich sind.

Um daher die Form der Repräsentanten genauer festzustellen und später die Zahl der zu einem gegebenen Transformationsgrade gehörigen zu bestimmen, untersuche ich, welche Systeme*):

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{array} \right\}$$

mit den Gleichungen vereinbar sind:

$$(22) \qquad \begin{cases} a_0 d_3 = k, \\ b_1 c_2 = k, \\ a_0 c_3 + a_1 c_2 = 0, \\ a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \end{cases}$$

wo a_0, b_1, c_2, d_3 positiv, die übrigen Coefficienten absolut kleiner als die Diagonalcoefficienten derselben Zeile und $a_1, a_2, a_3, b_2 \geqq 0$ sind.

Jedenfalls ist:

$$a_0 = t_0,$$
$$a_1 = t_1,$$

wo t_0 und t_1 Factoren von k sind, und:

---

*) Der Bequemlichkeit wegen ist die Bezeichnung geändert.

$$d_3 = t_3 = \frac{k}{t_0},$$

$$c_2 = t_2 = \frac{k}{t_1}.$$

Der grösste gemeinsame Factor von t_0 und t_1 sei σ_{01} und:

$$t_0 = \sigma_{01}\sigma_{02},$$
$$t_1 = \sigma_{01}\sigma_{13}.$$

σ_{02} und σ_{13} sind relativ prim.

Da $t_0 t_3 = t_1 t_2$, so ist:

$$\sigma_{01}\sigma_{02}t_3 = \sigma_{01}\sigma_{13}t_2.$$

Ich nenne $\frac{t_3}{\sigma_{13}} = \frac{t_2}{\sigma_{02}} : \sigma_{23}$, sodass also:

$$t_2 = \sigma_{02}\sigma_{23},$$
$$t_3 = \sigma_{13}\sigma_{23},$$

und σ_{23} der grösste gemeinsame Factor von t_2 und t_3 ist.

Der grösste gemeinsame Factor von σ_{01} und σ_{23} sei f, und:

$$\sigma_{01} = f\sigma_{01}'$$
$$\sigma_{23} = f\sigma_{23}',$$

so ist in Folge der vorhergehenden Definitionen f *der grösste gemeinsame Factor von* t_0, t_1, t_2, t_3.

Die dritte Gleichung (22) wird nun:

$$f\sigma_{01}'\sigma_{02}c_3 + a_1 f\sigma_{23}'\sigma_{02} = 0,$$

oder:

$$\sigma_{01}'c_3 + \sigma_{23}'a_1 = 0,$$

und:

$$a_1 = a_1'\sigma_{01}',$$
$$c_3 = -a_1'\sigma_{23}'.$$

Weil $a_1 < t_0$ sein sollte, ist $a_1' < \frac{t_0}{\sigma_{01}'} = f\sigma_{02}$ und besitzt auch $f\sigma_{02}$ Werthe.

Die letzte Gleichung (22) geht über in:

$$f\sigma_{01}'\sigma_{02}b_3 + a_1'\sigma_{01}'b_2 - a_2 f\sigma_{01}'\sigma_{13} = 0,$$

oder:

$$\sigma_{02}b_3 + \frac{a_1'b_2}{f} - a_2\sigma_{13} = 0.$$

Dies ergiebt zunächst die Bedingung:

(23) $$\frac{a_1'b_2}{f} \text{ eine ganze Zahl,}$$

(24) $$a_2\sigma_{13} - \frac{a_1'b_2}{f} \equiv 0 \pmod{\sigma_{02}},$$

und liefert sodann:

$$b_3 = \frac{1}{\sigma_{02}}\left(a_2\sigma_{13} - \frac{a_1'b_2}{f}\right).$$

Der grösste gemeinsame Factor von a_1' und f sei φ und:

$$f = \varphi\psi,$$

so folgt aus (23):

$$b_2 = b_2'\psi.$$

Da nun $b_2 < t_1$, so besitzt b_2' für *ein einmal angenommenes* a_1': $\frac{t_1}{\psi} = \sigma_{01}'\varphi\sigma_{13}$ Werthe.

Weil σ_{02} und σ_{13} relativ prim sind, so folgt für ein bestimmtes a_1' und b_2 aus (24) a_2 bis auf Vielfache von σ_{02}. Da nun $a_2 < t_0$, so kann:

$$a_2 = a_2' + m\sigma_{02}, \quad (a_2' < \sigma_{02})$$

$\frac{t_0}{\sigma_{02}} = \sigma_{01}$ Werthe annehmen.

$a_3 < t_0$ ist weiter keiner Beschränkung unterworfen, und hat also t_0 Werthe.

Bei fest angenommenen t_0 und t_1 giebt es für ein bestimmtes a_1':

$$\sigma_{01}'\varphi\sigma_{13}\cdot\sigma_{01}\cdot t_0 = \sigma_{01}' t_0 t_1 \varphi$$

Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen, und für alle a_1':

$$\sigma_{01}' t_0 t_1 \sum_{\varrho=0}^{\varrho=f\sigma_{02}-1} \varphi_\varrho,$$

wo φ_ϱ den grössten gemeinsamen Factor von f und ϱ bedeutet.

Es wird sich also zunächst um die Ausführung der so definirten Summe handeln. Die möglichen Werthe von $\varrho(a_1')$ sind unter der Form darstellbar:

$$\varrho = xf + y,$$

wo:

$$x = 0,\ 1\cdots(\sigma_{02}-1),$$
$$y = 0,\ 1\cdots(f-1).$$

Der grösste gemeinsame Factor von f und ϱ ist daher auch der grösste gemeinsame Factor von f und y, daher ist obige Summe:

$$\sigma_{02}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=f-1}\varphi_\varrho.$$

Man hat also die Summe der grössten Factoren zu nehmen, welche f mit $0, 1, 2\cdots f-1$ gemein hat (wobei 1 auch mitzurechnen ist).

Es sei nun:

$$f = a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu,$$

wo $a, b\cdots n$ Primzahlen bedeuten.

Ich bilde die Summe, indem ich untersuche, welchen Beitrag jeder Factor von f zu derselben liefert.

$a^\alpha b^\beta\cdots n^\nu$ ist enthalten in 0 und liefert den Beitrag $a^\alpha b^\beta\cdots n^\nu$.

Der Factor $\varphi = a^{\alpha-\varkappa} b^\beta\cdots n^\nu$ ist enthalten in:

$$1\cdot\varphi,\ 2\cdot\varphi\cdots(a^\varkappa-1)\cdot\varphi.$$

Indessen ist φ nur dann der *grösste* gemeinsame Factor dieser Grössen mit f, wenn die Coefficienten nicht Vielfache von a sind. Es sind also fortzulassen:

$$1 \cdot a \cdot \varphi, \quad 2 \cdot a \cdot \varphi, \quad \cdots (a^{\varkappa-1} - 1)\, a \cdot \varphi.$$

Die Zahl der noch übrig bleibenden Grössen beträgt:

$$(a^{\varkappa} - 1) - (a^{\varkappa-1} - 1) = a^{\varkappa-1}(a-1).$$

Jede derselben liefert zur Summe den Beitrag $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta} \cdots n^{\nu}$, folglich alle zusammen:

$$(a-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta} \cdots n^{\nu}.$$

Da nun $\varkappa = 1, 2 \cdots \alpha$ sein kann, so ist der Beitrag sämmtlicher Factoren der Form $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta} \cdots n^{\nu}$:

$$\alpha(a-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta} \cdots n^{\nu} = f\,\frac{\alpha(a-1)}{a}.$$

Ebenso liefern die Grössen $a^{\alpha} b^{\beta-\lambda} c^{\gamma} \cdots n^{\nu}$ den Beitrag:

$$\beta(b-1)\, a^{\alpha} b^{\beta-1} c^{\gamma} \cdots n^{\nu} = f\,\frac{\beta(b-1)}{b} \text{ etc.}$$

Der Factor $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta-\lambda} c^{\gamma} \cdots n^{\nu}$ ist enthalten in $(a^{\varkappa} b^{\lambda} - 1)$ Grössen aus der Reihe $1, 2 \cdots f-1$. Von diesen sind aber fortzulassen diejenigen, welche eine höhere Potenz von a enthalten, also $(a^{\varkappa-1} b^{\lambda} - 1)$ Grössen, sowie die eine höhere Potenz von b enthaltenden, welche an Zahl sind: $(a^{\varkappa} b^{\lambda-1} - 1)$. Jetzt sind aber zweimal fortgelassen, folglich wieder hinzuzuzählen die $(a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1} - 1)$ Grössen, welche sowohl durch höhere Potenzen von a, wie auch durch höhere Potenzen von b theilbar sind. Die Zahl der wirklich in Betracht kommenden Grössen ist also:

$$\begin{aligned}(a^{\varkappa} b^{\lambda} - 1) - (a^{\varkappa-1} b^{\lambda} - 1) - (a^{\varkappa} b^{\lambda-1} - 1) + (a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1} - 1) &= \\ = a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1}(a-1)(b-1)&,\end{aligned}$$

und der Beitrag zur Summe:

$$(a-1)(b-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma} \cdots n^{\nu} = f\,\frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b}.$$

Da nun aber $\varkappa$ und λ die Werthe $1, 2 \cdots \alpha$ resp. $1, 2 \cdots \beta$ besitzen dürfen, so giebt es $\alpha\beta$ Factoren von f, welche obige Form haben und zur Summe:

$$f\,\frac{\alpha(a-1)}{a} \cdot \frac{\beta(b-1)}{b}$$

beitragen.

Man übersieht schon, wie dies Verfahren sich weiter fortsetzen lässt. Die ganze Summe wird hienach:

$$f\left\{1+\frac{\alpha(a-1)}{a}+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\frac{\gamma(c-1)}{c}\right.$$
$$+\frac{\beta(b-1)}{b}+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\gamma(c-1)}{c}+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\frac{\delta(d-1)}{d}$$
$$\vdots$$
$$\left.+\frac{\nu(n-1)}{n}+\frac{\mu(m-1)}{m}\frac{\nu(n-1)}{n}+\frac{\lambda(l-1)}{l}\frac{\mu(m-1)}{m}\frac{\nu(n-1)}{n}+\cdots+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\cdots\frac{\nu(n-1)}{n}\right\}$$
$$=f\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1+\frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right).$$

Die Anzahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen ist somit für dasselbe t_0 und t_1:

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}&\sigma_{01}'\sigma_{02}f\,t_0\,t_1\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1+\frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right)\\&\quad=t_0^2t_1\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1+\frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right).\end{aligned}\right.$$

Wenn k *keine quadratischen Factoren enthält*, wird $f=1$, denn f, welches in t_0, t_1, t_2, t_3 als Factor enthalten sein sollte, müsste für $k=t_0t_3$ einen Factor f^2 zur Folge haben. Die Exponenten $\alpha, \beta\cdot\cdot\nu$ werden 0 und die Anzahl der Repräsentanten für ein bestimmtes t_0 und t_1 reducirt sich auf:

$$t_0^2\,t_1,$$

also die Zahl der sämmtlichen zum Transformationsgrade k gehörigen Repräsentanten:

$$\Sigma\,t_0^2\,t_1,$$

wo für t_0 und t_1 sämmtliche Factoren von k zu setzen sind. Weil es freisteht, bei jedem t_0 t_1 seine sämmtlichen Werthe durchlaufen zu lassen, kann obige Summe geschrieben werden:

$$\Sigma t_0^2\;\Sigma t_1.$$

Wenn nun:

$$k=p_1p_2\cdots p_n,$$

wo die p Primzahlen bedeuten, so ist:

$$\begin{aligned}\Sigma t_1&=1+(p_1+p_2+\cdot\cdot p_n)+(p_1p_2+p_1p_3+\cdots p_{n-1}p_n)\\&\quad+(p_1p_2p_3+\cdots\;)+\cdots\cdot+p_1p_2\cdots p_n\\&=(1+p_1)(1+p_2)\cdot\cdot(1+p_n),\\\Sigma t_0^2&=1+(p_1^2+p_2^2+\cdots p_n^2)+(p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2+\cdot\cdot p_{n-1}^2p_n^2)\\&\quad+(p_1^2p_2^2p_3^2+\cdots\;)+\cdots\cdot+p_1^2p_2^2\cdots p_n^2\\&=(1+p_1^2)(1+p_2^2)\cdots(1+p_n^2),\end{aligned}$$

und die Anzahl der Repräsentanten:

$$\prod_{h=1}^{h=n}(1 + p_h + p_h^2 + p_h^3)\,,$$

welche Formel das Resultat von Hermite für einen primzahligen Transformationsgrad in sich schliesst.

Ich wende mich jetzt dazu für *beliebige* k die Gesammtzahl der Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen zu ermitteln.

Ich habe dazu:

$$\Sigma t_0^2\, t_1 \left(1 + \frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1 + \frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1 + \frac{\nu(n-1)}{n}\right) \tag{26}$$

auszudehnen über alle t_0 und t_1, welche Factoren von k sind, und es sind $\alpha, \beta \cdots \nu$ dadurch für jedes Werthepaar t_0, t_1 definirt, dass der grösste gemeinsame Factor von t_0, t_1, t_2, t_3 ist:

$$f = a^\alpha\, b^\beta \cdots n^\nu\,.$$

Die in k enthaltenen Primfactoren $a, b \cdot\cdot n$ können darin zu geraden und zu ungeraden Potenzen erhoben vorkommen. Es sei daher:

$$k = a^{2\alpha'} \cdots\cdots d^{2\delta'} \cdot e^{2\varepsilon'+1} \cdots n^{2\nu'+1}\,.$$

Bei der Bildung der Summe (26) verfahre ich so, dass ich sie zuerst ausdehne über alle Werthsysteme von t_0 und t_1, welche dasselbe f ergeben, und nachher f die sämmtlichen möglichen Werthe ertheile.

Für dasselbe f bleibt der letzte Factor in (26) constant, also habe ich nur:

$$\Sigma\, t_0^2\, t_1$$

für die zu demselben f gehörigen t_0 und t_1 zu nehmen.

Wenn:

$$\left\{\begin{aligned} t_0 &= a^{\alpha_0} \cdots d^{\delta_0} \cdot e^{\varepsilon_0} \cdots n^{\nu_0}\,, \\ t_1 &= a^{\alpha_1} \cdots d^{\delta_1} \cdot e^{\varepsilon_1} \cdots n^{\nu_1}\,, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

so wird:

$$\Sigma\, t_0^2 t_1 = \Sigma\, a^{2\alpha_0+\alpha_1} \cdots d^{2\delta_0+\delta_1} \cdot e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1} \cdots n^{2\nu_0+\nu_1}\,, \tag{28}$$

oder, da die α_0 und α_1 ihre sämmtlichen Werthe durchlaufen können, während die übrigen Exponenten constant bleiben, etc.:

$$\Sigma\, t_0^2 t_1 = \Sigma\, a^{2\alpha_0+\alpha_1} \cdots\cdots \Sigma\, d^{2\delta_0+\delta_1} \cdot \Sigma\, e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1} \cdots \Sigma\, n^{2\nu_0+\nu_1}\,. \tag{28a}$$

Ich schreite jetzt zur Bestimmung von $\Sigma\, a^{2\alpha_0+\alpha_1}$ und $\Sigma\, e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1}$, welche eine gesonderte Behandlung erfordern.

Da:

$$t_3 = \frac{k}{t_0} = a^{2\alpha'-\alpha_0} \ldots d^{2\delta'-\delta_0} \cdot e^{2\varepsilon'+1-\varepsilon_0} \ldots n^{2\nu'+1-\nu_0},$$

$$t_2 = \frac{k}{t_1} = a^{2\alpha'-\alpha_1} \ldots d^{2\delta'-\delta_1} \cdot e^{2\varepsilon'+1-\varepsilon_1} \ldots n^{2\nu'+1-\nu_1},$$

so sind für α_0 und α_1 alle diejenigen Combinationen zu nehmen, welche als grössten gemeinsamen Factor von

$$a^{\alpha_0}, \quad a^{\alpha_1}, \quad a^{2\alpha'-\alpha_1}, \quad a^{2\alpha'-\alpha_0}$$

a^α ergeben.

Wenn nun nicht gerade $\alpha = \alpha'$, so sind diese Werthsysteme:

$$\begin{array}{llr} 1)\ \alpha_0 = \alpha, & \alpha_1 = \alpha + \lambda, & \\ 2)\ \alpha_0 = 2\alpha' - \alpha, & \alpha_1 = \alpha + \lambda, & \lambda = 0, 1, 2 \cdots 2(\alpha' - \alpha), \\ 3)\ \alpha_0 = \alpha + \mu, & \alpha_1 = \alpha, & \\ 3)\ \alpha_0 = \alpha + \mu, & \alpha_1 = 2\alpha' - \alpha, & \mu = 1, 2 \cdots 2(\alpha' - \alpha) - 1. \end{array}$$

Ist $\alpha = \alpha'$, so giebt es nur einen möglichen Fall:

$$\alpha_0 = \alpha', \quad \alpha_1 = \alpha'.$$

Hienach ist:

$$\Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} = (a^{3\alpha} + a^{4\alpha'-\alpha}) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2(\alpha'-\alpha)} a^\lambda + (a^{3\alpha} + a^{2\alpha'+\alpha}) \sum_{\mu=1}^{\mu=2(\alpha'-\alpha)-1} a^{2\mu},$$

oder nach Ausführung der Summen und einigen Reductionen:

$$(29) \quad \Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} = \mathfrak{S}_{a,\alpha} = \frac{a^{3\alpha}}{a^2-1}\left\{(a^{6(\alpha'-\alpha)}-1)(1+a+a^2) - a^{4(\alpha'-\alpha)+1} + a^{2(\alpha'-\alpha)+1}\right\}.$$

Wenn $\alpha = \alpha'$, so ist:

$$(30) \quad \Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} = \mathfrak{S}_{a,\alpha'} = a^{3\alpha'}.$$

Ganz analog sind den ε_0 und ε_1 solche Werthsysteme beizulegen, dass:

$$e^{\varepsilon_0}, \quad e^{\varepsilon_1}, \quad e^{2\varepsilon'+1-\varepsilon_1}, \quad e^{2\varepsilon'+1-\varepsilon_0}$$

den grössten gemeinsamen Factor e^ε besitzen, also:

$$\begin{array}{llr} 1)\ \varepsilon_0 = \varepsilon, & \varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda, & \\ 2)\ \varepsilon_0 = 2\varepsilon' + 1 - \varepsilon, & \varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda, & \lambda = 0, 1, \cdots 2(\varepsilon' - \varepsilon) + 1, \\ 3)\ \varepsilon_0 = \varepsilon + \mu, & \varepsilon_1 = \varepsilon, & \\ 4)\ \varepsilon_0 = \varepsilon + \mu, & \varepsilon_1 = 2\varepsilon' + 1 - \varepsilon, & \mu = 1, 2, \cdots 2(\varepsilon' - \varepsilon), \end{array}$$

und man findet:

$$(31) \quad \left\{\begin{aligned} \Sigma e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1} = \mathfrak{U}_{e,\varepsilon} &= (e^{3\varepsilon} + e^{4\varepsilon'-\varepsilon+2}) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2(\varepsilon'-\varepsilon)+1} e^\lambda + (e^{3\varepsilon} + e^{2\varepsilon'+\varepsilon+1}) \sum_{\mu=1}^{\mu=2(\varepsilon'-\varepsilon)} e^{2\mu} \\ &= \frac{e^{3\varepsilon}}{e^2-1}\left\{(e^{6(\varepsilon'-\varepsilon)+3} - 1)(1+e+e^2) - e^{4(\varepsilon'-\varepsilon)+3} + e^{2(\varepsilon'-\varepsilon)+2}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Der Fall $\varepsilon = \varepsilon'$ ordnet sich hier der allgemeinen Formel unter.

Die Zahl der Repräsentanten, bei denen $f = a^\alpha \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot d^\delta \cdot e^\varepsilon \cdot\cdot n^\nu$ ist also:

$$(32)\quad \mathfrak{S}_{a,\alpha}\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\cdots\mathfrak{S}_{d,\delta}\left(1+\frac{\delta(d-1)}{d}\right)\cdot\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)\cdots\mathfrak{U}_{n,\nu}\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right).$$

Jetzt hat man noch hievon die Summe zu nehmen für sämmtliche f, d. h. $\alpha \cdot\cdot \delta$, $\varepsilon \cdot\cdot \nu$ die Werthe $0, 1 \cdot\cdot \alpha'$; $\cdot\cdot\cdot 0, 1 \cdot\cdot \delta'$; $0, 1 \cdot\cdot \varepsilon'$; $\cdot\cdot\cdot 0, 1 \cdot\cdot\cdot \nu'$ beizulegen.

Da nun wieder α seine sämmtlichen Werthe für jedes System der $\beta \cdot\cdot\cdot \nu$ durchlaufen kann, so erhält man die Gesammtzahl der Repräsentanten:

$$(33)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{S}_{a,\alpha}\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\cdots\sum_{\delta=0}^{\delta=\delta'}\mathfrak{S}_{d,\delta}\left(1+\frac{\delta(d-1)}{d}\right)\cdot\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)\cdots$$
$$\cdots\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu'}\mathfrak{U}_{n,\nu}\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right).$$

Nach (29) und (30) wird nun:

$$(34)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{S}_{a,\alpha}\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right) =$$
$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1}\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\frac{a^{3\alpha}}{a^2-1}\left\{(a^{6(\alpha'-\alpha)}-1)(1+a+a^2)-a^{4(\alpha'-\alpha)+1}+a^{2(\alpha'-\alpha)+1}\right\}$$
$$+\left(1+\frac{\alpha'(a-1)}{a}\right)a^{3\alpha'}.$$

Die einzelnen Summen, auf deren Bildung es ankommt, haben die Form:

$$(35)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1} a^{\varrho\alpha} = \frac{a^{\varrho\alpha'}-1}{a^\varrho-1},$$

$$(36)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1} \alpha a^{\varrho\alpha} = \frac{(\alpha'-1)a^{\varrho\alpha'}}{a^\varrho-1} - \frac{a^{\varrho\alpha'}-a^\varrho}{(a^\varrho-1)^2}.$$

Führt man die Summation aus und reducirt, so findet man schliesslich:

$$(37)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{S}\, a,\alpha\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right) = G a,\alpha' =$$
$$a^{3\alpha'}+\frac{1}{a-1}\left\{\frac{a^{3\alpha'}-1}{a^3-1}\left(a^{3\alpha'+2}(a^2+1)-1\right)-\frac{a^{\alpha'}-1}{a-1}a^{3\alpha'+1}\right\}.$$

Analog wird:

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)=$$
$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)\frac{e^{3\varepsilon}}{e^2-1}\left\{(e^{6(\varepsilon'-\varepsilon)+3}-1)(1+e+e^2)-e^{4(\varepsilon'-\varepsilon)+3}+e^{2(\varepsilon'-\varepsilon)+2}\right\},$$

und nach Ausführung der Summationen und einigen Reductionen:

$$(38) \quad \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'} \mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right) = U_{e,\varepsilon'} =$$

$$e^{3\varepsilon'}(1+e+e^2+e^3)+\frac{1}{e-1}\left\{\frac{e^{3\varepsilon'}-1}{e^3-1}(e^{3\varepsilon'+5}(e^2+1)-1)-\frac{e^{\varepsilon'}-1}{e-1}e^{3\varepsilon'+3}\right\}.$$

Die Anzahl der nicht äquivalenten Klassen, welche zum Transformationsgrade:

$$k = a^{2\alpha'} \cdots d^{2\delta'} \cdot e^{2\varepsilon'+1} \cdots n^{2\nu'+1}$$

gehören, ist also:

$$G_{a,\alpha'} \cdots G_{d,\delta'} \cdot U_{e,\varepsilon'} \cdots U_{n,\nu'},$$

worin G und U durch (37) *und* (38) *definirt sind.*

Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung.

Von Dr. O. Dersch in Offenbach a. M.

Die Aufgabe, welche ich in nachstehender Abhandlung behandle, besteht darin, eine allgemeine Gleichung für diejenige Curve zu finden, die durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung geht. Bevor ich hierzu übergehe, suche ich erst die Aufgabe zu lösen, auf welcher Curve diejenigen Schnittpunkte einer Tangente mit einer Curve n^{ter} Ordnung liegen, welche sich nicht in dem Berührungspunkte befinden. Die fragliche Curve wird $(n-2)^{ter}$ Ordnung sein, da die Tangente ausser dem Berührungspunkte noch $n-2$ Punkte mit der Curve n^{ter} Ordnung gemein hat. Ist die erwähnte Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung gefunden, so bietet die eigentliche Aufgabe, die Doppeltangenten zu finden, keine Schwierigkeiten mehr, indem man dann nur noch die Bedingung dafür aufzustellen hat, dass ausser den beiden im Berührungspunkte zusammenfallenden Schnittpunkten der Tangente mit der Curve n^{ter} Ordnung noch 2 andere von den Schnittpunkten zusammenfallen, d. i. die Bedingung dafür, dass die Tangente der Curve n^{ter} Ordnung auch noch die angegebene Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung berührt.

Die zur Lösung der genannten Aufgaben anzuwendenden Operationen werden sich auf einfache Sätze der symbolischen Rechnung, nämlich besonders auf Vertauschung von Buchstaben und auf Anwendung von Identitäten stützen.

Plücker, Jacobi, Clebsch behandelten das Problem der Doppeltangenten. Sie berechneten die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung.

Plücker zeigte „solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes“ Cr. J. Bd. 12, S. 105—108, ferner „Theorie der algebraischen Curven“ 1839, dass die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung $\frac{1}{2} n (n-2)(n^2-9)$ sei.

Jacobi fand dieselbe Zahl in Cr. J. Bd. 40, S. 237 u. f.

Clebsch hat, Cr. J. Bd. 63, S. 186 u. f., diese Jacobi'sche Arbeit in einfacher Form auf folgende Weise reproducirt:

$a_x^n = 0$ sei die Gleichung der gegebenen Curve n^{ter} Ordnung.

Die im Punkte x die Curve $a_x^n = 0$ berührende Tangente hat (wenn y ein beliebiger Punkt der Tangente ist) die Gleichung $a_x^{n-1} a_y = 0 = f_y$. Ferner mag y zugleich ein Punkt irgend einer Geraden $u_y = 0$ sein.

Jeder beliebige Punkt der Geraden, welche durch die Punkte x und y geht, hat die Coordinaten $\mu x + \lambda y$. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve $a_x^n = 0$ erhält man, wenn man $\mu x + \lambda y$ für x in $a_x^n = 0$ einträgt, wodurch sich ergiebt

$$(\mu a_x + \lambda a_y)^n = 0 .$$

Ersetzt man y durch die aus

$$\left.\begin{aligned} f_y &= a_x^{n-1} a_y = 0 \\ u_y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sich ergebenden Unterdeterminanten (fu), so folgt $a_y = (afu)$.

Aus $(\mu a_x + \lambda a_y)^n = 0$ wird dann $[\mu a_x + \lambda(afu)]^n = 0$.

Die fragliche Discriminante sei $F(x, u)$.

Behauptung: Aus $F(x, u)$ lässt sich der Factor u_x so oft absondern, dass die u im Reste nicht mehr vorkommen.

Beweis: Man setze $\lambda = \varrho v_x$, erhält dadurch

$$[\mu a_x + \varrho v_x (afu)]^n = 0 .$$

Nach der bekannten Identität

$$\begin{aligned} v_x (afu) &= a_x (vfu) + f_x (avu) + u_x (afv) \\ &= a_x (vfu) + u_x (afv) \,, \text{ weil } f_x = 0 \,, \end{aligned}$$

folgt hieraus

$$[(\mu + \varrho (vfu)) a_x + \varrho u_x (afv)]^n = 0 = [\mu' a_x + \lambda' (afv)]^n ,$$

wobei

$$\text{(I.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu' &= \mu + \varrho (vfu) = \mu + \frac{\lambda (vfu)}{v_x} \\ \lambda' &= \quad \varrho u_x \quad = \quad \lambda \frac{u_x}{v_x} \end{aligned} \right.$$

gesetzt ist.

Die Substitutionsdeterminante ist

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{(vfu)}{v_x} \\ 0 & \dfrac{u_x}{v_x} \end{vmatrix} = \frac{u_x}{v_x} .$$

Der Ausdruck $[\mu' a_x + \lambda'(afv)]^n$ unterscheidet sich von dem ursprünglichen Ausdrucke $[\mu a_x + \lambda(afu)]^n$ nur dadurch, dass v an die Stelle von u getreten ist. Durch die Substitution (I.) geht also die Discriminante $F(x, u)$ in $F(x, v)$ über. Die Discriminante einer Function ist eine Invariante derselben. Daher kann sich $F(x, v)$ von $F(x, u)$ nur durch eine Potenz der Substitutionsdeterminante als Factor unterscheiden, folglich

$$F(x, u) = \left(\frac{u_x}{v_x}\right)^\alpha F(x, v),$$

$$\frac{F(x, u)}{u_x^\alpha} = \frac{F(x, v)}{v_x^\alpha}.$$

Hiernach lässt sich aus $F(x, u)$ der Factor u_x so oft absondern, dass der Rest $\frac{F(x, v)}{v_x^\alpha}$ kein u mehr enthält, w. z. b. w.

Der übrig bleibende Factor $\frac{F(x, v)}{v_x^\alpha}$ ist nach Jacobi vom $(n-2)(n^2-9)^{\text{ten}}$ Grade in x.

Erst Hesse bildete, Cr. J. Bd. 36, S. 156 u. f., Cr. J. Bd. 40, S. 260, Cr. J. Bd. 41, S. 292, eine Gleichung für diejenige Curve, auf welcher die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve 4^{ter} Ordnung liegen, und zwar folgendermassen:

$a_x^n = 0$ ist die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung. Die Coordinaten irgend eines Punktes der Geraden, welche durch die Punkte x und y geht, sind $x + \lambda y$. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve $a_x^n = 0$ erhält man, indem man $x + \lambda y$ statt x in $a_x^n = 0$ einträgt, wodurch man bekommt

$$(a_x + \lambda a_y)^n = 0.$$

Die Gerade wird zur Tangente, wenn 2 Schnittpunkte zusammenfallen. Bedingung hierfür ist, dass 2 Wurzeln λ einander gleich werden. Dies tritt ein, wenn die beiden Glieder von niedrigsten Dimensionen verschwinden. Die Tangente wird zur Doppeltangente, wenn ausserdem noch 2 Wurzeln λ einander gleich werden. Bedingung hierfür ist, dass von der Gleichung, welche nach Weglassung der beiden erwähnten Glieder von niedrigsten Dimensionen und Division durch λ^2 bleibt, die Discriminante verschwinde. Diese Bedingung stellte Hesse für $n = 4$ auf und erhielt als Gleichung derjenigen Curve, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve 4^{ter} Ordnung geht, folgende

$$w_1^2 V_{11} + w_2^2 V_{22} + w_3^2 V_{33} + 2w_2 w_3 V_{23} + 2w_3 w_1 V_{31} + 2w_1 w_2 V_{12}$$
$$-3w(w_{11} V_{11} + w_{22} V_{22} + w_{33} V_{33} + 2w_{23} V_{23} + 2w_{31} V_{31} + 2w_{12} V_{12}) = 0.$$

ierbei ist $v = 0$ die gegebene Curve 4ter Ordnung,

$$w = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix}$$

$$V_{11} = v_{22}v_{33} - v_{23}^2, \quad V_{22} = v_{33}v_{11} - v_{31}^2, \quad V_{33} = v_{11}v_{22} - v_{12}^2,$$
$$V_{23} = v_{12}v_{13} - v_{11}v_{23}, \quad V_{31} = v_{23}v_{21} - v_{22}v_{31}, \quad V_{12} = v_{31}v_{32} - v_{33}v_{12}.$$

Die von Hesse aufgestellte Gleichung ist 14ten Grades in x. Das von mir für $n = 4$ erhaltene Resultat lautet

$$(rsf)^2 = 0,$$

wo

$$r_y^2 = a_x c_x^2 b_y (abc)^2 [a_x b_y + b_x a_y], \quad f = a_x^3 a_y.$$

Die Uebereinstimmung meines Resultates mit dem von Hesse gefundenen lässt sich, wie folgt, nachweisen.

Hesse's Ausdruck stelle ich zunächst symbolisch dar.

Der 1te Theil

$$w_1^2 V_{11} + w_2^2 V_{22} + w_3^2 V_{33} + 2 w_2 w_3 V_{23} + 2 w_3 w_1 V_{31} + 2 w_1 w_2 V_{12}$$

$$= - \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & w_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & w_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & w_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 \end{vmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3 q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3 q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$+ w_3 \begin{vmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ q_2 q_1 & q_2 q_2 & q_2 q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = w_1 v_2 q_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} - w_2 v_1 q_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$+ w_3 v_1 q_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (vqw)\,(w_1 v_2 q_3 - w_2 v_1 q_3 + w_3 v_1 q_2) = K.$$

Vertauscht man hierin q mit v und addirt das Resultat zum ursprünglichen K, so erhält man

$$K = \tfrac{1}{2}\,(vqw)\,[w_1(v_2 q_3 - q_2 v_3) - w_2(v_1 q_3 - q_1 v_3) + w_3(v_1 q_2 - q_1 v_2)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(vqw)\,(vqw) = \tfrac{1}{2}\,(vqw)^2.$$

$$v = a_x^4,$$

folglich

$$v_{11} = 12\, a_x^2 a_{11}, \quad v_{12} = 12\, a_x^2 a_{12}, \quad v_{22} = 12\, a_x^2 a_{22} \text{ etc.},$$

also

$$\tfrac{1}{2}\,(vqw)^2 = 12\, a_x^2 \cdot 12\, b_x^2 \cdot \tfrac{1}{2}\,(abw)^2 = 72\, a_x^2 b_x^2\,(abw)^2.$$

$$w = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12\, a_x^2 a_{11} & 12\, a_x^2 a_{12} & 12\, a_x^2 a_{13} \\ 12\, b_x^2 b_{12} & 12\, b_x^2 b_{22} & 12\, b_x^2 b_{23} \\ 12\, c_x^2 c_{13} & 12\, c_x^2 c_{23} & 12\, c_x^2 c_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 12^3\, a_x^2 b_x^2 c_x^2 \begin{vmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ b_1 b_2 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3 c_3 \end{vmatrix} = 12^3\, a_x^2 b_x^2 c_x^2 a_1 b_2 c_3 (abc) .$$

Vertauscht man hierin b mit c und addirt das Resultat zu w, so folgt

$$w = 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, a_1\, (abc)\, [b_2 c_3 - b_3 c_2] .$$

Durch Vertauschung von a mit b wird

$$w = 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, b_1\, (bac)\, [a_2 c_3 - a_3 c_2] ,$$

durch Vertauschung von a mit c wird

$$w = 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, c_1\, (cba)\, [b_2 a_3 - b_3 a_2] ,$$

folglich

$$3\,w = 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, (abc)\, [a_1 (bc)_{23} + b_1 (ca)_{23} + c_1 (ab)_{23}]$$
$$= 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, (abc)\, (abc) ,$$

also

$$w = 288\, a_x^2 b_x^2 c_x^2 (abc)^2 = 288\, \alpha_x^6 ,$$
$$w_1 = 6 \cdot 288\, \alpha_x^5 \alpha_1 , \quad w_2 = 6 \cdot 288\, \alpha_x^5 \alpha_2 \text{ etc.},$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}\, (vqw)^2 = 72\, a_x^2 b_x^2 (abw)^2 = 72\, a_x^2 b_x^2 (abw)(abw) =$$
$$= 72\, a_x^2 b_x^2\, 6 \cdot 288\, \alpha_x^5 (ab\alpha)\, 6 \cdot 288\, \beta_x^5 (ab\beta)$$
$$= 72 \cdot 36 \cdot 288^2\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^5 \beta_x^5 (ab\alpha)(ab\beta) .$$

Der 2te Theil des Hesse'schen Ausdrucks, d. i.

$$-3\,w\,(w_{11} V_{11} + w_{22} V_{22} + w_{33} V_{33} + 2 w_{23} V_{23} + 2 w_{31} V_{31} + 2 w_{12} V_{12}),$$

geht aus dem 1ten Theile hervor, wenn man

$$w_1^2 = 36 \cdot 288^2\, \alpha_x^5 \beta_x^5 \alpha_1 \beta_1 \text{ durch } w_{11} = 30 \cdot 288\, \alpha_x^4 \alpha_{11} ,$$
$$w_1 w_2 = 36 \cdot 288^2\, \alpha_x^5 \beta_x^5 \alpha_1 \beta_2 \text{ durch } w_{12} = 30 \cdot 288\, \alpha_x^4 \alpha_{12} \text{ etc.}$$

ersetzt und mit $-3\,w$ multiplicirt.

Mithin ist der 2te Theil

$$= -3\,w \cdot 72 \cdot 30 \cdot 288\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^4 (ab\alpha)^2 .$$

Das von Hesse gefundene Resultat lautet also symbolisch

$$72 \cdot 36 \cdot 288^2 a_x^2 b_x^2 \alpha_x^5 \beta_x^5 (ab\alpha)(ab\beta) - 3 \cdot 30 \cdot 72 \cdot 288 a_x^2 b_x^2 \alpha_x^4 (ab\alpha)^2 w = 0.$$

Dividirt man durch $72 \cdot 288 \cdot 18$, so folgt

$$2 \cdot 288\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^5 \beta_x^5 (ab\alpha)(ab\beta) - 5\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^4 (ab\alpha)^2 w = 0 .$$

Führt man statt w die Grösse $D = \alpha_x^6$ ein, so wird, da $w = 288\, \alpha_x^6$,

$$2\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^5 \beta_x^5 (ab\alpha)(ab\beta) - 5\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^4 (ab\alpha)^2 D = 0 \,.$$

Mit diesem Resultate ist nun $(rsf)^2 = 0$ zu vergleichen.

$$D = \alpha_x^6 = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 \,,$$

$$\alpha_x^5 \alpha_y = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x c_y \,,$$

$$5\,\alpha_x^4 \alpha_y^2 = (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_y^2 + 2 a_x^2 b_x c_x b_y c_y + 2\, a_x b_x^2 c_x a_y c_y]$$

$$= (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_y^2 + 4 a_x b_x^2 c_x a_y c_y] = (abc)^2 c_x^2 a_x b_y [a_x b_y + 4 b_x a_y] .$$

Zur Abkürzung sei $(abu)^4 = u_\nu^4$.

Ersetzt man u durch die Unterdeterminanten (xy), so wird

$$(abu) = a_x b_y - b_x a_y \,, \quad u_\nu = (\nu x y) \,,$$

folglich

$$c^2 c_\nu^2 (\nu x y)^2 = c_x^2 (abc)^2 [a_x b_y - b_x a_y]^2 = (abc)^2 c_x^2 [2 a_x^2 b_y^2 - 2 a_x b_y b\ a_y]$$

$$= 2 (abc)^2 c_x^2 a_x b_y\, [a_x b_y - b_x a_y] \,.$$

Aus den 3 Gleichungen

$$r_y^2 = \quad a_x c_x^2 b_y (abc)^2 [a_x b_y + b_x a_y] \,,$$

$$5\,\alpha_x^4 \alpha_y^2 = \quad a_x c_x^2 b_y (abc)^2 [a_x b_y + 4 b_x a_y] \,,$$

$$c_x^2 c_\nu^2 (\nu x y)^2 = 2 a_x c_x^2 b_y (abc)^2 [a_x b_y - b_x a_y]$$

ergiebt sich

$$r_y^2 = \tfrac{3}{10}\, c_x^2 c_\nu^2 (\nu x y)^2 + 2\, \alpha_x^4 \alpha_y^2 \,.$$

Hieraus folgt

$$(rsf)^2 = \tfrac{9}{100}\, c_x^2 c_\nu^2 d_x^2 d_{\nu_1}^2 (\nu x, \nu_1 x, f)^2 + \tfrac{6}{5}\, \alpha_x^4 c_x^2 c_\nu^2 (\nu x, \alpha, f)^2$$

$$+ 4 \alpha_x^4 \beta_x^4 (\alpha\beta f)^2 \,.$$

Nun ist aber $(\nu x, \nu_1 x, f) = f_x (\nu \nu_1 x) = 0$, weil $f_x = 0$,

$$(\nu x, \alpha, f) = \alpha_\nu f_x - f_\nu \alpha_x = - f_\nu \alpha_x \,,$$

also

$$(rsf)^2 = \tfrac{6}{5}\, \alpha_x^6 c_x^2 c_\nu^2 f_\nu^2 + 4\, \alpha_x^4 \beta_x^4 (\alpha\beta f)^2 \,.$$

Die Gleichung $(rsf)^2 = 0$ lautet demnach jetzt

$$\tfrac{3}{5}\, \alpha_x^6 c_x^2 c_\nu^2 f_\nu^2 + 2\, \alpha_x^4 \beta_x^4 (\alpha\beta f)^2 = 0 \,.$$

Ich suche nun das Hesse'sche Resultat in dieselbe Form zu bringen.

Zur Umformung des Hesse'schen Ausdrucks bilde ich die Identität $\alpha_x (ab\beta) - \beta_x (ab\alpha) = a_x (\alpha b \beta) + b_x (a\alpha\beta)$, erhalte hieraus durch Quadriren

$$\alpha_x^2 (ab\beta)^2 + \beta_x^2 (ab\alpha)^2 - 2 \alpha_x \beta_x (ab\alpha)(ab\beta) = a_x^2 (\alpha b \beta)^2 + b_x^2 (a\alpha\beta)^2$$

$$+ 2\, a_x b_x (a\alpha\beta)(\alpha b \beta) \,,$$

also

$$2\, \alpha_x \beta_x (ab\alpha)(ab\beta) = \alpha_x^2 (ab\beta)^2 + \beta_x^2 (ab\alpha)^2 - a_x^2 (\alpha b\beta)^2 - b_x^2 (a\alpha\beta)^2$$

$$- 2\, a_x b_x (a\alpha\beta)(\alpha b \beta) \,,$$

folglich

$$2a_x^2b_x^2\alpha_x^5\beta_x^5(ab\alpha)(ab\beta) = a_x^2b_x^2\alpha_x^4\beta_x^4\,[\alpha_x^2(ab\beta)^2 + \beta_x^2(ab\alpha)^2 - a_x^2(\alpha b\beta)^2 - b_x^2(a\alpha\beta)^2 - 2a_xb_x(a\alpha\beta)(\alpha b\beta)]$$

$$= a_x^2b_x^2\alpha_x^4\beta_x^4[2\alpha_x^2(ab\beta)^2 - 2a_x^2(\alpha b\beta)^2 - 2a_xb_x(a\alpha\beta)(\alpha b\beta)]\,.$$

Da

$$a_x^4 = 0,\quad \alpha_x^6 = D,\quad a_x^3(a\alpha\beta) = (f\alpha\beta),\quad b_x^3(\alpha b\beta) = (\alpha f\beta) = -(f\alpha\beta),$$

so ist

$$2a_x^2b_x^2\alpha_x^5\beta_x^5(ab\alpha)(ab\beta) = 2\,a_x^2b_x^2\beta_x^4(ab\beta)^2D + 2\,\alpha_x^4\beta_x^4(\alpha\beta f)^2\,.$$

Hesse's Resultat

$$2\,a_x^2b_x^2\alpha_x^5\beta_x^5(ab\alpha)(ab\beta) - 5\,a_x^2b_x^2\alpha_x^4(ab\alpha)^2D = 0$$

geht so über in

$$-3\,a_x^2b_x^2\beta_x^4(ab\beta)^2D + 2\,\alpha_x^4\beta_x^4(\alpha\beta f)^2 = 0\,.$$

Der 2^te Theil dieses Ausdrucks stimmt mit dem 2^ten Theile des für $(rsf)^2$ gefundenen Werthes überein; es bleibt noch übrig, den 1^ten Theil, d. i. $-3\,a_x^2b_x^2\beta_x^4(ab\beta)^2D$, umzuformen.

Um in $a_x^2b_x^2\beta_x^4(ab\beta)^2 = d_x^2e_x^2\beta_x^4(de\beta)^2$ die v einzuführen, benutze ich die beiden Gleichungen

$$5\,\beta_x^4\beta_y^2 = \quad a_xc_x^2b_y(abc)^2\,[a_xb_y + 4\,b_xa_y]\,,$$

$$c_x^2c_v^2\,(vxy)^2 = 2\,a_xc_x^2b_y(abc)^2\,[a_xb_y - b_xa_y]\,,$$

woraus folgt

$$10\,\beta_x^4\beta_y^2 - c_x^2c_v^2\,(vxy)^2 = 10\,(abc)^2c_x^2a_xb_xa_yb_y\,.$$

Ersetzt man y durch die Unterdeterminanten (de) und multiplicirt mit $d_x^2e_x^2$, so erhält man

$$10\,\beta_x^4(\beta de)^2d_x^2e_x^2 - 2\,d_x^2e_x^2c_x^2c_v^2\,[d_x^2e_v^2 - d_xe_ve_xd_v] =$$

$$= 10\,(abc)^2c_x^2d_x^2e_x^2a_xb_x\,(ade)\,(bde)\,.$$

Da

$$d_x^3d_v = f_v\,,\quad e_x^3e_v = f_v\,,\quad d_x^4 = 0\,,$$

so wird

$$10\,\beta_x^4(\beta de)^2d_x^2e_x^2 + 2f_v^2c_x^2c_v^2 = 10(abc)^2c_x^2d_x^2e_x^2a_xb_x(ade)(bde) = 10M.$$

Nach Aronhold, Cr. J. Bd. 55, S. 125 u. f. „Theorie der homogenen Functionen 3^ten Grades von 3 Veränderlichen", hat der Ausdruck

$$(abc)^2\,(ade)\,(bde)\,c_xd_xe_x$$

die Form

$$(\alpha de)^2\,\alpha_xd_xe_x = \frac{e_x^3}{6}\,(abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd).$$

Wendet man diese Operation auf die Form 4^ten Grades an, so erhält man für M den Werth

$$\tfrac{1}{6}\,a_xb_xc_xd_x\,(abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd)\,e_x^4 = 0\,,$$

weil

$$e_x^4 = f_x = 0.$$

Hiernach lautet die von Hesse gefundene Gleichung, wenn wir den aus der Gleichung

$$10\,\beta_x^4(\beta d e)^2 d_x^2 e_x^2 + 2 f_v^2 c_x^2 c_v^2 = 10\,M = 0$$

sich ergebenden Werth

$$\beta_x^4(\beta d e)^2 d_x^2 e_x^2 = \beta_x^4(a b \beta)^2 a_x^2 b_x^2 = -\tfrac{1}{5}\,c_x^2 c_v^2 f_v^2$$

eintragen,

$$2\,\alpha_x^4 \beta_x^4 (\alpha\beta f)^2 + \tfrac{3}{5}\,c_x^2 c_v^2 f_v^2 D = 0\,,$$

welches Resultat mit dem von mir erhaltenen Resultate übereinstimmt.

Salmon hat in phil. mag. for October 1858 eine Methode angegeben, die Doppeltangenten einer allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung zu finden. Diese Methode besteht im Wesentlichen in Folgendem:

Die Tangente einer planen Curve n^{ter} Ordnung trifft ausser im Berührungspunkte die Curve in noch $n-2$ Punkten. Bildet man nun eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch diese $n-2$ Schnittpunkte geht, und stellt die Bedingung dafür auf, dass die angegebene Tangente der Curve n^{ter} Ordnung auch noch diese Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung berührt, so erhält man unmittelbar eine Gleichung, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten befriedigt wird.

Um die Gleichung jener Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu erhalten, bilde man von der Curve n^{ter} Ordnung $a_x^n = 0$ die Polaren $a_x^{n-1} a_y$, $a_x^{n-2} a_y^2, \cdots$ allgemein $a_x^{n-h} a_y^h$, ferner von a_x^n, $a_x^{n-1} a_y, \cdots a_x^{n-h} a_y^h$ die Hesse'schen Formen $(abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}$, $(abc)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} a_y b_y c_y$, $\cdots\cdot\ (abc)^2 a_x^{n-2-h} b_x^{n-2-h} c_x^{n-2-h} a_y^h b_y^h c_y^h$, also

$$H_h = (abc)^2 a_x^{n-2-h} b_x^{n-2-h} c_x^{n-2-h} a_y^h b_y^h c_y^h = \varphi_{h,x}^{3n-3h-6}\,\psi_{h,y}^{3h} = \chi_{h,x}^{3(n-2)}\,.$$

Die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare von H_h ist

$$D^{n-2} H_h = \chi_{h,x}^{3(n-2)-(n-2)}\,\mu_{h,y}^{n-2} = \chi_{h,x}^{2(n-2)}\,\mu_{h,y}^{n-2}$$

Dieselbe ist in x vom Grade $2(n-2)$, in y vom Grade $n-2$.

Die gesuchte Curvengleichung $r_y^{n-2} = 0$ ist ebenfalls in y vom Grade $n-2$, kann also durch eine Reihe angegebener $(n-2)^{\text{ter}}$ Polaren mit noch zu bestimmenden Coefficienten ausgedrückt werden.

Für $n = 4$ ist

$$r_y^{n-2} = r_y^2 = D^2 H - 3 D^2 H_1 = (abc)^2 a_x c_x^2 b_y\,[a_x b_y + b_x a_y] = 0\,,$$

für $n = 5$ ist

$$\begin{aligned} r_y^{n-2} = r_y^3 &= D^3 H - 4 D^3 H_1 + 6 D^3 H_2 \\ &= (abc)^2 a_x^2 c_x^2 b_y\,[3\,a_x c_x b_y^2 + 6\,b_x c_x a_y b_y + b_x^2 a_y c_y]\,. \end{aligned}$$

Salmon hat hiernach einen Weg angezeigt, das Problem der Doppeltangenten allgemein zu lösen. Nur hat er noch nicht die

allgemeine in den Coefficienten und in x rationale Gleichung der Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung aufgestellt, auf welcher die nicht im Berührungspunkte sich befindenden $n-2$ Punkte liegen, die eine Curve n^{ter} Ordnung mit ihrer Tangente gemein hat.

Ganz den von Salmon gegebenen Gang verfolgend, hat Cayley in phil. trans. 1859 diese allgemeine Gleichung aufgestellt. Eleganter Weise hat Cayley Summen von Producten zu gewinnen gesucht, die nicht bloss, wie weiter unten hier, möglichst oft $M = a_x b_x c_x$ und $M_{y^3} = 6\, a_y b_y c_y$, sondern auch noch die Polaren

$$M_y = a_x b_x c_y + a_x c_x b_y + b_x c_x a_y\,, \quad M_{y^2} = 2(a_x b_y c_y + b_x c_y a_y + c_x a_y b_y)$$

als gemeinsame Factoren besitzen. Salmons Gedankengang ist ebenfalls in meiner Arbeit eingehalten. Die Form, von welcher Cayley ausgeht, stimmt mit der meinen überein. Die einzelnen Operationen der Cayley'schen Arbeit sind jedoch sehr complicirt und schwierig, so dass ich in meiner Arbeit eine andere Methode anwenden wollte. Cayley's Resultat ist selbstverständlich dasselbe, wie das meinige, unterscheidet sich aber wesentlich von ihm durch die Form. Während nämlich Cayley eine Reihe von Polaren aufstellt, treten statt derselben bei mir einfache symbolische Producte auf.

Wie oben angegeben, handelt es sich zunächst darum, eine in x und in den Coefficienten rationale Gleichung $r_y^{n-2} = 0$ für diejenige Curve zu finden, auf welcher die nicht im Berührungspunkte liegenden $n-2$ Schnittpunkte einer Tangente mit einer Curve n^{ter} Ordnung sich befinden.

Die gegebene Curve n^{ter} Ordnung sei $a_x^n = 0$. In irgend einem Punkte x derselben werde eine Tangente $a_x^{n-1} a_y = f_y = 0$ gezogen. Um das Product der Gleichungen der Schnittpunkte dieser Tangente mit der Curve zu finden, nehme man eine beliebige Gerade $u_y = 0$, welche im Punkte y die Gerade $f_y = 0$ schneiden möge. Der Schnittpunkt y beider Geraden soll ferner ein Punkt der Curve $a_y^n = 0$ sein. Es müssen also zusammen die 3 Gleichungen $u_y = 0$, $f_y = 0$, $a_y^n = 0$ bestehen. Trägt man in $a_y^n = 0$ die aus den beiden Gleichungen $u_y = 0$, $f_y = 0$ für y_1, y_2, y_3 sich ergebenden Unterdeterminanten (uf) ein, so erhält man $(auf)^n = 0$ als Bedingung dafür, dass die Gerade $y_y = 0$ die Gerade $f_y = 0$ auf der Curve $a_y^n = 0$ schneidet. $(auf)^n = 0$ ist also das Product der Gleichungen der Schnittpunkte von $f_y = 0$ mit $a_y^n = 0$.

Da $f_y = a_x^{n-1} a_y$, so hat man die Coordinaten der Tangente f_y, d. i. f_1, f_2, f_3 durch die ihnen gleichen symbolischen Ausdrücke $a_x^{n-1} a_1$, $a_x^{n-1} a_2$, $a_x^{n-1} a_3$ oder $b_x^{n-1} b_1$, $b_x^{n-1} b_2$, $b_x^{n-1} b_3$ etc., je nach Forderung der symbolischen Rechnung zu ersetzen.

x ist Berührungspunkt der Tangente; es fallen also zwei von den Schnittpunkten der Tangente $f_y = 0$ und der Curve $a_y^n = 0$ im Punkte x zusammen. Das Product $(auf)^n = 0$ der Gleichungen der Schnittpunkte von $f_y = 0$ mit $a_y^n = 0$ besitzt demnach den Factor u_x^2. Ich suche dasselbe so zu transformiren, dass dieser Factor hervortritt. Ausser dem Berührungspunkte x hat die Tangente $f_y = 0$ mit der Curve $a_y^n = 0$ noch $n - 2$ Punkte y gemein. Wenn man in $(auf)^n = 0$ den Factor u_x^2 abgesondert hat, so bleibt noch eine Gleichung $A = 0$ übrig. Man kann, wie wir sehen werden, die Umformung so vornehmen, dass A die Grössen $f_1, f_2, f_3, u_1, u_2, u_3$ nur in der Verbindung $u_1 f_2 - u_2 f_1$, $u_3 f_1 - u_1 f_3$, $u_1 f_2 - u_2 f_1$ enthält. Ist die Transformation in dieser Weise hergestellt, so hat A die Form $(ruf)^{n-2}$. Ersetzt man dann die aus u und f gebildeten Unterdeterminanten durch y_1, y_2, y_3, so erhält man die Form r_y^{n-2}, welche, $=0$ gesetzt, eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt. Diese Curve wird von der Linie f_y in Punkten geschnitten, bei welchen das Product der Gleichungen $(ruf)^{n-2} = 0$ ist, also in denselben Punkten, wie a_y^n.

Wir wollen zunächst den Ausdruck A finden, d. h. $(auf)^n$ in einer passenden Weise transformiren. Ich ersetze demgemäss in 1 Factor (auf) die Coordinaten der Tangente, d. i. f_1, f_2, f_3 durch die ihnen gleichen symbolischen Ausdrücke $b_x^{n-1} b_1$, $b_x^{n-1} b_2$, $b_x^{n-1} b_3$ und erhalte hierdurch

$$(auf)^n = (auf)^{n-1} b_x^{n-1} (aub) = p\,.$$

Vertauscht man hierin a mit b und addirt das durch diese Vertauschung sich ergebende Resultat zu p, so erhält man:

$$\begin{aligned}2p &= (aub)[b_x^{n-1}(auf)^{n-1} - a_x^{n-1}(buf)^{n-1}]\\ &= (aub)[b_x(auf) - a_x(buf)][b_x^{n-2}(auf)^{n-2} + b_x^{n-3}(auf)^{n-3} a_x(buf) + \cdots\\ &\qquad \cdots + a_x^{n-2}(buf)^{n-2}]\,.\end{aligned}$$

Benutzt man hierin die bekannte Identität

$$b_x(auf) = a_x(buf) + f_x(aub) + u_x(abf)\,,$$

welche, da x Berührungspunkt der Tangente f_y, also $f_x = 0$ ist, übergeht in

$$b_x(auf) = a_x(buf) + u_x(abf),$$

so bekommt man

$$\begin{aligned}2p = u_x(aub)(abf)\,[b_x^{n-2}(auf)^{n-2} &+ b_x^{n-3}(auf)^{n-3} a_x(buf) + \cdots\\ &\cdots + a_x^{n-2}(buf)^{n-2}]\,.\end{aligned}$$

Der erhaltene Ausdruck enthält u_x als Factor. Es handelt sich nun darum, einen weiteren Factor u_x abzusondern. Ich ersetze zu diesem Zwecke wieder in einem der symbolischen Factoren die Coor-

dinaten f_1, f_2, f_3 durch ihnen gleiche symbolische Ausdrücke, und zwar ersetze ich diessmal in (abf) die Coordinaten f_1, f_2, f_3 durch $c_x^{n-1}c_1$, $c_x^{n-1}c_2$, $c_x^{n-1}c_3$. Diese Coordinatenersetzung nehme ich in (abf) und nicht in (auf) oder (buf) vor, um im Resultate die gewünschten $n-2$ Factoren von der Form (auf) zu behalten.

Ersetzt man in (abf) die Coordinaten f_1, f_2, f_3 durch $c_x^{n-1}c_1$, $c_x^{n-1}c_2$, $c_x^{n-1}c_3$, so folgt

$$2p = u_x(abu)c_x^{n-1}(abc)[b_x^{n-2}(auf)^{n-2} + b_x^{n-3}(auf)^{n-3}a_x(buf) + \cdots$$
$$\cdots + a_x^{n-2}(buf)^{n-2}].$$

Ersetzt man die Unterdeterminanten (uf) durch die aus $u_y = 0$, $f_y = 0$ folgenden Werthe y_1, y_2, y_3, so ergiebt sich:

$$2p = u_x(aub)c_x^{n-1}(abc)[b_x^{n-2}a_y^{n-2} + b_x^{n-3}a_y^{n-3}a_x b_y + \cdots + a_x^{n-2}b_y^{n-2}].$$

In diesem Ausdrucke sind in jedem folgenden Gliede die Exponenten von b_x und a_y um 1 geringer, dagegen diejenigen von a_x und b_y um 1 höher, als in dem jedesmaligen vorhergehenden Gliede. Ferner haben in jedem Gliede die Exponenten von a_x und b_x die Summe $n-2$, ebenso die Exponenten von a_y und b_y die Summe $n-2$. Hiernach kann man $2p$ auf folgende Art ausdrücken:

$$2p = u_x(abc)(aub)c_x^{n-1} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2} a_x^{\lambda} b_x^{\varkappa} a_y^{\varkappa} b_y^{\lambda}.$$

Hierin ist nun noch ein weiterer Factor u_x abzusondern. Zu einem solchen Factor wird man durch passende Vertauschung der Buchstaben a, b, c und andere einfachen Operationen der symbolischen Rechnung gelangen. Bei der Vertauschung der Buchstaben a, b, c unter sich ändert sich der Ausdruck $a_x b_x c_x$, ebenso $a_y b_y c_y$ nicht. Ich werde möglichst viele Factoren $a_x b_x c_x$ und $a_y b_y c_y$ in $2p$ zu erlangen suchen, so dass, abgesehen von diesen Factoren, in $2p$ immer niederere Potenzen von x und y auftreten. Zu diesem Zwecke verringere ich in $2p$ die Exponenten derjenigen Grössen a_x, b_x, c_x, a_y, b_y, c_y, welche in höchster Potenz vorhanden sind, und vermehre die Exponenten der in geringerer Potenz vorkommenden Grössen.

Der Exponent von c_x^{n-1} ist grösser, als diejenigen von a_x und b_x; ferner treten a_y und b_y in höherer Potenz auf als c_y. Desshalb suche ich $2p$ so zu transformiren, dass Factoren $a_x b_x c_y$ gewonnen werden.

Allgemein sei

$$2p_\mu = a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu u_x(abc)(aub)c_x^{n-1-\mu} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^{\lambda} b_x^{\varkappa} a_y^{\varkappa} b_y^{\lambda}.$$

Wendet man hierin die bekannte Identität

$$c_x(aub) = a_x(cub) + u_x(acb) + b_x(auc)$$

an, so folgt:

$$2p_\mu = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} [u_x(acb) + a_x(cub) + b_x(auc)] \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

Der erste Theil (I) dieses Ausdrucks enthält den gewünschten Factor u_x^2.

$$(\mathrm{I}) = - u_x^2 a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc)^2 c_x^{n-2-\mu} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa a_y^\lambda .$$

Umzuformen ist nun noch der zweite Theil:

$$(\mathrm{II}) = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} a_x(cub) \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda$$

und der dritte Theil:

$$(\mathrm{III}) = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} b_x(auc) \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

(II) und (III) lassen sich zusammenziehen, wenn man in (II) das Glied für $\varkappa = 0$ und in (III) das Glied für $\lambda = 0$ ausscheidet. Nämlich in (II) hat das Glied für $\varkappa = 0$ den Werth

$$\delta_\mu = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} a_x(cub) a_x^{n-2-\mu} b_y^{n-2-\mu} .$$

Für $\lambda = 0$ in (III) ergiebt sich

$$\gamma_\mu = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} b_x(auc) b_x^{n-2-\mu} a_y^{n-2-\mu} .$$

Durch Vertauschung von a mit b geht δ_μ in γ_μ über, folglich $\delta_\mu = \gamma_\mu$.

Nach Ausscheidung von δ_μ enthält (II) bloss noch Glieder von $\varkappa = 1$ an. Alle diese Glieder enthalten dann den gemeinschaftlichen Factor $b_x a_y$. Setzt man denselben vor die Summe, so ist $\varkappa + \lambda$ nicht mehr $= n - 2 - \mu$, sondern $= n - 3 - \mu$ zu setzen.

Hiernach ist

$$(\mathrm{II}) = \delta_\mu + u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} a_x(cub) b_x a_y \sum_{\varkappa+\lambda=n-3-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda :$$

In (III) bleiben nach Ausscheidung von γ_μ bloss noch Glieder von $\lambda = 1$ an; alle diese Glieder enthalten den gemeinschaftlichen Factor $a_x b_y$, welchen ich vor die Summe setze. Statt $\varkappa + \lambda = n - 2 - \mu$ ist dann wieder zu schreiben $\varkappa + \lambda = n - 3 - \mu$, folglich

$$(\mathrm{III}) = \gamma_\mu + u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} b_x(auc) a_x b_y \sum_{\varkappa+\lambda=n-3-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda$$

also

$$(\mathrm{II}) + (\mathrm{III}) = 2\delta_\mu + u_x a_x^{\mu+1} b_x^{\mu+1} c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} [a_y(cub) + b_y(auc)] \sum_{\varkappa+\lambda=n-3-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

Nach bekannter Identität

$$a_y(cub) = c_y(aub) + u_y(cab) + b_y(cua)$$

ergiebt sich, da $u_y = (uuf) = 0$,

$$a_y(cub) = c_y(aub) + b_y(cua) = c_y(aub) - b_y(auc),$$

folglich:

$$\text{(II)} + \text{(III)} = 2\delta_\mu + u_x a_x^{\mu+1} b_x^{\mu+1} c_y^{\mu+1} (abc) c_x^{n-2-\mu} (aub) \sum_{\varkappa+\lambda=n-3-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

Dieser Ausdruck ist aber $= 2\delta_\mu + 2p_{\mu+1}$. Mithin ist:

$$2p_\mu = \text{(I)} + 2\delta_\mu + 2p_{\mu+1}.$$

$2p_{n-1}$ verschwindet, also:

$$2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} p_\mu = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \text{(I)} + 2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \delta_\mu + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=n-2} p_\mu$$

also:

$$2p = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \text{(I)} + 2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \delta_\mu .$$

Wie oben gefunden, ist:

$$\begin{aligned}
2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \delta_\mu &= 2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} a_x (cub) a_x^{n-2-\mu} b_y^{n-2-\mu} \\
&= 2u_x a_x^{n-1} (abc)(cub) \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} b_x^\mu c_x^{n-2-\mu} c_y^\mu b_y^{n-2-\mu} \\
&= 2u_x a_x^{n-1} (abc)(cub) \sum_{\varkappa+\lambda=n-2} b_x^\varkappa c_x^\lambda c_y^\varkappa b_y^\lambda .
\end{aligned}$$

Vertauscht man hierin a mit c so folgt:

$$2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \delta_\mu = -2u_x (abc)(aub) c_x^{n-1} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

Dieser Ausdruck

$$= -4p,$$

folglich:

$$2p = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \text{(I)} - 4p$$

$$\begin{aligned}
6p = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \text{(I)} &= \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \Big(-u_x^2 a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc)^2 c_x^{n-2-\mu} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda\Big) \\
&= -u_x^2 (abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu c_x^{n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda \\
&= -u_x^2 (abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} a_x^{\lambda+\mu} b_x^{\mu+\varkappa} c_x^{\varkappa+\lambda} a_y^\varkappa b_y^\lambda c_y^\mu .
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist, wenn man für die y ihre Werthe, nämlich die aus u und f gebildeten Determinanten einführt, das gesuchte Product der Gleichungen der Schnittpunkte der Tangente mit der Curve.

Der erhaltene Ausdruck enthält u_x^2 als Factor; dieser Factor drückt, wie oben erwähnt, aus, dass zwei von den Schnittpunkten der Tangente mit der Curve im Punkte x zusammenfallen, d. h. in x berührt die Tangente die Curve.

Ausser den beiden in x zusammenfallenden Schnittpunkten hat die Tangente $f_y = 0$ mit der Curve n^{ter} Ordnung noch $n-2$ Schnittpunkte y gemein. Der für $6p$ erhaltene Werth enthält ausser dem Factor $u_x{}^2$ noch den Ausdruck:

$$(abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} a_x^{\lambda+\mu}\, b_x^{\mu+\varkappa}\, c_x^{\varkappa+\lambda}\, a_y^{\varkappa}\, b_y^{\lambda}\, c_y^{\mu};$$

derselbe ist $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in y; ich bezeichne ihn mit r_y^{n-2}.

$r_y^{n-2} = 0$ stellt eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit den Variabeln y dar. Jedem Punkte x der Curve entspricht also eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $r_y^{n-2} = 0$, rational in den Coefficienten und in x, welche durch die $n-2$ nicht in x liegenden Schnittpunkte der Tangente mit der Curve geht.

Soll nun die Tangente $f_y = 0$ eine *Doppeltangente* der Curve n^{ter} Ordnung werden, so müssen ausser den beiden im Punkte x zusammenfallenden Schnittpunkten der Tangente mit der Curve noch zwei von den übrigen $n-2$ Schnittpunkten zusammenfallen. Ist diess der Fall, so berührt die Tangente nicht nur die Curve n^{ter} Ordnung, sondern auch die Curve $r_y^{n-2} = 0$, weil die nicht in x liegenden $n-2$ Schnittpunkte auf der Curve $r_y^{n-2} = 0$ liegen. Zur Bestimmung der Doppeltangenten der Curve n^{ter} Ordnung muss man also die Bedingung dafür aufstellen, dass die Tangente $f_y = 0$, welche die Curve im Punkte x berührt, auch die Curve $r_y^{n-2} = 0$ berührt.

Die Bedingung dafür, dass die Gerade $u_y = 0$ die Curve $r_y^{n-2} = 0$ berührt, ist die Gleichung der Curve $r_y^{n-2} = 0$ in Liniencoordinaten; diese Gleichung sei $\Theta = 0$.

Die Coefficienten in Θ sind ganze Functionen von den Coefficienten in r_y^{n-2} und zwar vom Grade $2n-6$. Nun ist

$$r_y^{n-2} = (abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} a_x^{\lambda+\mu}\, b_x^{\mu+\varkappa}\, c_x^{\varkappa+\lambda}\, a_y^{\varkappa}\, b_y^{\lambda}\, c_y^{\mu}$$

vom $(2n-4)^{\text{ten}}$ Grade in x; folglich sind die Coefficienten in Θ vom $(2n-6)(2n-4)^{\text{ten}}$ Grade in x.

Θ enthält u im $(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grade (weil von einem Punkte aus $(n-2)(n-3)$ Tangenten an eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gezogen werden können). In unserm speciellen Falle soll f_y Tangente der Curve $r_y^{n-2} = 0$ sein. Die Coordinaten u_1, u_2, u_3 sind desshalb durch f_1, f_2, f_3 zu ersetzen, wodurch man eine Gleichung $\Omega = 0$ erhält.

$\Omega = 0$ ist die Gleichung derjenigen Curve, auf welcher ein Punkt x liegen muss, damit seine Tangente Doppeltangente wird.

Ω enthält die Liniencoordinaten f_1, f_2, f_3 im $(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grade, und diese sind wieder vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in x. Mithin ist

$(n-1)(n-2)(n-3)$ der Grad in x, soweit er von den Grössen f_1, f_2, f_3 der Gleichung $\Omega = 0$ herrührt.

Demnach besitzt Ω den $(n-2)(n^2-9)^{\text{ten}}$ Grad in x, wovon die Coefficienten den Grad $2n-4$, ferner die Liniencoordinaten den $(n-1)(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grad als Beitrag liefern.

Die Schnittpunkte der gefundenen Curve $\Omega = 0$ mit der Curve $a_x^n = 0$ sind die *Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve* $a_x^n = 0$.

Es mag nun noch zum Schlusse die Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten der Curve $a_x^n = 0$ folgen. Die Curve $\Omega = 0$ hat $n(n-2)(n^2-9)$ Schnittpunkte mit der Curve $a_x^n = 0$ gemein. Jede Doppeltangente absorbirt zwei solcher Schnittpunkte x. Hiernach besitzt eine Curve n^{ter} Ordnung $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten.

Giessen, im September 1873.

Bemerkung über die Abbildung einer gewissen Fläche vierter Ordnung.

Von W. Frahm in Tübingen.

Ein interessantes Beispiel einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden liefert die Complexfläche vierter Ordnung und Classe, deren Herr Klein in einer Note (diese Ann. Bd. II) erwähnt hat. Einen andern bemerkenswerthen Fall bietet diese Fläche dar, wenn sie nur vier Knotenpunkte enthält, welche nicht in einer Ebene liegen. Dann sind auf derselben noch 36 Kegelschnitte und nur vier Paare gerader Linien vorhanden, aber ausser der Abbildung von Clebsch findet eine andere statt, bei der die Abbildungsfunctionen von der fünften Ordnung sind, bei der acht einfache, ein doppelter und ein dreifacher Fundamentalpunkt vorhanden sind, und welche vermittelt wird durch einen willkührlichen Kegelschnitt der Schaar nebst einem Büschel von Raumcurven dritter Ordnung auf der Fläche. Auf diese Abbildung wird man sofort geführt, indem man die Gleichung dieser Fläche aufsucht.

Drei Flächen zweiter Ordnung, welche die Doppelgerade und die vier Knotenpunkte enthalten, haben weitere Punkte nicht gemein. Zwei derselben, etwa φ, ψ, schneiden sich ausser in der Doppelgeraden a noch in einer Raumcurve dritter Ordnung C_3, welche a in zwei Punkten begegnet. Letztere Curve hat also 12 Punkte mit der Fläche (F_4) gemein, die beiden zuletzt erwähnten und die vier Knotenpunkte, welche aber alle doppelt zu rechnen sind. Jede Fläche $\varphi + \mu\psi$ enthält C_3 und schneidet offenbar noch eine weitere C_3' aus F_4 aus, welche ebenfalls die vier Knotenpunkte enthalten muss. Den Factor μ kann man (auf eine Weise) so bestimmen, dass C_3' durch einen beliebigen Punkt von F_4 geht. Lässt man nun diesen Punkt unendlich nahe an die Curve C_3 heranrücken, so fallen beim Uebergange zur Grenze beide Curven zusammen, oder $\varphi + \mu\psi \equiv \Phi$ berührt die Fläche F_4 längs einer Raumcurve dritter Ordnung; es muss also möglich sein, die Gleichung

$F_4 = 0$ mit Hülfe von $\Phi = 0$ in die Form eines vollständigen Quadrats zu bringen, oder es wird*)

$$F_4 = \Psi^2 - \Phi\Phi_0 .$$

Ist daher die Doppelgerade der Schnitt der Ebenen $p = 0$, $q = 0$, so enthalten die Flächen zweiter Ordnung Φ_0, Φ, Ψ alle die Gerade $p = 0$, $q = 0$ und es wird schliesslich F_4 von der Form

$$(1) \qquad F_4 = (pa + qa')(pb + qb') - (pc + qc')^2,$$

wo $p, q, a, a', b, b', c, c'$ lineare Functionen der Coordinaten $x_1 \cdots x_4$ sind.

Die Flächen zweiter Ordnung, welche längs der erwähnten Curven dritter Ordnung berühren, bilden die Schaar

$$(pa + qa') + 2\mu(pc + qc') + \mu^2(pb + qb') = 0,$$

wo μ einen veränderlichen Parameter bedeuten soll.

Auch die Regelfläche:

$$\Delta_4\Delta_4 \equiv 4(ab - c'^2)(a'b' - c'^2) - (ab' + a'b - 2cc'^2) = 0$$

berührt offenbar die Fläche F_4 und man beweist leicht, dass sie von den vier Ebenen durch je drei der Knotenpunkte längs eines Kegelschnitts berührt wird. Uebrigens ist die Classe unserer Fläche $= 8$.

Indem wir jetzt zur Abbildung der Fläche übergehen, nehmen wir als Fundamentaltetraeder der Coordinatenbestimmung dasjenige der vier Knotenpunkte und als Gleichungen der Doppelgeraden:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 0.$$

Die allgemeinste Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche diese und die Knotenpunkte enthält, ist dann:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(a_1p_1x_1+\cdots+a_4p_4x_4)-(p_1x_1+\cdots+p_4x_4)(a_1x_1+\cdots a_4x_4)$$
$$= \Sigma\Sigma\, x_ix_k(a_i - a_k)(p_i - p_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

$$= \begin{vmatrix} x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 1 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \binom{a}{p} = 0.$$

*) Sind u, v, w quadratische Ausdrücke in $x_1, x_2 \cdots x_4$, so kann offenbar jede Gleichung, welche in u, v, w homogen und quadratisch ist, in die Form gebracht werden: $\Psi^2 - \Phi\Phi_0 = 0$, wie man sofort sieht, indem man zunächst u, v, w

Mithin wird die Gleichung unserer Fläche F_4,

$$(2)\qquad \binom{a}{p}\binom{b}{p}-\binom{c}{p}^2=0\,,$$

welche sich ohne Weiteres in folgende drei zerlegen lässt

$$(2^a)\qquad \begin{cases} \Sigma p_i x_i + \lambda\,\Sigma x_i = 0\,, \\ \Sigma a_i p_i x_i + \lambda\,\Sigma a_i x_i + \mu(\Sigma c_i p_i x_i + \lambda\,\Sigma c_i x_i) = 0\,, \\ \Sigma c_i p_i x_i + \lambda\,\Sigma c_i x_i + \mu(\Sigma b_i p_i x_i + \lambda\,\Sigma b_i x_i) = 0\,, \end{cases}$$

oder:

$$\Sigma x_i\,(p_i+\lambda)=0\,,$$
$$\Sigma x_i\,(p_i+\lambda)\,(a_i+\mu\,c_i)=0\,,$$
$$\Sigma x_i\,(p_i+\lambda)\,(c_i+\mu\,b_i)=0\,,$$

Die Auflösung ergiebt

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = (p_2+\lambda)\,(p_3+\lambda)\,(p_4+\lambda)\,A_1\,, \\ \varrho x_2 = (p_1+\lambda)\,(p_3+\lambda)\,(p_4+\lambda)\,A_2\,, \\ \varrho x_3 = (p_1+\lambda)\,(p_2+\lambda)\,(p_4+\lambda)\,A_3\,, \\ \varrho x_4 = (p_1+\lambda)\,(p_2+\lambda)\,(p_3+\lambda)\,A_4\,, \end{cases}$$

wo die A die aus dem System

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1+\mu c_1 & a_2+\mu c_2 & a_3+\mu c_3 & a_4+\mu c_4 \\ c_1+\mu b_1 & c_2+\mu b_2 & c_3+\mu b_3 & c_4+\mu b_4 \end{Vmatrix}$$

mit Auslassung von je einer Vertikalreihe gebildeten Determinanten bedeuten. Diese Form zeigt, indem man $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ für λ, μ setzt, sofort das Vorhandensein eines dreifachen Fundamentalpunktes ($\lambda=0$, $\nu=0$) und einer doppelten ($\mu=0$, $\nu=0$), sowie acht einfacher, welche auf vier Geraden durch den dreifachen Fundamentalpunkt liegen. Diesen vier Geraden entsprechen auf der Fläche die vier Knotenpunkte, jedem Punkte einer solchen eine durch den entsprechenden Knotenpunkt gehende Richtung. Ebenso entspricht der Geraden $\nu=0$ auf der Fläche ein einzelner fester Punkt.

Die Gleichungen (2^a) beweisen, dass die Abbildung vermittelt wird durch die Schaar der oben erwähnten Raumcurven dritter Ordnung und einen Ebenenbüschel durch die Doppelgerade, dessen Ebenen jede Curve noch in einem Punkte schneiden.

Dem doppelten Fundamentalpunkte entspricht ein Kegelschnitt der durch die Ebenen des Büschels bestimmten Schaar, dem dreifachen

---

als Dreieckscoordinaten in der Ebene annimmt. (Cayley, Quarterly Journal Bd. X und XI.)

eine rationale Raumcurve von der mehrfach erwähnten Art, und der Punkt der Fläche, welcher der Geraden $\nu = 0$ entspricht, ist eben der beiden gemeinsame Punkt.

Die Geraden eines Paares liegen auf der Fläche in einer Ebene, welche durch die Doppelgerade und einen der vier Knotenpunkte geht, sie bilden sich ab als zwei einfache Fundamentalpunkte, welche mit dem dreifachen in einer Geraden liegen. Ausser den durch die 4×2 einfachen Fundamentalpunkte abgebildeten vier Paaren giebt es keine Geraden auf der Fläche. Acht Kegelschnitte liegen in den vier Ebenen des Tetraeders der Knotenpunkte; je zwei zusammengehörige werden abgebildet durch drei Gerade, welche den dreifachen Fundamentalpunkt mit sechs einfachen verbinden, und durch das Geradenpaar, welches das übrigbleibende Paar einfacher Fundamentalpunkte mit dem doppelten verbindet. Achtundzwanzig weitere Kegelschnitte liegen auf der Fläche, von denen je zwei sich zu einem ebenen Schnitte ergänzen. Ein solches Paar wird abgebildet durch zwei Kegelschnitte, deren jeder drei einfache Fundamentalpunkte, sowie den doppelten und den dreifachen enthält. Die Kegelschnittschaar wird abgebildet durch einen Strahlbüschel, dessen Centrum der dreifache Fundamentalpunkt ist. Die Discussion der übrigen Curven auf der Fläche möge übergangen werden. Die niedrigste Abbildung erhält man aus der erwähnten, indem man mittelst Cremona'scher Transformationen die Abbildungsfunctionen auf den vierten Grad reducirt. Als Transformationscurven werden Kegelschnitte angewendet, welche durch den doppelten, den dreifachen, und einen beliebigen der einfachen Fundamentalpunkte gehen.

Abbildung der Doppelgeraden. Ein Ebenenbüschel durch die Doppelgerade hat die Gleichung:

$$\Sigma p_i x_i + \theta \, \Sigma x_i = 0 \, .$$

Setzt man die Werthe von x_i in λ, μ, ν ein, so zerfällt das Resultat in den Factor: $\theta\lambda - \nu$ und in den anderen:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ (\nu p_1 + \lambda)(a_1 + \mu c_1) & (\nu p_2 + \lambda)(a_2 + \mu c_2) & (\nu p_3 + \lambda)(a_3 + \mu c_3) & (\nu p_4 + \lambda)(a_4 + \mu c_4) \\ (\nu p_1 + \lambda)(\nu a_1 + \mu c_1) & (\nu p_2 + \lambda)(\nu a_2 + \mu c_2) & (\nu p_3 + \lambda)(\nu a_3 + \mu c_3) & (\nu p_4 + \lambda)(\nu a_4 + \mu c_4) \end{vmatrix}$$

und dieser, gleich Null gesetzt, stellt die Abbildung der Doppelgeraden dar. Sie ist also eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten im doppelten und im dreifachen Fundamentalpunkte, welche durch die anderen acht Fundamentalpunkte je einmal hindurchgeht.

Mit Hülfe eines Kegelschnittbüschels kann man leicht beliebig viele solche Punktepaare der Abbildung auffinden, welche die einzelnen

Punkte der Doppelgeraden abbilden. Führt man die von der Abbildungscurve herrührenden elliptischen Integrale erster Gattung mit gehörig bestimmten unteren Grenzen ein, so hat man, wenn $b_1 \cdots b_8$ die Integrale für die einfachen b, b' beziehungsweise die Summen der beiden Integrale, welche den beiden Doppelpunkten zugehören und u, v die Integrale eines Punktepaares sind, die Gleichung

$$u + v + 3\,b + 2\,b' + b_1 + \cdots + b_8 = 5\,c\,,$$

weil das Paar u, v auf der Abbildung unendlich vieler ebener Schnitte liegt; aber

$$b_1 + b_2 + b = c\,; \quad b_3 + b_4 + b = c\,;$$
$$b_5 + b_6 + b = c\,; \quad b_7 + b_8 + b = c\,,$$

daher

$$b_1 + \cdots + b_8 = 4\,c - 4\,b\,,$$
$$u + v + 2\,b' - b = c\,,$$

ausserdem auch:

$$b + b' = c\,.$$

Bestimmt man nun irgend zwei Punkte mit den Argumenten u', v', welche der Gleichung

$$u' + v' = 2\,b' - b\,,$$

genügen, so ist:

$$u + v + u' + v' + b + b' = 2\,c\,.$$

Die letzte Gleichung aber sagt aus, dass u, v mit den Punkten u', v' und den Doppelpunkten auf einem Kegelschnitte liegen, alle Punktepaare sind mithin bestimmt durch den Schnitt der Abbildung mit dem Büschel der Kegelschnitte durch zwei Punkte u', v' und die Doppelpunkte.

Elmshorn, 18. Juli 1873.

Der Feuerbach'sche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreiecks.

Von H. Schröter zu Breslau.

Der schöne Satz der Elementargeometrie:

Die vier Kreise, welche die Seiten eines geradlinigen Dreiecks berühren, werden selbst von ein und demselben Kreise berührt, welcher durch die Mitten der Dreiecksseiten geht,

wurde von Feuerbach*) aus den berechneten Werthen der Radien und Mittelpunktsabstände jener beim Dreieck auftretenden Kreise geschlossen; Steiner erwähnt ihn an zwei Orten**), ohne ihn zu beweisen. Die in neuerer Zeit gegebenen Beweise des Satzes***) gehen meist aus algebraisch-trigonometrischen Rechnungen hervor, deren Complication zur Einfachheit des Resultates in Widerspruch steht. Auch der in den Baltzer'schen Elementen mitgetheilte geometrische Beweis von Casey stützt sich auf algebraische Umformungen und entbehrt trotz seiner scheinbaren Kürze wesentlich der Anschaulichkeit. Ein synthetischer Beweis ist kürzlich von Hrn. Lappe†) gegeben worden, der aus den Gesetzen der Kreisberührung hervorgeht. Trotz seiner Einfachheit lässt er doch die eigentliche Natur der vollständigen hiebei in Betracht kommenden Figur nicht in dem Maasse hervortreten, dass der Feuerbach'sche Satz als eine natürliche Folge der Eigenschaften der Figur erschiene, indem z. B. die Berührungspunkte jener Kreise nicht zum Vorschein kommen. Einer solchen Forderung entspricht mehr die von Hrn. C. W. Baur††) ohne Beweis gegebene Construction der gemeinschaftlichen Tangenten jener sich berührenden Kreise; aber ein von Hrn. Schubert†††) hinzugefügter Beweis der-

*) K. W. Feuerbach: Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, Nürnberg 1822, S. 38.

**) Annales de mathématiques p. J. D. Gergonne t. XIX. p. 86 und: „Die geometrischen Constructionen etc. von J. Steiner, Berlin 1833, S. 55.

***) Vgl. Baltzer's Elemente der Mathematik Bd. II., S. 92 und S. 312.

†) Borchardt's Journal Bd. 71, S. 387.

††) Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. Jahrgang XII., S. 354.

†††) Dieselbe Zeitschrift, Jahrg. XVI., S. 83.

selben erfordert wiederum einen unverhältnissmässigen Aufwand von Rechnung.

Einen aus einer allgemeineren Auffassung des Satzes hervorgehenden Beweis im Zusammenhange mit der Erweiterung derjenigen Eigenschaften des Dreiecks, welche sich auf die sogenannten merkwürdigen Punkte desselben beziehen, habe ich an einem andern Orte*) gegeben; doch ist derselbe nicht ganz elementarer Natur; er setzt vielmehr die Kenntniss der Theorie der Kegelschnitte voraus.

Der in den folgenden Blättern enthaltene Beweis unterwirft die vollständige Figur der vier Berührungskreise eines Dreiecks einer näheren Untersuchung, wobei einige bisher nicht bemerkte Eigenschaften derselben zum Vorschein kommen und führt den Feuerbach'schen Satz auf den Satz von Ptolemäus zurück, jene bekannte Eigenschaft des Kreisvierecks oder Bedingung dafür, dass vier Punkte auf einem Kreise liegen. Insofern diese algebraischer Natur ist, ist es allerdings auch unser Beweis des Feuerbach'schen Satzes. Alle übrigen Lagen- und Grössen-Verhältnisse ergeben sich aber in ungezwungener Weise aus unmittelbarer Anschauung der Figur und führen mit einer gewissen naturgemässen Nothwendigkeit zu dem Feuerbach'schen Satze. Eine weitere Betrachtung der interessanten Figur eröffnet dem Liebhaber elementar-geometrischer Forschung ein empfehlenswerthes Feld für dieselbe und verspricht noch manches neue Resultat.

---

1. Einem ebenen Dreieck ABC, dessen Seiten

$$BC = a \quad CA = b \quad AB = c$$

bezeichnet werden (siehe die Figur**)) lassen sich vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ einschreiben, welche die Dreiecksseiten berühren; der eine m liegt innerhalb des Dreiecks, die drei andern $m_1 m_2 m_3$ ausserhalb desselben und jeder der letzteren berührt nur eine Dreiecksseite zwischen den Ecken, die beiden andern in ihren Verlängerungen, nämlich:

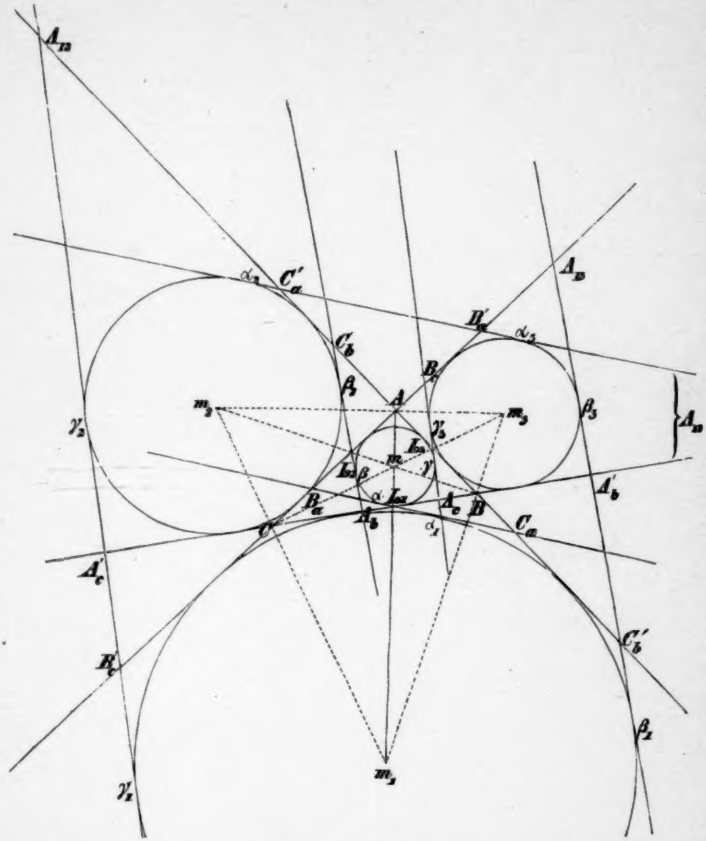
m_1 berührt die Seite a zwischen den Ecken des Dreiecks
m_2 " " " b " " " " "
m_3 " " " c " " " " " .

Fassen wir die vollständige Figur dieser vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ in's Auge, so lassen sich dieselben in 6 Paare je zweier ordnen; jedes

*) Borchardt's Journal Bd. 68. S. 208.

**) Die Figur enthält nicht alle im Texte eingeführten Buchstaben; die fehlenden sind absichtlich weggelassen, um die Auffassung der Figur zu erleichtern und können ohne Mühe vom Leser hinzugedacht werden.

Paar hat die drei Seiten des Dreiecks zu drei gemeinschaftlichen Tangenten, mithin noch eine *vierte* gemeinschaftliche Tangente. Diese 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten treten dreimal als äussere, dreimal als innere auf und laufen dreimal paarweise (je eine äussere



mit einer inneren) parallel. Denn die vier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise bilden allemal ein symmetrisches Vierseit mit paarweise gleichen Seiten; nun sind die Dreiecksseiten b und c

äussere gem. Tang. für das Kreispaar m und m_1

innere „ „ „ „ „ m_2 „ m_3.

Die dritte Dreiecksseite a dagegen ist

innere gem. Tang. für das Kreispaar m und m_1

äussere „ „ „ „ „ m_2 „ m_3,

folglich schneidet die vierte (innere) gemeinschaftliche Tangente für das Kreispaar m und m_1 die Stücke b und c auf den Dreiecksseiten AC und AB verwechselt ab und ebenso die vierte (äussere) gemeinschaftliche Tangente des Kreispaares m_2 und m_3 nach entgegengesetzter Richtung hin; folglich läuft die letztere mit der ersteren parallel; es laufen also parallel:

vierte (innere) gem. Tang. d. Kreispaars:		vierte (äussere) gem. Tang. d. Kreispaars:
$m\,m_1$	und	$m_2\,m_3$
$m\,m_2$	„	$m_3\,m_1$
$m\,m_3$	„	$m_1\,m_2$.

Es ist auch leicht zu sehen, *welchen* drei Richtungen diese drei Tangentenpaare parallel laufen; denkt man sich die Höhen in dem Dreieck ABC gezogen und merkt die Fusspunkte derselben, so sind die Abschnitte auf zwei in einer Ecke zusammenstossenden Dreiecksseiten von dieser Ecke bis zu den Höhenfusspunkten hin verwechselt den Seiten proportional gerade so, wie die von jenen zwei parallelen Tangenten gebildeten Abschnitte verwechselt die Seiten selbst sind; folglich laufen die obigen drei Tangentenpaare parallel den Seiten des Höhenfusspunkts-Dreiecks und wir haben folgenden Satz:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente, welche dreimal als äussere, dreimal als innere gemeinschaftliche Tangente auftritt; diese 6 Geraden laufen dreimal paarweise parallel mit den Seiten desjenigen Dreiecks, welches von den Höhenfusspunkten des ursprünglichen gebildet wird und zwar sind jedesmal eine äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente parallel.

2. Von nicht geringerem Interesse, als die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Kreise unseres Kreisquadrupels sind die *Berührungspunkte* derselben; diese zerfallen in zwei Gruppen: 1) die Berührungspunkte der Kreise mit den ursprünglichen Dreiecksseiten (und deren Verlängerungen); 2) die Berührungspunkte der neuen 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten; zu jeder der beiden Gruppen gehören 12 Punkte und diese zweimal 12 Punkte ordnen sich zu Paaren in folgender Art:

Die Dreiecksseite BC oder a werde berührt von den vier Kreisen

$$m\,m_1\,m_2\,m_3$$

beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3;$$

die Dreiecksseite CA oder b beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\,;$$

die Dreiecksseite AB oder c beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_2\ ^{*}).$$

---

*) Diese 12 Berührungspunkte bieten auch an sich eigenthümliche Lagenverhältnisse dar, welche wir, da sie zu dem eigentlichen Zweck, den wir im Auge haben, nicht nothwendig erörtert zu werden brauchen, nur kurz angeben wollen. Diese 12 Berührungspunkte bilden vier den Berührungskreisen einbeschriebene Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_3\,, \end{array}$$

deren Seiten einander durchschneiden in 54 Punkten, welche sich in gewisse Gruppen vertheilen:

Die vier Geraden:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3$$

bilden ein Rechteck, dessen Seiten parallel laufen den beiden Halbirungslinien des Winkels C und dessen Ecken einerseits auf einem Kreise liegen, welcher AB zum Durchmesser hat und anderseits auf den beiden Paaren von Halbirungsstrahlen der Dreieckswinkel A und B.

In ganz gleicher Weise bilden die vier Geraden:

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3$$

ein zweites Rechteck und

$$\mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3$$

ein drittes Rechteck, dessen Ecken in gleicher Weise, wie oben angegeben, gelegen sind.

Die 12 Ecken dieser drei Rechtecke erscheinen in anderer Weise gepaart als Grenzpunkte (Nullkreise) *der sechs Kreisschaaren, welche durch je zwei der vier Berührungskreise bestimmt werden.* (Zwei Kreise haben bekanntlich ein gemeinschaftliches Tripel conjugirter Punkte, von denen einer immer im Unendlichen, die beiden andern auf der Verbinaungslinie der Mittelpunkte liegen und diejenigen beiden ausgezeichneten Punkte sind, welche Grenzpunkte oder Nullkreise heissen und durch welche alle die beiden gegebenen rechtwinklig schneidenden Kreise hindurchgehen.) Da sich die vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ in sechs Paare ordnen lassen und jedes Paar zwei Grenzpunkte liefert, so erhalten wir 12 solcher Punkte, welche die Ecken der obigen drei Rechtecke sind.

Rechnen wir noch die 6 unendlich-entfernten Schnittpunkte der Seiten dieser Rechtecke hinzu, so haben wir in dieser ersten Gruppe 18 Punkte von den im Ganzen oben angegebenen 54 Punkten.

Eine zweite Gruppe bilden die folgenden zwölf Schnittpunkte, welche in vier Quadrupel zerfallen.

Die vier Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1) \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1) \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3) \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3)$$

liegen auf der durch A gehenden Höhe des Dreiecks ABC. Die vier Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2) \quad (\mathfrak{b}\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2) \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_3) \quad (\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1)$$

liegen auf der durch B gehenden Höhe des Dreiecks ABC und endlich liegen die vier Schnittpunkte:

Die beiden Kreise m und m_1 haben nun zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten, welche in den Punkten $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ und eine innere gemeinschaftliche Tangente, welche in den Punkten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}_1$ berührt; die vierte innere gemeinschaftliche Tangente wird daher den Kreis m in einem Punkte α und den Kreis m_1 in einem Punkte α_1 berühren, so dass $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{a}_1$ und α_1 symmetrisch liegende Punkte sind. Die 12 Berührungspunkte der 6 neuen gemeinschaftlichen Tangenten ordnen sich in solcher Art für

die Kreispaare		Berührungspunkte
$m\ m_1$	....	$\alpha\ \alpha_1$
$m\ m_2$	....	$\beta\ \beta_2$
$m\ m_3$	....	$\gamma\ \gamma_3$
$m_2\ m_3$	....	$\alpha_2\ \alpha_3$
$m_3\ m_1$	....	$\beta_3\ \beta_1$
$m_1\ m_2$	....	$\gamma_1\ \gamma_2$

und zu jedem deutschen Berührungspunkte wird ein bestimmter (symmetrisch liegender) griechischer mit gleichem Index, d. h. auf demselben Kreise zugehören.

Hiernach haben wir auf dem

Kreise	m	drei	neue	Berührungspunkte	$\alpha\ \beta\ \gamma$
„	m_1	„	„	„	$\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$
„	m_2	„	„	„	$\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$
„	m_3	„	„	„	$\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$

oder in jedem der vier Kreise ein neues Dreieck, gebildet von diesen Berührungspunkten. Die Lage dieser vier neuen Dreiecke zu dem ursprünglichen Dreieck ABC ist eine sehr einfache; sie sind nämlich sämmtlich mit demselben *ähnlich und ähnlich-liegend.*

In der That die Dreiecksseiten AB und AC sind gleichartige gemeinschaftliche Tangentenpaare (d. h. beide äussere oder beide innere) nur für zwei Kreispaare, nämlich für

$$m\,m_1 \text{ und } m_2\,m_3.$$

Dagegen für die übrigen vier Kreispaare ungleichartige gemeinschaftliche Tangentenpaare und ein solches ungleichartiges Tangentenpaar bildet allemal dieselben Winkel miteinander, wie die beiden übrig-

---

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{a},\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_3)\quad (\mathfrak{c}\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3)\quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_2)\quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2)$$

auf der durch C gehenden Höhe des Dreiecks ABC.

Die übrigen 24 Durchschnittspunkte, welche noch von den oben angegebenen 54 Punkten übrig bleiben, scheinen kein so einfaches Gesetz hinsichtlich ihrer Lage erkennen zu lassen.

bleibenden gemeinschaftlichen Tangenten, die natürlich auch ungleichartig sind; folglich bildet die dritte Dreiecksseite BC mit den vier Tangenten:

$$\begin{array}{l} \beta\ \beta_2 \\ \gamma\ \gamma_3 \\ \beta_3\ \beta_1 \\ \gamma_1\ \gamma_2, \end{array}$$

von denen je zwei einander parallel sind, gleiche Winkel (A). Da aber am Kreise m die Tangente BC gleiche Winkel bildet mit den Tangenten in β und γ, so läuft $\beta\gamma$ parallel BC und der Berührungspunkt $\mathfrak{a}$ ist die Mitte des Bogens $\beta\gamma$; ebenso läuft $\gamma\alpha$ parallel CA u. s. f. $\beta_1\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$, $\beta_3\gamma_3$ parallel BC etc.

Wir haben also folgenden Satz:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente, welche in je zwei Punkten die Kreise berührt; von den dadurch erhaltenen 12 Berührungspunkten liegen auf jedem der vier Kreise drei und bilden je ein Dreieck, welches mit dem ursprünglichen ähnlich und ähnlichliegend ist.

Ferner haben wir die Lage der deutschen Berührungspunkte zu den griechischen als eine solche erkannt, dass auf dem Kreise m

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{a} & \text{gleich weit absteht von} & \beta & \text{und} & \gamma \\ \mathfrak{b} & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & \gamma & \text{„} & \alpha \\ \mathfrak{c} & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & \alpha & \text{„} & \beta \end{array}$$

und ebenso auf den drei übrigen Kreisen, z. B. auf dem Kreise m_1

$\mathfrak{a}_1$ gleich weit ab von β_1 und γ_1 u. s. f.

In Bezug auf die perspectivisch-ähnliche Lage der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ mit dem ursprünglichen Dreieck ABC bemerken wir noch (was aus der Lage der Kreise $m m_1 m_2 m_3$ zum Dreieck ABC folgt), dass die Dreieckspaare:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 & \text{und} & ABC \\ \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2 & \text{„} & ABC \\ \alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3 & \text{„} & ABC \end{array}$$

in directer Lage, dagegen

$$\alpha\,\beta\,\gamma \quad \text{und} \quad ABC$$

in inverser Lage ähnlich-liegend sich befinden; fassen wir dagegen die Mitten der Seiten des ursprünglichen Dreiecks auf:

$$\begin{array}{ll} A_1 & \text{die Mitte von } BC \\ B_1 & \text{„ \quad „ \quad „ } CA \\ C_1 & \text{„ \quad „ \quad „ } AB \end{array}$$

so bilden $A_1 B_1 C_1$ ein neues, ebenfalls dem ursprünglichen ähnliches und ähnlich-liegendes Dreieck, aber in inverser Lage; daher werden umgekehrt die Dreieckspaare:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\beta_1\gamma_1 & \text{und} & A_1 B_1 C_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 & ,, & A_1 B_1 C_1 \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 & ,, & A_1 B_1 C_1 \end{array}$$

in inverser Lage, dagegen

$$\alpha\beta\gamma \quad \text{und} \quad A_1 B_1 C_1$$

in directer Lage ähnlich-liegend sich befinden. Wir wollen die perspectivischen Centra dieser letzteren Dreieckspaare durch $T\,T_1\,T_2\,T_3$ bezeichnen, d. h.

$$\begin{array}{llll} \alpha A_1 & \beta B_1 & \gamma C_1 & \text{treffen sich in } T \\ \alpha_1 A_1 & \beta_1 B_1 & \gamma_1 C_1 & ,,\quad ,,\quad ,,\ T_1 \\ \alpha_2 A_1 & \beta_2 B_1 & \gamma_2 C_1 & ,,\quad ,,\quad ,,\ T_2 \\ \alpha_3 A_1 & \beta_3 B_1 & \gamma_3 C_1 & ,,\quad ,,\quad ,,\ T_3 \end{array}$$

und wir werden später (5) die nahe Beziehung erkennen, in welcher diese vier Punkte $T\,T_1\,T_2\,T_3$ zum Feuerbach'schen Satze stehen.

3. Untersuchen wir jetzt die Lage, welche die 6 neuen vierten gemeinschaftlichen Tangenten zu den drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks einnehmen. Hiezu müssen wir die *Schnittpunkte* jener Geraden mit diesen in zweckmässiger Weise bezeichnen. Von den $6 \cdot 3 = 18$ Schnittpunkten, in welchen die 6 neuen Geraden von den drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks getroffen werden, sondern sich sofort 6 ab, welche Aehnlichkeitspunkte der 6 Kreispaare sind, während die übrigen 12 Schnittpunkte nicht Aehnlichkeitspunkte sind. Die Lage der ersteren 6 Aehnlichkeitspunkte ist folgende: Sie zerfallen in drei äussere und drei innere:

$$\begin{array}{llllll} A_{23} & \text{äusserer} & \text{Aehnlichkeitspunkt} & \text{des} & \text{Kreispaars} & m_2\,m_3 \\ A_{31} & ,, & ,, & ,, & ,, & m_3\,m_1 \\ A_{12} & ,, & ,, & ,, & ,, & m_1\,m_2 \\ J_{01} & \text{innerer} & \text{Aehnlichkeitspunkt} & \text{des} & \text{Kreispaars} & m\,m_1 \\ J_{02} & ,, & ,, & ,, & ,, & m\,m_2 \\ J_{03} & ,, & ,, & ,, & ,, & m\,m_3\,. \end{array}$$

Nun liegen nach bekannten Sätzen der Kreistheorie:

$$\begin{array}{llll} A_{12}\,A_{13}\,A_{23} & \text{in} & \text{einer} & \text{Geraden} \\ J_{01}\,J_{02}\,A_{12} & ,, & ,, & ,, \\ J_{02}\,J_{03}\,A_{23} & ,, & ,, & ,, \\ J_{03}\,J_{01}\,A_{31} & ,, & ,, & ,, \end{array}$$

folglich lässt sich der Satz aussprechen:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei eine Dreiecksecke zum Aehnlichkeitspunkt, also ausserdem noch einen zweiten Aehnlichkeitspunkt. Diese 6 neuen Aehnlichkeitspunkte zerfallen in drei äussere und drei innere und liegen zu je dreien auf vier geraden Linien, indem einmal die drei äusseren und dreimal ein äusserer mit zwei inneren Aehnlichkeitspunkten auf je einer Geraden liegt.

Es bleiben uns die übrigen 12 Schnittpunkte zu betrachten; diese erscheinen paarweise mit einer Dreiecksecke zusammengenommen als die Ecken von 6 neuen Dreiecken, welche mit dem ursprünglichen congruent sind und jedesmal eine Ecke und die in derselben zusammenstossenden zwei Seiten gemeinschaftlich haben, aber verwechselt und nach beiderlei entgegengesetzten Richtungen hin abgetragen. Die Dreiecksseite BC wird nun von den 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten in 6 Punkten getroffen, von denen zwei (J_{01} und A_{23}) als Aehnlichkeitspunkte bereits abgesondert sind; diese bilden ein Paar, indem überhaupt die sechs Schnittpunkte in drei Paare zerfallen nach den drei Paaren von Parallelen, in welche die sechs vierten gemeinschaftlichen Tangenten zerfallen; das eine Paar besteht also aus zwei Aehnlichkeitspunkten; die beiden übrigen Paare von Punkten, in welchen BC getroffen wird, erhalten wir durch die

die vierte (innere) gem. Tang. des Kreispaars $m\,m_2$	und	die vierte (äussere) gem. Tang. des Kreispaars $m_1\,m_3$

wir bezeichnen diese Schnittpunkte beziehlich durch

$$A_b \text{ und } A_b'$$

und zweitens durch

die vierte (innere) gem. Tang. des Kreispaars $m\,m_3$	und	die vierte (äussere) gem. Tang. des Kreispaars $m_1\,m_2$;

wir bezeichnen diese Schnittpunkte beziehlich durch

$$A_c \text{ und } A_c',$$

so dass wir also auf der Geraden BC die vier Schnittpunkte:

$$A_b A_b' A_c A_c'$$

haben, wobei die ungestrichenen auf eine innere, die gestrichenen auf eine äussere vierte gemeinschaftliche Tangente sich beziehen.

In gleicher Weise haben wir auf der Geraden CA die vier Schnittpunkte:

$$B_c B_c' B_a B_a'$$

und auf der Geraden AB die vier Schnittpunkte:

$$C_a C_a' C_b C_b' .$$

Diese zwölf Punkte gruppiren sich nun in folgender Weise zu den oben genannten 6 einander congruenten Dreiecken:

$$ABC$$

$$AB_a C_a \qquad A_b BC_b \qquad A_c B_c C$$

$$AB_a' C_a' \qquad A_b' BC_b' \qquad A_c' B_c' C.$$

Aus der Lage dieser Dreiecke zu einander erkennen wir unmittelbar, wie sich die Abstände der neuen Punkte von einander durch die Dreiecksseiten abc ausdrücken, nämlich:

$$a+b+c = A_b' A_c' = B_c' B_a' = C_a' C_b'$$

$$a+b-c = A_b A_c' = B_c' B_a = C_a C_b$$

$$a+c-b = A_b' A_c = B_c B_a = C_a C_b'$$

$$b+c-a = A_b A_c = B_c B_a' = C_a' C_b.$$

Die Mitten dieser 12 Strecken sind die 12 deutschen Berührungspunkte (2) *).

4. Die oben betrachteten 6 Aehnlichkeitspunkte

$$A_{12}\, A_{23}\, A_{31}\, J_{01}\, J_{02}\, J_{03},$$

welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, sind nichts anderes, als die Schnittpunkte der drei Paare von Halbirungsstrahlen der Winkel und Nebenwinkel des ursprünglichen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten desselben; da sich bekanntlich die Abschnitte auf den Seiten, welche durch die Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks gebildet werden, verhalten wie die anliegenden Seiten selbst,

---

*) In gleicher Weise wie die gemeinschaftlichen Tangenten können wir auch die *Potenzlinien* der sechs Kreispaare unseres Quadrupels von Berührungskreisen aufsuchen und erkennen dann ein theilweise schon von Hrn. J. Lappe (a. a. O.) bemerktes Resultat, welches aber für den Feuerbach'schen Satz hier nicht verwerthet wird:

Die vier Mittelpunkte $m m_1 m_2 m_3$ bilden ein besonderes vollständiges Viereck, welches man passend ein *gleichseitig-hyperbolisches Viereck* nennen kann, nämlich eine solche Gruppe von vier Punkten, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist und welche bekanntlich die Grundpunkte eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln bilden. Das Diagonaldreieck dieses vollständigen Vierecks ist das ursprüngliche Dreieck ABC.

Die sechs Potenzlinien der Kreispaare unseres Quadrupels von Berührungskreisen schneiden sich zu je dreien in vier Punkten (Potenzpunkten), welche ebenfalls ein gleichseitig-hyperbolisches vollständiges Viereck bilden. Das Diagonaldreieck desselben wird gebildet von den Mitten $A_1 B_1 C_1$ der Seiten des ursprünglichen Dreiecks.

Die beiden, einerseits von den Mittelpunkten $m m_1 m_2 m_3$ und andererseits von den Potenzpunkten gebildeten gleichseitig-hyperbolischen Vierecke sind ähnlich und ähnlich-liegend; sie haben den Schwerpunkt des Dreiecks ABC zu ihrem perspectivischen Centrum, befinden sich in inverse-ähnlicher Lage und verhalten sich in ihren linearen Dimensionen $= 1:2$.

so folgen unmittelbar die Werthe der Abstände unserer Aehnlichkeitspunkte von den Ecken des Dreiecks.

Nehmen wir das Dreieck allgemein als ein ungleichseitiges an und bezeichnen die Seiten nach der Grösse, so dass

$$a > b > c$$

ist, so ergeben sich folgende Werthe:

$$AJ_{03} = \frac{bc}{a+b}; \quad BJ_{01} = \frac{ca}{b+c}; \quad CJ_{02} = \frac{ab}{c+a}$$

$$BJ_{03} = \frac{ac}{a+b}; \quad CJ_{01} = \frac{ba}{b+c}; \quad AJ_{02} = \frac{cb}{c+a}$$

$$AA_{12} = \frac{bc}{a-b}; \quad BA_{23} = \frac{ca}{b-c}; \quad CA_{13} = \frac{ab}{a-c}$$

$$BA_{12} = \frac{ac}{a-b}; \quad CA_{23} = \frac{ba}{b-c}; \quad AA_{13} = \frac{cb}{a-c}.$$

Es liegen nun die drei Punkte

$$J_{01}\ J_{02}\ A_{12}$$

in einer Geraden und es verhalten sich

$$\frac{CJ_{01}}{CJ_{02}} = \frac{a+c}{b+c} = \frac{CA_b'}{CB_a'},$$

folglich wird die Verbindungslinie $A_b' B_a'$ mit dieser Aehnlichkeitslinie $J_{01} J_{02}$ parallel laufen; ebenso verhalten sich

$$\frac{BJ_{01}}{BA_{12}} = \frac{a-b}{b+c} = \frac{BA_c}{BC_a'},$$

folglich ist auch die Verbindungslinie $A_c C_a'$ mit derselben Aehnlichkeitslinie $J_{01} A_{12}$ parallel, und endlich verhalten sich

$$\frac{AJ_{02}}{AA_{12}} = \frac{a-b}{a+c} = \frac{AB_c}{AC_b},$$

folglich läuft auch die dritte Verbindungslinie $B_c C_b'$ mit der Aehnlichkeitslinie $J_{02} A_{12}$ parallel; also laufen die drei Verbindungslinien

(1) $\qquad A_b' B_a' \qquad A_c C_a' \qquad B_c C_b'$

mit einander und mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{01}\ J_{02}\ A_{12}$$

parallel; in ganz derselben Weise erkennen wir, dass die Verbindungslinien

(2) $\qquad B_c' C_b' \qquad B_a A_b' \qquad C_a A_c'$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{02}\ J_{03}\ A_{23}$$

und die Linien

(3) $\qquad C_a' A_c' \qquad C_b B_c' \qquad A_b B_a'$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{03}\ J_{01}\ A_{31}$$

endlich die Linien

(4) $A_b B_a \qquad A_c C_a \qquad B_c C_b$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$A_{12} A_{13} A_{23}$$

parallel laufen; demgemäss lässt sich folgender Satz aussprechen:

Die zwölf Schnittpunkte:

$$A_b A_b' \; A_c A_c' \; B_c B_c' \; B_a B_a' \; C_a C_a' \; C_b C_b'$$

liegen viermal paarweise auf je drei Parallelstrahlen, welche selbst zu den Seiten desjenigen vollständigen Vierseits parallel laufen, dessen Ecken die sechs Aehnlichkeitspunkte

$$A_{12} A_{23} A_{31} J_{01} J_{02} J_{03}$$

sind.

Sehr einfacher Art ist auch das Verhältniss, in welchem die Längen dieser je drei parallelen Strecken zu einander stehen; da nämlich BB_a' und CC_a' parallel laufen und sich wie $c : b$ verhalten, da ferner BA_b' und CA_c gleich gerichtet sind und ebenfalls sich wie $c : b$ verhalten, so ist nicht nur $B_a' A_b'$ mit $C_a' A_c$ parallel, sondern sie verhalten sich auch wie $c : b$; dasselbe Raisonnement gilt für alle übrigen Paare unserer parallelen Strecken und wir erhalten daher folgende Verhältnisse:

$$\begin{aligned}
B_c' C_b' &: C_a A_c' : A_b' B_a = a : b : c \\
B_c' C_b \; &: C_a' A_c' : A_b B_a' = a : b : c \\
B_c C_b' &: C_a' A_c \; : A_b' B_a' = a : b : c \\
B_c C_b' &: C_a A_c \; : A_b B_a = a : b : c,
\end{aligned}$$

d. h.: *Bei jedem der vier Tripel von je drei parallelen Strecken zwischen den obigen zwölf Schnittpunkten verhalten sich die Längen solcher drei parallelen Strecken zu einander wie die Seiten des ursprünglichen Dreiecks.*

5. Fassen wir eines von diesen vier Tripeln je dreier paralleler Strecken näher ins Auge, z. B.

$$B_c' C_b' \quad C_a A_c' \quad A_b' B_a,$$

und bemerken, dass der Berührungspunkt $\mathfrak{c}_1$ die Mitte ist zwischen den Punkten C_b' und C_a (3), so wird eine durch $\mathfrak{c}_1$ zu der Richtung der drei Parallelen gezogene neue Parallele auch die Strecke $A_c' B_c'$ halbiren müssen. Aus der symmetrischen Lage der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise m_1 und m_2 geht aber hervor, dass diese neue Parallele gleich ist und symmetrisch liegt mit der Verbindungslinie des Berührungspunktes γ_1 und des Mittelpunktes C_1 der Dreiecksseite AB; folglich haben wir die Verhältnisse:

$$\frac{\gamma_1 C_1}{B_c' C_b'} = \frac{a+b}{2a} \text{ und ebenso } \frac{\beta_1 B_1}{B_c' C_b'} = \frac{a+c}{2a},$$

oder auch

$$\frac{\gamma_1 C_1}{C_a A_c'} = \frac{a+b}{2b} \text{ und ebenso } \frac{\alpha_1 A_1}{C_a A_c'} = \frac{b-c}{2b}.$$

Hieraus ergeben sich also die Verhältnisse:

(1) $$\alpha_1 A_1 : \beta_1 B_1 : \gamma_1 C_1 = (b-c) : (c+a) : (a+b)$$

und in ganz gleicher Weise die folgenden:

(2) $$\alpha_2 A_1 : \beta_2 B_1 : \gamma_2 C_1 = (b+c) : (a-c) : (a+b),$$

(3) $$\alpha_3 A_1 : \beta_3 B_1 : \gamma_3 C_1 = (b+c) : (c+a) : (a-b)$$

und endlich:

(4) $$\alpha A_1 : \beta B_1 : \gamma C_1 = (b-c) : (a-c) : (a-b).$$

Diese einfachen metrischen Verhältnisse beziehen sich auf die Lage des Mittendreiecks $A_1 B_1 C_1$ und der vier Dreiecke:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha & \beta & \gamma, \end{matrix}$$

von welchen wir oben (2) gesehen, dass sie sämmtlich mit $A_1 B_1 C_1$ ähnlich und ähnlich-liegend sind; da also die Dreiecke $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $A_1 B_1 C_1$ ähnlich und ähnlich-liegend sind, mithin die Verbindungsstrahlen

$$\alpha_1 A_1 \quad \beta_1 B_1 \quad \gamma_1 C_1$$

sich in einem Punkte T_1 treffen, dem perspectivischen Centrum der beiden ähnlichen Figuren, so stehen auch die Strahlen

$$\alpha_1 A_1 \quad \beta_1 B_1 \quad \gamma_1 C_1$$

in demselben Verhältnisse zu einander, wie die Strahlen

$$T_1 A_1 \quad T_1 B_1 \quad T_1 C_1,$$

also verhalten sich auch

$$T_1 A_1 : T_1 B_1 : T_1 C_1 = (b-c) : (c+a) : (a+b);$$

die Seiten des Mittendreiecks $A_1 B_1 C_1$ verhalten sich aber zu einander

$$B_1 C_1 : C_1 A_1 : A_1 B_1 = a : b : c$$

und bilden mit den vorigen drei Strahlen zusammen die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks $A_1 B_1 C_1 T_1$; wegen der vorhin ermittelten Verhältnisse hat aber die Identität:

$$a(b-c) + c(a+b) = b(a+c)$$

zur Folge

$$A_1 T_1 \cdot B_1 C_1 + C_1 T_1 \cdot A_1 B_1 = B_1 T_1 \cdot A_1 C_1$$

und dies sagt nach dem Satze von Ptolemäus aus, dass die vier Punkte $A_1 B_1 C_1 T_1$ auf einem Kreise liegen; aus gleichem Grunde liegen auch die vier Punkte $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 T_1$ auf einem Kreise (m_1); der Punkt

T_1 ist nun ein Aehnlichkeitspunkt der beiden den Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ umschriebenen Kreise, weil die Dreiecke ähnlich und ähnlich-liegend sind; wenn aber ein Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise auf diesen beiden Kreisen selbst liegt, so müssen sie sich offenbar in demselben berühren.

Der um das Mittendreieck $A_1B_1C_1$ gelegte Kreis M_1 berührt also den Kreis m_1 im Punkte T_1, und in gleicher Weise folgt aus den Identitäten:

$$\begin{aligned} c\,(a+b)+b\,(a-c) &= a\,(b+c) \\ b\,(a+c)+c\,(a-b) &= a\,(b+c) \\ a\,(b-c)+c\,(a-b) &= b\,(a-c)\,, \end{aligned}$$

dass der Kreis M_1 auch die drei andern Berührungskreise $m_2\,m_3$ und m in den Punkten $T_2\,T_3$ und T berührt, und aus der oben (2) hervorgehobenen inversen oder directen Aehnlichkeitslage der Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ und $\alpha\beta\gamma$ zum Dreieck $A_1B_1C_1$ folgt, dass die Kreise

$$\left.\begin{array}{l} M_1 \text{ und } m_1 \text{ in } T_1 \\ M_1 \ \ „ \ \ m_2 \ \ „ \ \ T_2 \\ M_1 \ \ „ \ \ m_3 \ \ „ \ \ T_3 \end{array}\right\}$$

sich ausschliessend berühren,

$$M_1 \text{ aber } m \text{ in } T$$

einschliessend berührt.

Dies ist der Feuerbach'sche Satz, dessen Herleitung nun auch die Construction der Berührungspunkte und die geometrische Bedeutung derselben hervortreten lässt.

Breslau, den 14. Januar 1874.

Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie“ (diese Annalen Bd. VI., S. 112 ff.).

Von Felix Klein in Erlangen.

In dem in der Ueberschrift genannten Aufsatze behandelte ich neben anderen Fragen, zu denen die neueren Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie Anlass geben, insbesondere auch die, ob v. Staudt's nur auf die Betrachtung sogenannter Lagenverhältnisse gegründeter Aufbau der projectivischen Geometrie vom Parallelenaxiome unabhängig gemacht werden könne. Ich hatte dabei Gelegenheit (vergl. daselbst § 5. des zweiten Theiles) eine (auch sonst bemerkte) Lücke in v. Staudt's Betrachtungen zur Sprache zu bringen, die freilich keine nähere Beziehung zu der Frage nach dem Einflusse des Parallelenaxioms besitzt. Es handelt sich nämlich um den Nachweis, dass eine projectivische Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe vollkommen festgelegt ist, sowie man drei Paare entsprechender Elemente kennt. Nach der bei v. Staudt eingeführten Definition der projectivischen Beziehung sind die unbegrenzt vielen Elemente, welche man auf den beiden Grundgebilden, bez. aus den drei gegebenen durch wiederholte Construction des vierten harmonischen Elementes ableiten kann, ohne Weiteres als entsprechend gesetzt. Von Staudt unternimmt es daher zu zeigen, dass diese unendlich vielen Elemente das Grundgebilde völlig überdecken und ihr Entsprechen deshalb das Entsprechen aller Elemente nach sich zieht. Dies Verfahren implicirt bereits eine Voraussetzung, die im Folgenden (§ 3.) noch weiter gekennzeichnet werden soll, nämlich die: dass es gestattet sei, aus dem Verhalten der jedenfalls discreten Reihe der harmonischen Elemente auf das Verhalten des ganzen continuirlichen Gebietes zu schliessen, dem sie angehören. Aber die Lücke in v. Staudt's Beweisgang, von der in meinem Aufsatze gehandelt wurde, betrifft den ersten Theil des von ihm eingeschlagenen Weges. Um zu zeigen, dass die harmonischen Elemente das Grundgebilde völlig überdecken, d. h. *dass in jedem gegebenen Segmente des Grundgebildes Elemente liegen, welche man, von drei beliebig gegebenen Elementen ausgehend, durch fortgesetzte*

Construction des vierten harmonischen Elementes wirklich erreichen kann, macht v. Staudt einfach darauf aufmerksam, dass die Reihe der harmonischen Elemente nicht plötzlich abbrechen kann. Aber es ist dadurch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass diese Reihe, obgleich unbegrenzt, doch in gewisse Segmente des Grundgebildes nicht eindringt, und der Beweis, der zu erbringen war, ist also noch unvollständig.

Dem gegenüber glaubte ich in dem genannten „zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie"*) ausdrücklich folgende zwei Voraussetzungen einführen zu sollen, die freilich dort, wo überhaupt die ganze Frage mehr beiläufig berührt wird, nicht mit der Bestimmtheit bezeichnet und auseinandergehalten sind, wie es hier geschehen soll. Ich verlangte zunächst:

Wenn auf einem Gebilde erster Stufe eine unendliche Reihe von Elementen gegeben ist, die in ein Segment des Gebildes nicht eindringt, so soll es gestattet sein, von einem Grenzelemente, dem die Reihe zustrebt, als einem völlig bestimmten Elemente zu sprechen.

Sodann aber insonderheit mit Bezug auf die Reihe der harmonischen Elemente:

*Sollten in der Reihe der harmonischen Elemente solche Grenzelemente auftreten***), *so dürfen sie der Reihe zugezählt werden.*

Dass man unter Annahme dieser Voraussetzungen durch geeignete Fortsetzung der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment hineingelangen kann, beweist man genau so, wie v. Staudt die Unmöglichkeit eines plötzlichen Abbrechens der Reihe zeigt. Es genügt nämlich, daran zu erinnern, dass das zu drei getrennten Elementen harmonische vierte Element mit keinem der drei Elemente zusammenfällt, und, je nach der Anordnung, die man den drei Elementen ertheilen mag, einem jeden der drei Segmente angehört, in welche das Grundgebilde durch die drei Elemente getheilt wird.

Aber andererseits ist auch die oben bezeichnete zweite Frage bereits erledigt, die sich darauf bezieht, ob man aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente auf das Entsprechen der übrigen Elemente

---

*) In ganz ähnlicher Weise berührte ich diese Frage bereits in einer Mittheilung an die Göttinger Societät, vgl. Göttinger Nachrichten, 1871, S. 290.

**) Ob solche Elemente wirklich auftreten oder nicht, hängt von der Art und Weise ab, vermöge deren man die harmonischen Elemente fortsetzt, was auf sehr mannigfache Weise geschehen kann, weil immer drei beliebige Elemente unter den schon construirten zur weiteren Construction verwandt werden können. Im Texte soll nicht gezeigt werden, dass solche Elemente überhaupt nicht auftreten, wenn man die Reihe der harmonischen Elemente in bestimmter Weise unendlich fortsetzt, sondern nur, dass sie jedesmal wieder überschritten werden können, wenn man die Art der Fortsetzung ändert, und dass sie also für die Gesammtheit der harmonischen Elemente keine Grenze constituiren.

schliessen kann. Man wird nämlich auf Grund unserer ersten Voraussetzung jedes Element als Grenzelement einer unendlichen Reihe harmonischer Elemente auffassen können*), und, gemäss der zweiten Voraussetzung, demjenigen Elemente entsprechend setzen, welches auf dem anderen Grundgebilde durch den nämlichen Grenzprocess definirt wird.

Nach Veröffentlichung meines Aufsatzes erhielt ich eben mit Bezug auf diese Ueberlegungen Zuschriften von den Herren G. Cantor, Lüroth und Zeuthen, und ich verdanke es hauptsächlich der Correspondenz mit diesen Herren, wenn ich in der gegenwärtigen Mittheilung in der Lage bin, den Gegenstand, um den es sich handelt, sehr viel deutlicher zu bezeichnen, als ich es damals gethan hatte. Insbesondere haben mir die Herren Lüroth und Zeuthen unabhängig von einander einen Beweis mitgetheilt, vermöge dessen es gelingt, auch ohne Einführung der zweiten oben genannten Voraussetzung zu beweisen, dass man mit der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment des Grundgebildes eindringen kann. Es benutzt dieser Beweis den (oben schon in einer Note hervorgehobenen) Umstand, dass die Reihe der harmonischen Elemente, weil immer drei beliebige der bereits construirten zur Construction verwandt werden dürfen, in sehr mannigfacher Weise fortgesetzt werden kann. Ich werde weiter unten (§ 2.) diesen Beweis, durch dessen Mittheilung der gegenwärtige Nachtrag zu meinem früheren Aufsatze wesentlich veranlasst ist, in Herrn Zeuthen's Darstellung**) geben. Durch ihn wird also die zweite oben aufgestellte Voraussetzung zunächst überflüssig; sie tritt erst wieder ein, wenn es sich darum handelt, aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente auf das Entsprechen aller Elemente zu schliessen. Sie kann dann, worauf mich besonders Hr. Lüroth aufmerksam gemacht hat, durch verschiedene äquivalente ersetzt werden. Der dritte Paragraph des Folgenden mag diesen Betrachtungen gewidmet sein. Ich wende mich zunächst dazu, die erste oben eingeführte Voraussetzung noch näher zu bezeichnen und ihren Zusammenhang mit ähnlichen Voraussetzungen, die in der gewöhnlichen (metrischen) Geometrie nöthig sind, darzulegen.

---

*) Dies sollte eigentlich explicite bewiesen werden. Ich glaube die betreffenden Ueberlegungen hier aber um so mehr unterdrücken zu können, als das Operiren mit Würfen, wie zu diesem Zwecke systematisch würde untersucht werden müssen, von Hrn. Lüroth neuerdings eine gründliche Darstellung erfahren hat (Göttinger Nachrichten Nov. 1873).

**) Hr. Lüroth hatte bei seinen Ueberlegungen im Wesentlichen dieselben Momente benutzt.

§ 1.

Von der Stetigkeit der Gebilde in der projectivischen Geometrie.

Was man in der gewöhnlichen Geometrie meint, wenn man sagt, irgend ein Gebilde erster Stufe, also etwa eine Punktreihe, sei *stetig*, ist neuerdings von verschiedenen Seiten her mit besonderer Schärfe auseinander gesetzt worden*). Man legt durch die Forderung der Stetigkeit dem betreffenden Gebilde eben dieselbe Eigenschaft bei, die durch unsere erste Voraussetzung (welche sich in ganz ähnlicher Form in den Schriften von G. Cantor und Dedekind findet**)) formulirt ist. Der Unterschied ist nur der, dass wir diese Voraussetzung ausdrücklich auch in die projectivische Geometrie einführen. Wir können also auch folgendermassen sagen:

Die in der gewöhnlichen Geometrie vorausgesetzte Stetigkeit der Gebilde erster Stufe soll auch in der projectivischen Geometrie zu Grunde gelegt werden.

Es bringt das mit sich oder ist geradezu gleichbedeutend damit, dass in der projectivischen Geometrie, wie in der gewöhnlichen, das analytische Gegenbild eines Gebildes erster Stufe die einfach unendliche Zahlenreihe ist. Auch in der projectivischen Geometrie können also Segmente eines Gebildes erster Stufe *gemessen* werden, nur dass nicht, wie in der gewöhnlichen Geometrie, eine Massbestimmung vor allen anderen als besonders naturgemäss ausgezeichnet wird.

In dem letzteren Umstande liegt scheinbar eine gewisse Schwierigkeit hinsichtlich der Einführung der Zahlen in die projectivische Geometrie, insofern man nämlich von vornherein nur dann von zwei Segmenten sagen kann: das eine sei kleiner als das andere, wenn das eine ganz in dem anderen enthalten ist. Aber bei der Feststellung des Grenzbegriffs kommen eben nur solche Segmente in Vergleich, die in dieser Relation stehen, dass das eine ein Stück des anderen ist.

Eine entsprechende Voraussetzung der Stetigkeit, wie sie nunmehr für Gebilde erster Stufe eingeführt wurde, wird in der gewöhnlichen wie in der projectivischen Geometrie zu machen sein, wenn es sich um Gebilde höherer Stufe handelt. Doch braucht das hier wohl nicht näher entwickelt zu werden. Auch braucht hier nicht auf die Frage eingegangen zu werden, ob und wie weit wir zu diesen Vor-

---

*) Vgl. Heine, die Elemente der Functionenlehre, Borchardt's Journal Bd. 74; G. Cantor, über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen Bd. V; sowie besonders Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig 1872).

**) Ich bin kurz vor dem Erscheinen dieser Schriften von Hrn. Weierstrass auf diese Voraussetzung als eine in der gewöhnlichen Geometrie nothwendige aufmerksam gemacht worden.

aussetzungen*) axiomatischen Charakters durch unsere räumliche Anschauung gezwungen sind.

§ 2.

Der Lüroth-Zeuthen'sche Beweis.

Ich erlaube mir weiterhin den Lüroth-Zeuthen'schen Beweis mit Zeuthen's Worten wiederzugeben, und bemerke hinsichtlich der beigesetzten Zeichnungen nur, dass dieselben allein die Aufeinanderfolge der in Betracht kommenden Punkte veranschaulichen sollen. Es kommt in der That beim Beweise nur auf diese Aufeinanderfolge an, womit eine Verallgemeinerung angedeutet sein mag, die man diesen Betrachtungen zu Theil werden lassen kann. Hr. Zeuthen schreibt:

„Si AB harm. CD, c'est à dire, si A et B divisent harmoniquement CD,

$A \quad C \quad B \quad D$

A et B restant fixes, C et D ne pourront se mouvoir que dans des sens inverses entre eux; mais si A et C restent fixes, B et D ne pourront se mouvoir que dans le même sens. Il s'agit de démontrer *qu'il n'existe pas dans une série fondamentale complète***) *des segments ou des angles où l'on ne puisse entrer par des constructions successives du quatrième point harmonique, les trois premiers éléments étant donnés.*“

„Considérons comme v. Staudt une droite complète (dont les deux bouts sont liés l'un à l'autre par un point à l'infini) et désignons par AB, CD $\cdots\cdot$ les segments qui se trouvent à droite (par exemple) du premier point A, C $\cdots$, sans demander s'ils contiennent le point à l'infini ou non. Essayons d'attribuer à la droite un segment FG, qui ne contienne aucun point du système déterminé par les constructions successives du quatrième point harmonique, et supposons qu'on ait donné à ce segment l'extension la plus grande possible***). Alors, si F n'est pas lui-même un point du système, tout segment extérieur à FG et limité par F, quelque petit qu'il soit, contiendra des points du système, et de même pour le point G.

$A \quad B \quad F \quad H \quad D \quad L \quad G \quad K \quad C \quad J$

---

*) Hr. Cantor und Dedekind bezeichnen das Postulat der Stetigkeit der Gebilde erster Stufe auch ausdrücklich als ein *Axiom*.

**) „unbegrenztes Grundgebilde erster Stufe“, vgl. diese Annalen Bd. VI, S. 137.

***) Damit dies in allen Fällen möglich sei, wird man die in § 1. besprochene Voraussetzung der Stetigkeit voraufschicken müssen.

Soit A un point quelconque du système et soient H et J les points satisfaisant aux conditions

(1) AH harm. FG,

(2) AG harm. FJ.

En désignant par B un nouveau point du système placé sur le segment AF convenablement près de F, on peut obtenir que le point K déterminé par

(3) AH harm. BK

se trouve sur le segment GJ si près de G que le segment KJ contient un point du système. (Car au cas contraire ou pourrait, en laissant A et H rester fixes, rapprocher K de G jusqu'à ce que non seulement K a passé un point du système, mais aussi B, qui se meut dans le sens inverse, a gagné de nouveau un point du système.) Désignons par C un point du système qui se trouve sur KJ. Alors, comme le point L déterminé par

(4) AL harm. BJ

se trouve sur le segment HG (voir (3) et (2)), le point D déterminé par

(5) AD harm. BC,

se trouvant sur le segment HL (voir (3) et (4)), se trouve aussi sur le segment FG. Or A, B, C étant des points du système, D en est aussi un. Donc etc. · · · —"

„Si F est un point du système on peut y placer le point B, et si en même temps G appartient au système (supposition de v. Staudt), on peut y placer le point C."

§ 3.

Von der Stetigkeit der projectivischen Zuordnung.

Wenn es sich um eine systematische Darstellung der Grundlagen der projectivischen Geometrie handelt, wird man an die Voraussetzung des § 1. zunächst den Lüroth-Zeuthen'schen Beweis anschliessen und erst dann die in der Einleitung an zweiter Stelle eingeführte Voraussetzung folgen lassen. Dieselbe ist übrigens auch dadurch mit der ersteren ungleichwerthig, dass sie keinen axiomatischen Charakter besitzt, vielmehr als ein Zusatz zu *Staudt's Definition* der Projectivität aufgefasst werden muss.

Dass ein solcher Zusatz in der That nothwendig ist, dass man also aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente noch nicht auf das Entsprechen aller Elemente schliessen darf, mag man sich an der folgenden, analog gebildeten Aufgabe überlegen, bei der, entsprechend ihrer rein analytischen Fassung, eine Beurtheilung leichter scheint:

Eine Function sei für alle rationalen Werthe ihres Argumentes gegeben, für die irrationalen aber nicht, welche Werthe wird sie für die letzteren annehmen? Man kann diese Frage nicht nur nicht beantworten, wenn nichts Weiteres über die Function bekannt ist, sondern man kann nicht einmal behaupten, dass die Function für irrationale Werthe des Arguments existirt.

Die Forderung, wie sie durch unsere zweite Voraussetzung ausgesprochen worden ist, kann prägnanter als die Forderung der *Stetigkeit* der projectivischen *Beziehung* bezeichnet werden. Sie verlangt, dass einem Elemente, das in einer kleinsten Strecke zwischen zwei Elementen liegt, deren entsprechende Elemente bekannt sind, ein Element zugeordnet sein soll, das eben zwischen diesen letzteren liegt. Mit Beziehung auf die Staudt'sche Terminologie und unter besonderer Beachtung der projectivischen Beziehung kann man daher auch so sagen: *Vier Elementen des einen Gebildes, die in einem Sinne liegen, sollen vier Elemente des anderen entsprechen, die ebenfalls in einem Sinne liegen.*

Bei Gebilden mit mehr Dimensionen wird man bei Definition der projectivischen Beziehung in ganz entsprechender Weise die Stetigkeit dieser Beziehung zu verlangen haben, wie es hier für Gebilde erster Stufe geschah. Andererseits sei auch ausdrücklich hervorgehoben, dass in allen Fällen, in denen die projectivische Beziehung durch einmalige oder wiederholte Projection gewonnen wird, diese Stetigkeit der Beziehung von vornherein gegeben ist.

Erlangen, im Januar 1874.

Die neuere Algebra und die Ausdehnunglehre.

Von Hermann Grassmann in Stettin.

Die neuere Algebra hat durch die vereinten Bemühungen der hervorragendsten Mathematiker gegenwärtig eine Ausbildung erlangt, welche sie fast mit allen Zweigen der Mathematik in die engste Beziehung setzt und auch diese mit ihren Ideen befruchtet. Und in dem Mittelpunkte aller dieser Bestrebungen stand seit einer Reihe von Jahren der seinen zahlreichen Freunden und der gesammten Wissenschaft so früh entrissene Clebsch, der fast nach allen Seiten hin diese Bestrebungen anregte und förderte, und die vereinzelten hier und dort gewonnenen Resultate zu verweben und durch neue und umfassende Gedanken zu beleben und auf neue viel verheissende Bahnen zu lenken verstand. Durch ihn bin auch ich wieder auf das Gebiet der neueren Algebra zurückgeführt und zu dem Versuche angeregt worden, dasselbe mit dem nahe angrenzenden Gebiete der Ausdehnungslehre in näheren Zusammenhang zu setzen. Indem ich die Principien dieser Wissenschaft, wie ich sie in meinen Werken von den Jahren 1844 und 1862 bearbeitet habe, auf die Probleme der Invariantentheorie anwandte, gelangte ich zu einem Satze, der, wie ich glaube, als ein Fundamentalsatz dieser Theorie angesehen werden muss, und den ich seinem wesentlichen Inhalte nach hier sogleich aufstelle.

§ 1.

Fundamentalsatz.

In diesem Satze bedeutet m die Anzahl der Einheiten (in der geraden Linie 2, in der Ebene 3 u. s. w.), aus denen die der Betrachtung unterworfenen extensiven Grössen numerisch abgeleitet werden, k die Anzahl sämmtlicher Zahlcoefficienten, welche in dem zu Grunde liegenden Vereine algebraischer Formen vorkommen und welche sämmtlich als von einander unabhängig betrachtet werden.

Alle Formen (Invarianten, Covarianten, Zwischenformen u. s. w.), *welche einer gegebenen algebraischen Form oder einem Vereine solcher*

Formen entspriessen, lassen sich aus $k - m + 1$ *von einander unabhängigen Stammformen als rationale Functionen ableiten, und zwar als ganze Functionen, wenn man eine gewisse ganze Function* u *dieser Stammformen gleich* 1 *setzt. Man erhält diese Stammformen, indem man in den gegebenen Formen statt der extensiven Variabeln* x m *extensive Variabeln* $x_1, \cdots x_m$ (statt jedes einzelnen Factors eine beliebige derselben) *einführt, von denen eine, etwa* x_1, *mit* x *gleich, und eine andere, etwa* x_m, *durch die übrigen und durch eine der gegebenen Formen in der Art bestimmt ist, dass sie in Bezug auf diese Form Centrum erster Ordnung zu den Polen* $x_1, \cdots x_{m-1}$ *wird und ausserdem* $u = (x_1 x_2 \cdots x_m) = 1$ *ist. Wenn dann eine beliebige dem gegebenen Vereine entsprossene Form* Π *als ganze Function der Stammformen dargestellt werden soll, so gelingt dies unmittelbar, indem man in* Π *statt der Einheiten* $e_1, \cdots e_m$, *von denen die* k *Coefficienten abhängen,* $x_1, \cdots x_m$ *einführt, eine der veränderlichen Zahlen, von denen* x $(= x_1)$ *abhängt* (etwa x_{11}) *gleich* 1 *und die übrigen Null setzt.*

Auch wenn diese invarianten Bildungen Π nur symbolisch gegeben sind, lässt sich die Reduction auf die Stammformen aufs leichteste ausführen.

Dadurch, dass man $u = 1$ setzt, kann die Homogenität aufhören, aber man kann sie stets sofort wieder herbeiführen, wenn man u so oft (statt 1) als Factor hinzufügt, bis die Homogenität erreicht ist.

Ferner gilt dieser Satz nicht nur, wenn die gegebenen Formen einfach-algebraische, sondern auch, wenn sie alle oder einige unter ihnen Connexe oder Complexe, oder aus beiden beliebig zusammengesetzte Formen sind, z. B. Formen, welche in der Ebene von Punkten und Linien (Annalen VI, 203), im Raume von Punkten, Linien (oder Summen derselben) und Ebenen, überhaupt in einem Gebiete m^{ter} Stufe von Grössen erster, zweiter bis $(m - 1)^{\text{ter}}$ Stufe abhängen (Annalen VII, 43).

In allen diesen Fällen kann man statt der $k - m + 1$ Stammformen auch beliebige andere, aber von einander unabhängige invariante Bildungen (Invarianten, Covarianten u. s. w.) einführen, welche dem gegebenen Vereine entsprossen sind; aber es hört dann, wenn man statt aller Stammformen die üblichen invarianten Bildungen einführen will, schon bei ternären Formen die Rationalität auf und man muss dann zu einer grösseren Zahl jener Bildungen seine Zuflucht nehmen, wenn man die Rationalität bewahren will.

Diese Bemerkungen werden genügen, um die Bedeutung und die Anwendbarkeit des neuen Fundamentalsatzes vorläufig festzustellen. Für das nähere Verständniss ist es erforderlich, einige Grundbegriffe aus der Ausdehnungslehre aufzunehmen und sie mit der üblichen Symbolik (die ich unverändert beibehalte) in Beziehung zu setzen; doch

beschränke ich mich auf das für den vorliegenden Zweck Unentbehrlichste, indem ich im Uebrigen auf die Paragraphen meiner Ausdehnungslehre von 1844 ($\mathfrak{A}_1$) und auf die Nummern der Bearbeitung derselben von 1862 ($\mathfrak{A}_2$) verweise.

§ 2.

Grundbegriffe der Ausdehnungslehre und ihre Anwendung auf die neuere Algebra.

Den extensiven Grössen, welche die Ausdehnungslehre behandelt, liegt eine Reihe von Grössen zu Grunde, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, d. h. von denen sich keine aus den übrigen numerisch ableiten oder, anders ausgedrückt, keine sich als lineare Function der übrigen mit Zahlcoefficienten darstellen lässt, und die ich, sofern sie als ursprünglich zu Grunde liegend betrachtet werden, *Einheiten* erster Stufe genannt habe. Als solche können z. B. im Raume 4 beliebige Punkte betrachtet werden, die nicht in einer Ebene liegen. Es seien $e_1, \cdots e_m$ diese Einheiten, so nenne ich Grösse erster *Stufe* jede Grösse $x_1 e_1 + \cdots x_m e_m$, wo $x_1, \cdots x_m$ Zahlgrössen sind, und die Gesammtheit dieser Grössen nenne ich ein Gebiet m^{ter} Stufe ($\mathfrak{A}_1$ 13; $\mathfrak{A}_2$ 1 ff.).

Das *Product* zweier Grössen erster Stufe nenne ich ein *combinatorisches,* wenn für dasselbe die Gesetze $(aa) = 0$, $(ab) = -(ba)$ gelten, und nenne diese Producte und die aus ihnen numerisch ableitbaren Grössen Grössen zweiter Stufe. Entsprechend bei 3 und mehr Factoren erster Stufe, bei denen gleichfalls das Product Null wird, wenn zwei Factoren gleich werden, und entgegengesetzten Werth annimmt, wenn man zwei derselben vertauscht. ($\mathfrak{A}_1$ 28, $\mathfrak{A}_2$ 52 ff.)

Man erhält so Grössen erster bis m^{ter} Stufe, während die Zahlen als Grössen nullter Stufe erscheinen. Grössen von höherer als m^{ter} Stufe kann es in einem Gebiete m^{ter} Stufe nicht geben, da das combinatorische Product von $m+1$ Grössen erster Stufe schon ersichtlich Null wird. Aber auch die Grössen m^{ter} Stufe liefern keine eigenthümlichen neuen Grössen. Denn sie verhalten sich wie blosse Zahlen, indem $(a_1 a_2 \cdots a_m) = (e_1 e_2 \cdots e_m) \Delta$ ist, wenn Δ die Determinante der Zahlenreihen bezeichnet, durch welche $a_1, \cdots a_m$ aus $e_1, \cdots e_m$ abgeleitet sind ($\mathfrak{A}_1$ 45, $\mathfrak{A}_2$ 62 ff.). Schon hieraus ist ersichtlich, dass diese Bezeichnung eines combinatorischen Productes von m Factoren mit der der symbolischen Producte in der Invariantentheorie im Wesen übereinstimmt. Um diese Producte (von m Factoren) als wirkliche Zahlen darzustellen, genügt es, das combinatorische Product der m Einheiten erster Stufe $(e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ zu setzen.

Jede Grösse p^{ter} Stufe ist offenbar aus Einheiten p^{ter} Stufe, welche

die Combinationen ohne Wiederholung aus den m Einheiten erster Stufe zur p^{ten} Classe darstellen, numerisch ableitbar. So wie aber die Grössen m^{ter} Stufe vermöge obiger Gleichung $(e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ als Grössen nullter Stufe sich darstellen, so entsprechen sich überhaupt die Grössen p^{ter} und $m - p^{\text{ter}}$ Stufe (immer im Ganzen m Einheiten erster Stufe vorausgesesetzt). Um dies Entsprechen klar hervortreten zu lassen, setze ich einem combinatorischen Producte von Einheiten erster Stufe das combinatorische Product der übrigen Einheiten erster Stufe reciprok und zwar mit der Zeichenbestimmung, dass, wenn an jenes Product dies *reciproke* (ergänzende $\mathfrak{A}_1$ 138, $\mathfrak{A}_2$ 89 ff.) angeschlossen wird, und dadurch beide zu *einem* Producte von m Einheiten verbunden werden, dies gesammte Product gleich $+1$ wird. Dadurch ist dann zu jeder Grösse ihre reciproke, die aus den reciproken Einheiten durch dieselben Zahlen abgeleitet ist, wie jene aus den ihrigen, genau bestimmt. Alle Gesetze der Ausdehnungslehre lassen sich dann unmittelbar auf die reciproken Grössen übertragen. Als Beispiel wähle ich die Grössen in einem Gebiete vierter Stufe im Raume. Hier treten hervor die Grössen erster Stufe als Punkte, die Grössen zweiter Stufe als Linien und Summen von Linien ($\mathfrak{A}_1$ 113, 122; $\mathfrak{A}_2$ 285), die Grössen dritter Stufe als Ebenen; während die Grössen vierter Stufe, da sie Raumtheile darstellen, sich in Zahlen verwandeln, wenn man einen Raumtheil $(e_1 e_2 e_3 e_4) = 1$ setzt. Die Grössen erster Stufe sind aus den 4 Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4, die Grössen dritter Stufe aus den 4 zu jenen reciproken Einheiten r_1, r_2, r_3, r_4, die Grössen zweiter Stufe aus 6 Einheiten, nämlich $(e_2 e_3), (e_3 e_1), (e_1 e_2)$ und den reciproken $(e_1 e_4), (e_2 e_4), (e_3 e_4)$ ableitbar, und ist X aus diesen 6 Einheiten durch die Zahlen $x_1, \cdots x_6$ abgeleitet, so stellt eine Function dieser Zahlen einen von X beschriebenen Complex dar, welcher ein lineärer Complex wird, wenn $(XX) = 0$ ist ($\mathfrak{A}_1$ 124; $\mathfrak{A}_2$ 286 vgl. 393 und vor allem Klein's gedankenreiche Arbeiten im 2^{ten} und 5^{ten} Bande der Annalen).

Für die Invariantentheorie sind von besonderem Interesse die combinatorischen Producte von einer Grösse $(m-1)^{\text{ter}}$ und einer Grösse erster Stufe, welche wieder, da die Gesammtzahl der Factoren erster Stufe, die in ihnen enthalten sind, m beträgt, als Zahlen erscheinen. Ist x eine Grösse erster Stufe $= x_1 e_1 + \cdots x_m e_m$ (wo $x_1, \cdots x_m$ Zahlen sind) und a eine Grösse $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe $= a_1 r_1 + \cdots a_m r_m$, wo $r_1, \cdots r_m$ die zu $e_1, \cdots e_m$ reciproken Einheiten und $a_1 \cdots a_m$ Zahlen sind, so ist nach obigem $(e_i r_i) = 1$, hingegen $(e_i r_k) = 0$, wenn i von k verschieden ist, also

$$(ax) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_m x_m = a_x ,$$

letzteres, wie unten gezeigt wird, nach der üblichen symbolischen Bezeichnung.

Ferner ist für den Begriff der invarianten Bildungen noch der Begriff der *linealen Aenderung* ($\mathfrak{A}_2$ 71—76) von Wichtigkeit. Ich sage nämlich, eine Grösse einer Reihe von Grössen ändere sich lineal, wenn sie in eine andere Grösse übergeht, welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, dass zu ihr eine mit einem beliebigen Zahlfactor (μ) versehene andere Grösse der Reihe hinzutritt, also z. B. A sich in $A + \mu B$ verwandelt, wenn A und B beliebige Grössen jener Reihe sind, und ich sage, die Grössenreihe sei lineal geändert, wenn sie beliebigen und beliebig wiederholten linealen Aenderungen der darin enthaltenen Grössen unterworfen ist. Es leuchtet sogleich ein, dass ein combinatorisches Product von Grössen erster Stufe sich nicht ändert, wenn seine Factorenreihe lineal geändert wird; aber ich habe auch ($\mathfrak{A}_2$ 76) gezeigt, dass von 2 gleichen combinatorischen Producten jedes in das andere durch lineale Aenderung seiner Factorenreihe übergeführt werden kann (die Factoren als Grössen erster oder auch $m - 1$ter Stufe vorausgesetzt).

Hiernach kann man *alle invarianten Bildungen* (Invarianten, Covarianten u. s. w.) als *solche* definiren, *die bei linealer Aenderung der Einheiten ungeändert bleiben*, eine Definition, die ihrer Einfachheit wegen wohl vor der gewöhnlichen den Vorzug verdient, zumal da sie ohne weiteres auch alle symbolischen Bildungen als invariant nachweist.

Wenn sich nun die Einheiten $e_1, \cdots e_m$ in beliebige aus ihnen numerisch ableitbare Grössen $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_m$ verwandeln, aber so, dass $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m) = (e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ ist, und

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11} e_1 + \cdots a_{1m} e_m \\ &\vdots \\ \varepsilon_m &= a_{m1} e_1 + \cdots a_{mm} e_m \\ x = x_1 e_1 + \cdots x_m e_m &= \xi_1 \varepsilon_1 + \cdots \xi_m \varepsilon_m \end{aligned}$$

ist, so wird, wie man sogleich durch Einführung der Werthe der ε in die letzte Gleichung sieht,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} \xi_1 + \cdots a_{m1} \xi_m \\ &\vdots \\ x_m &= a_{1m} \xi_1 + \cdots a_{mm} \xi_m , \end{aligned}$$

d. h. die Substitutionen, durch welche die neuen Einheiten aus den alten, und die, durch welche die alten Variabeln aus den neuen hervorgehen, sind zu einander transponirt, und es lassen sich daher die invarianten Eigenschaften ebenso gut auf die Einheiten als auf die veränderlichen Zahlgrössen gründen; die Substitutionsdeterminante ist in beiden Fällen gleich und zwar unter obiger Voraussetzung gleich 1. Die extensive Variable x bleibt dabei dieselbe und kann also als *Covariante erster Stufe* aufgefasst werden.

Schon diese nahe liegende Betrachtungsweise führt vermöge der durch Hermite eingeführten typischen Darstellung unmittelbar zu einem dem obigen Fundamentalsatze entsprechenden Satze, während für die Ableitung des Fundamentalsatzes selbst noch die Idee der Polaren (Centralen) zu Hülfe genommen werden muss.

Ausser der combinatorischen Multiplication ist nun für die neuere Algebra von gleicher Wichtigkeit diejenige Multiplication, welche in ihren Gesetzen vollkommen mit der algebraischen Multiplication der Zahlgrössen übereinstimmt, und welche ich daher, auch wenn die Factoren Grössen höherer Stufen sind, die *algebraische* genannt und auch wie diese bezeichnet habe. Ihr Begriff und die Anwendung desselben auf Functionen findet sich ausführlich entwickelt in *n.* 348—427 der Ausdehnungslehre von 1862 und dem wesentlichen Grundgedanken nach dargelegt auf S. 266 ff. der Ausdehnungslehre von 1844. Ist nämlich $f = f(x_1, x_2, \cdots x_m)$ eine beliebige Function der m veränderlichen Zahlgrössen $x_1, \cdots x_m$, und ist

$$x = x_1 e_1 + \cdots x_m e_m,$$

wo $e_1, \cdots e_m$ Einheiten von erster oder auch höherer Stufe sind, $r_1, \cdots r_m$ die reciproken Einheiten, so ist nach dem Obigen $(e_i r_i) = 1$, hingegen $(e_i r_k) = 0$, wenn i von k verschieden ist; also ist $(x r_1) = x_1$, $(x r_2) = x_2$, u. s. w. also:

$$f(x_1, x_2, \cdots x_m) = f([x r_1], [x r_2], \cdots [x r_m]),$$

also eine Function einer einzigen, aber extensiven Variablen ($\mathfrak{A}_2$ 350). Ist insbesondere f eine homogene Function n^{ten} Grades, so kommt in $f([x r_1], \cdots [x r_m])$ die extensive Variable x in jedem Gliede n-mal als Factor vor.

Entfernt man daher x aus diesen Verbindungen $(x r_i)$, und setzt an die Stelle, wo x gestanden hat, irgend ein Zeichen, welches die dadurch entstandene Lücke darstellt, und setzt nun den so aus

$$f([x r_1], \cdots [x r_m])$$

hervorgehenden Ausdruck $= a$, so wird

$$f = a x^n \quad (\mathfrak{A}_2\ 358).$$

Ich habe diese Lücke Anfangs ($\mathfrak{A}_1$ Seite 266 ff.) durch leer gelassene Klammern, später ($\mathfrak{A}_2$ 353 ff.) durch l bezeichnet; das Bequemste ist, sie durch irgend eine bestimmt gewählte extensive Variable zu bezeichnen, und ich werde dazu allemal x selbst wählen, so dass also $a = a x^n$ ist und $a y^n$ aus $a x^n$ (oder a) dadurch hervorgeht, dass man überall y statt x setzt. Sollen nun zu diesem Ausdrucke $a = a x^n = f([x r_1], \cdots [x r_m])$ verschiedene extensive Factoren, die jedoch mit x von gleicher Stufe sein müssen, und deren Anzahl p nicht grösser als n sein darf, hinzutreten, so hat man (nach $\mathfrak{A}_2$ 353) diese auf alle möglichen Arten

in p der Lücken (also hier statt x) einzuführen, und die Summe der so erhaltenen Ausdrücke durch ihre Anzahl, die hier $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ beträgt, zu dividiren. Nachdem dies festgesetzt ist, ergiebt sich leicht, ($\mathfrak{A}_2$ 360 ff.), dass für diese hinzutretenden Factoren die Gesetze der gewöhnlichen algebraischen Multiplication gelten, namentlich auch, dass

$$ax^n = a(x_1 e_1 + \cdots x_m e_m)^n = x_1^n \cdot a e_1^n + \frac{n}{1} x_1^{n-1} x_2 a e_1^{n-1} e_2 + \cdots,$$

insbesondere wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ ist

$$\begin{aligned} ax^2 &= x_1^2 a e_1^2 + x_2^2 a e_2^2 + x_3^2 a e_3^2 + 2x_1 x_2 a e_1 e_2 + 2x_1 x_3 a e_1 e_3 + 2x_2 x_3 a e_2 e_3 \\ &= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 \end{aligned}$$

ist, wenn $a e_1^2$ mit a_{11}, $a e_1 e_2$ mit a_{12} u. s. w. bezeichnet wird, kurz ax^n ist dasselbe, was symbolisch durch a_x^n bezeichnet wird, während $\frac{d^p a x^n}{d x_1^\alpha d x_2^\beta \cdots} = n(n-1)\cdots(n-p+1) a e_1^\alpha e_2^\beta \cdots$ ist. Ist x ein Punkt in der Ebene, so wird $ax^n = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung; dann drückt die Gleichung $ax^{n-1}y = 0$ aus, dass (nach der Poncelet'schen Benennung) y harmonisches Centrum (erster Ordnung) zu der Curve $ax^n = 0$ (nach der ursprünglichen Benennung zu den n Durchschnitten der Geraden xy mit dieser Curve) in Bezug auf den Pol x ist; daher habe ich (Theorie der Centralen in Crelle's Journal Band 24 und 25) den Ort von x bei festem y die erste Polare von y und den Ort von y bei festem x die erste *Centrale* von x genannt*), und diese erste Centrale, die ich schlechthin Centrale nenne, spielt in der Invariantentheorie eine schon in dem Fundamentalsatze erkennbare Hauptrolle.

Im Allgemeinen werde ich $ax^{n-p}y^p$, als Function von y betrachtet, die p^{te} Centrale von x und, als Function von x betrachtet, die p^{te} Polare von y in Bezug auf die Function ax^n nennen, so dass also die p^{te} Polare der $n-p^{\text{ten}}$ Centrale identisch ist. Endlich bemerke ich noch, dass auch die Complexe durch eine Function der Form $ax^n x'^{n'} x''^{n''} \cdots$ dargestellt werden können, wo x eine Grösse erster Stufe, x' zweiter, x'' dritter Stufe ist u. s. w.

§ 3.

Symbolik.

Die angestellten Betrachtungen führen uns hinüber zu der symbolischen Bezeichnung, wie sie zuerst von Aronhold (Borch. J. Bd. 55)

---

*) Vgl. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1872, S. 567 ff. Gelegentlich bemerke ich, dass, was ich dort Wendelinie genannt habe, mit der von Clebsch so genannten Polardeterminante (Borch. Journ. 59. S. 125) zusammenfällt, was mir entgangen war.

in die neuere Algebra eingeführt, und von Clebsch und in Anschluss an ihn von Gordan zu der hohen Stufe von Vollkommenheit gebracht ist, welche sie gegenwärtig zu einer unentbehrlichen oder doch äusserst bequemen Waffe gemacht hat, um neue Gebiete mathematischen Wissens zu erobern. Die Bezeichnungen, die ich im vorhergehenden § angewandt habe, und die sich aus dem Wesen der Ausdehnungsgrössen mit unabweislicher Nothwendigkeit ergaben, und die ich daher kurz die organischen Bezeichnungen nennen will, sollen daher keineswegs jene vortreffliche Symbolik verdrängen oder ersetzen, sondern nur sie ergänzen, indem sie einerseits jener Symbolik stets eine reale, anschauliche Bedeutung unterlegen, andrerseits da eintreten, wo jene nicht ausreicht. Es sei zuerst die reale Bedeutung der symbolischen Producte $(abc\cdots)$ betrachtet, wo $a, b, \cdots$ sich auf die Functionen ax^{α}, bx^{β}, u. s. w. beziehen, von denen aber auch mehrere einander gleich sein können. Dann bedeutet $(abc\cdots)$ zunächst die gleichfalls symbolische Determinante $\Sigma \mp a_1 b_2 c_3 \cdots$, und der ganze Ausdruck, sofern er nur solche symbolische Producte enthält, gewinnt erst dadurch eine reale Bedeutung, dass man ihn nach Potenzen der $a_1, a_2, \cdot\cdot\, b_1, b_2 \cdots$ entwickelt und die Potenzen der a zusammenordnet, ebenso die der b u. s. w.; alsdann hat man statt $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots\cdot$ zuletzt den Coefficienten $a_{\alpha_1, \alpha_2}, \cdots$ von ax^n zu setzen. Dieser ist nach dem obigen $ae_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \cdots\cdot$; also kann man $(abc\cdots) = \Sigma \mp ae_1 \cdot be_2 \cdot ce_3 \cdots$ setzen, d. h. $(abc\cdots)$ bedeutet, dass man in die zu $a, b, c, \cdot\cdot$ gehörigen Functionen die Schaar der Einheiten $e_1, \cdot\cdot\, e_m$ in allen möglichen Folgen (jede Einheit statt *eines* Factors x der Function) eintreten lässt, dem so erhaltenen Product das $+$ oder $-$-Zeichen vorsetzt, je nachdem das combinatorische Product der Einheiten in dieser Folge $+1$ oder -1 ist, und diese Producte addirt; ich will dies so ausdrücken, dass ich sage, man habe dann in $abc \cdots$ die Schaar der Einheiten *harmonisch* eingeführt. Diese Einführung wird dann bei den folgenden symbolischen Producten, die in dem ganzen Ausdrucke als Factoren vorkommen, als schon vollzogen vorausgesetzt, so dass also in jeder Function nur noch die Factoren x übrig bleiben, welche nicht schon früher durch Einheiten verdrängt waren. Kommen ausser jenen symbolischen Producten $(abc\cdots)$ noch die symbolischen Factoren a_x^p u. s. w. vor, so bedeuten diese weiter nichts, als dass die noch übrig gebliebenen x in den betreffenden Functionen ungeändert stehen bleiben sollen; sie können also alle weggelassen werden, nur wenn noch eine zweite Reihe von Veränderlichen (oder mehrere solche), die durch die extensive Grösse y bezeichnet sei, hinzukommt, so sind die Factoren a_y^p u. s. w. nicht mehr zu unterdrücken; aber ihre Bedeutung ist aus dem Vorigen ohne weiteres ersichtlich. Man kann aber die Bedeutung der symbolischen Producte $(abc\cdots)$ noch concreter fassen. Nämlich setzen wir $r_1, r_2 \cdots r_m$ als

die zu e_1, $e_2 \cdots e_m$ reciproken Einheiten und bezeichnen mit $\bar{a}$ die Grösse $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots a_m r_m$, wo $a_1, \cdots a_m$ die Zahlgrössen sind, welche aus a durch Einführung von $e_1, e_2, \cdots e_m$ statt eines x entstehen, so ergiebt sich $(a\,b\,c\cdots) = (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\cdots)$, wo das Product rechts als combinatorisches zu fassen und zugleich $a_x = (\bar{a}x)$ ist; die Grössen $\bar{a}$ sind dann als (erste) Centralen von x in Bezug auf die Function ax^n zu fassen, oder in Bezug auf die Function, welche daraus durch Einführung der Einheiten, die durch die früheren symbolischen Producte bedingt war, hervorging.

Diese Andeutungen mögen genügen, um die reale Bedeutung der Symbole festzustellen; es wird die Auffassung dieser Bedeutung überall da von wesentlichem Nutzen sein, wo man gezwungen ist, die symbolische Darstellung zu verlassen.

§ 4.

Theorie binärer Formen.

Es wird hinreichend sein, wenn ich den Fundamentalsatz für binäre Formen erweise und seine Bedeutung für dieselben darlege, indem dadurch schon auf gewisse Weise der Weg vorgezeichnet ist, den man bei Formen, die aus mehr als 2 Einheiten entspringen, einzuschlagen hat. Ich werde dabei der Bequemlichkeit wegen x und y statt der im Fundamentalsatze mit x_1 und x_2 bezeichneten extensiven Grössen einführen und zunächst die Aufgabe stellen, die aus einer binären Form ax^n entspringenden invarianten Bildungen, wenn sie als Functionen der Coefficienten $a_1 = a\,e_1{}^n$, $a_2 = a\,e_1{}^{n-1}\,e_2$, $\cdots a_k = a\,e_2{}^n$ und der veränderlichen Zahlgrössen x_1 und x_2 gegeben sind, als Functionen der $k-1$ Stammformen darzustellen. Es sei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Da nun alle jene Bildungen unverändert bleiben, wenn man statt e_1 und e_2 zwei aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, deren combinatorisches Product 1 ist, so kann man x und y dafür einführen mit der vorläufigen Bedingung, dass (xy), was wir mit u bezeichnen wollen, gleich 1 sei. Jede aus den Einheiten numerisch ableitbare Grösse p lässt sich dann auch aus x und y ableiten. Es sei $p = p_1 e_1 + p_2 e_2 = \pi_1 x + \pi_2 y$, so wird nun die invariante Bildung

$$\Pi(a_1, \cdots a_k, p_1, p_2) = \Pi(\varphi_0, \cdots \varphi_n, \pi_1, \pi_2),$$

wo die φ aus den a hervorgehen, indem man x und y statt e_1 und e_2 setzt, nämlich $\varphi_0 = a\,x^n$, $\varphi_1 = ax^{n-1}y$, $\cdots \varphi_n = a\,y^n$. Setzt man nun $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 0$, so wird $p = x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, und es wird

$$\Pi = \Pi(a_1, \cdots a_k, x_1, x_2) = \Pi(\varphi_0, \cdots \varphi_n, 1, 0),$$

oder wenn

$$\Pi(a_1, \cdots a_k, x_1, x_2) = F(a_1, \cdots a_k) \cdot x_1{}^q + \cdots.$$

ist, wo q den Grad der invarianten Bildung bezeichnet, so ist

$$\Pi = F(\varphi_0, \cdots \varphi_n),$$

also als ganze Function der k Formen $\varphi_0 \cdots \varphi_n$ dargestellt. Aber eine dieser Formen, nämlich $\varphi_1 = a x^{n-1} y$ ist Null, wenn y harmonisches Centrum erster Ordnung zu dem Pole x in Bezug auf die durch die Gleichung $a x^n = 0$ dargestellten n Punkte ist, und es ist also dann Π als ganze Function der $k - 1 = n$ Stammformen $\varphi_0, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ dargestellt. Hierbei war $u = (xy)$ vorläufig gleich 1 gesetzt; es ist y durch die Gleichung $a x^{n-1} y = 0$ bedingt, d. h. y ist, abgesehen von einem Zahlfactor gleich $a x^{n-1}$, d. h. $y \equiv a x^{n-1}$ also,

$$u \equiv a x^{n-1} x \equiv a x^n \equiv a,$$

der ursprünglichen Function. Ist also die erhaltene Gleichung nicht homogen, so macht man sie nun homogen durch Hinzufügung von Factoren a.

Diese Entwickelung stimmt im Resultate, wie auch dem Wesen nach in der Art der typischen Darstellung mit Clebsch Theorie der binären algebraischen Formen S. 321—328 überein (vgl. auch Gundelfinger in Borch. J. Bd. 74); sie gilt auch unmittelbar für (simultane) Bildungen, die einem Vereine binärer Formen entsprossen sind, indem man nur für $a_1, a_2, \cdots a_k$ die sämmtlichen Zahlcoefficienten der Formen dieses Vereines zu setzen hat.

Viel wichtiger als diese Zurückführung der explicite gegebenen Bildungen auf die Stammformen ist die der symbolisch gegebenen, die aber ganz nach denselben Principien erfolgt. Das symbolische Product (ab) ist $= a_{e_1} b_{e_2} - a_{e_2} b_{e_1}$; ersetzt man also wie oben e_1 und e_2 durch y und x (ich habe beide der einfacheren Zeichenbestimmung wegen vertauscht) wo (yx) vorläufig 1 gesetzt wird, so wird nun

$$(ab) = a_y b_x - a_x b_y$$

oder, da, wie oben gezeigt, die Factoren a_x, b_x entbehrlich sind, $= a_y - b_y$, also

$$(ab)^n = (a_y - b_y)^n = a_y^n - \frac{n}{1} a_y^{n-1} b_y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_y^{n-2} b_y^2 - \cdots,$$

oder wenn a und b dieselbe Function darstellen

$$= a y^n - \frac{n}{1} a x y^{n-1} \cdot a x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a x^2 y^{n-2} a x^{n-2} y^2 - \cdots$$

$$(ab)^n = \varphi_0 \varphi_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varphi_2 \varphi_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi_3 \varphi_{n-3} + \cdots,$$

wenn man, wie oben, y so bestimmt, dass $\varphi_1 = a x^{n-1} y = 0$ wird.

Dies ist der Satz, den Clebsch in seiner Theorie der binären Formen S. 334 als einer schriftlichen Mittheilung Brioschi's entnommen darstellt.

Derselbe lässt sich aber vermöge der von mir angegebenen Me-

thode unmittelbar zu folgendem Satze erweitern, welcher fast alle Beziehungen, die zwischen binären Formen herrschen, zur Evidenz bringt.

Wenn $(ab)^p(ac)^q\cdots$ *eine beliebige symbolische Invariantenbildung* (Invariante oder Covariante) *einer algebraischen Form* $a_x^n = b_x^n = c_x^n = \cdots$ *ist, so setze man* $a - b$ *für* (ab), $a - c$ *für* (ac) *u. s. w., entwickele nach Potenzen von* $a, b, c, \cdots$, *schreibe dann* φ_r *statt* a^r, b^r, $\cdots$ *und setze* $\varphi_1 = 0$, *so ist der so hervorgehende Ausdruck gleich* $(ab)^p(ac)^q\cdots$

Man erhält so, abgesehen von dem Factor φ_0, der die ursprüngliche Function darstellt, und erst zuletzt zur Herstellung der Homogenität hinzugefügt zu werden braucht,

$$c_2 = \tfrac{1}{2}(ab)^2 \equiv \varphi_2,\quad c_3 = (ab)^2(ac) \equiv \varphi_3,\quad c_4 = \tfrac{1}{2}(ab)^4 \equiv \varphi_4 + 3\varphi_2^2;$$
$$c_5 = (ab)^4(ac) \equiv \varphi_5 + 4\varphi_2\varphi_3;\quad c_6 = \varphi_6 + 15\varphi_2\varphi_4 + 10\varphi_3^2, \cdots$$

Also

$$\begin{array}{l|l} \varphi_2 = c_2 & \varphi_5 = c_5 - 4c_2c_3 \\ \varphi_3 = c_3 & \varphi_6 = c_6 - 15c_2c_4 + 45c_2^3 + 10c_3^2 \\ \varphi_4 = c_4 - 3c_2^2 & \text{(vgl. Cl. bin. F. 337).} \end{array}$$

Als Beispiel mögen die von Clebsch mit R und j bezeichneten Bildungen dienen $R = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd) \equiv (a-b)^2(c-d)^2(a-c)(b-d) \equiv (a^2-2ab+b^2)(c^2-2cd+d^2)(ab-bc-ad+cd)$ oder mit Weglassung der Glieder, die zuletzt nur eine erste Potenz erhalten, und die nach dem Obigen null sind, $-b^3c^3 - a^3d^3 - 2a^2b^2c^2 - 2a^2c^2d^2 - 2a^2b^2d^2 - 2b^2c^2d^2 \equiv -2\varphi_3^2 - 8\varphi_2^3 \equiv -2c_3^2 - 8c_2^3$. Um sie durch Hinzufügung der Factoren $\varphi_0 = f$ (bei Clebsch) homogen zu machen, ist zu bedenken, dass die Functionen φ in jedem Gliede so oft vorkommen müssen, als die Anzahl der symbolischen Elemente beträgt, also in $c_2, c_4, c_6, \cdots$ je zweimal, in $c_3, c_5, c_6, \cdots$ je dreimal, in R viermal, also

$$\tfrac{1}{2}R = -\frac{c_3^2 + 4c_2^3}{f^2}$$

in Uebereinstimmung mit Clebsch S. 337.

Ferner $j = (ab)^2(ac)^2(bc)^2 \equiv (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$, was sich mit Weglassung der Glieder, welche eine erste Potenz enthalten, verwandelt in $6(\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2 - \varphi_2^3) \equiv 6(c_2c_4 - 4c_2^3 - c_3^2)$, also homogen gemacht, da j nur 3 symbolische Elemente enthält

$$\tfrac{1}{6}j = \frac{f^2c_2c_4 - 4c_2^3 - c_3^2}{f^3}$$

in Uebereinstimmung mit Clebsch S. 338.

Wie sich alles dies für ternäre und höhere Formen gestaltet, denke ich späterhin zu zeigen.

Stettin, den 21. Februar 1874.

Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen.

Von Felix Klein in Erlangen.

Die auf den Zusammenhang der Flächen bezüglichen Definitionen werden bei Riemann zunächst ohne besondere Festsetzungen hinsichtlich des Unendlich-Weiten hingestellt. Aber entsprechend der von ihm beabsichtigten Verwerthung dieses geometrischen Begriffes für functionentheoretische Untersuchungen wird bei ihm eine solche Festsetzung implicite eingeführt, indem nämlich die unbegrenzte Ebene einer Kugelfläche äquivalent gesetzt wird, auf die sie durch stereographische Projection bezogen ist. In ähnlicher Weise kann man jede sich in's Unendliche erstreckende Fläche auf eine durchaus im Endlichen gelegene reduciren: man braucht sie nur einer Transformation durch reciproke Radien zu unterwerfen, deren Inversionscentrum nicht selbst der Fläche angehört. Man kann dann alle Betrachtungen über den Zusammenhang der Flächen, wie sie gewöhnlich unter der stillschweigenden Voraussetzung durchaus im Endlichen gelegener Flächen angestellt werden, auf beliebig sich in's Unendliche erstreckende übertragen.

Aber die so eingeführte Festsetzung, vermöge deren das Unendlich-Weite als ein einzelner Punkt erscheint*), ist an und für sich willkührlich; sie widerspricht überdies dem Wesen der Sache, wenn man, wie in der projectivischen Geometrie, das Unendlich-Ferne als eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Punkten, als eine Ebene, betrachten muss. Auch bei dieser projectivischen Anschauungsweise kann man für Flächen, die sich beliebig in's Unendliche erstrecken, dieselben Probleme aufstellen, auf welche sich, bei durchaus im Endlichen gelegenen Flächen, die Riemann'schen Betrachtungen beziehen. Es fragt sich, ob dann specifisch neue Ueberlegungen noth-

---

*) Dieselbe ist auch in anderen auf die Analysis situs bezüglichen Fragen gelegentlich gebraucht worden; vgl. z. B. Listing: Der Census der räumlichen Complexe. Göttinger Abhandlungen 1861. — Dass man und wie man dieselbe verwerthen kann, um auf sie ein ganzes System der Geometrie zu begründen, welches als eine Art von Seitenstück zur projectivischen Geometrie betrachtet werden darf, vgl. meine Schrift: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Erlangen 1872.

wendig werden, oder ob es gelingt, die betr. Probleme durch blosse Benutzung der Riemann'schen Betrachtungen zu erledigen. So ungefähr stellte ich diese Frage in einem neuerdings in diesen Annalen erschienenen Aufsatze (Ueber Flächen dritter Ordnung. t. VI.)*), ohne aber eine Beantwortung derselben in definitiver Form zu versuchen. Vielmehr machte ich nur auf eine Reihe von Schwierigkeiten aufmerksam, die sich einer unmittelbaren Verwerthung der Riemann'schen Betrachtungen entgegenstellen. Ich betonte besonders, dass der ungewöhnliche Zusammenhang der unbegränzten Ebene in Anlehnung an die projectivische Anschauung nicht, wie in der Riemann'schen Theorie, gleich Null, sondern gleich Zwei zu setzen ist, falls man ohne nähere Festsetzung die *gewöhnliche* Definition dieses Zusammenhang's**) beibehalten will. Denn die Ebene wird entsprechend der projectivischen Anschauung durch eine in ihr verlaufende Gerade, die doch auch eine geschlossene Curve ist, noch nicht in zwei Stücke getheilt. Dementsprechend glaubte ich die Zahlen, welche Hr. Schläfli in einem kurz zuvor veröffentlichten Aufsatze (Annali di Matemetica. t. V. Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca una parte etc.) für die fünf verschiedenen Arten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung aufgestellt hatte, alle um zwei Einheiten erhöhen zu sollen.

Ich bin nun von Hrn. Schläfli brieflich darauf aufmerksam gemacht worden, dass man, unbeschadet der Richtigkeit dieser meiner Betrachtungen und Einwände, doch auch bei projectivischer Anschauung für die unbegränzte Ebene den Zusammenhang Null ansetzen kann, wenn man dieselbe nämlich als Doppelfläche betrachten will, also etwa als Gränze eines zweischaligen Hyperboloid's. In der That, man denke sich, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, eine Ebene horizontal und ziehe in ihr eine Linie Süd-Nord. Dann wird die als Doppelfläche betrachtete Ebene in zwei Theile zerfallen, deren einer die östliche Hälfte des oberen Blattes und die westliche des unteren, deren

---

*) Dass sich die Problemstellung der Analysis situs je nach der Beurtheilung des Unendlich-Weiten modificirt, hatte ich bereits in der oben citirten Schrift: „Vergleichende Betrachtungen etc." angegeben (p. 30 derselben).

**) Wenn man auf einer geschlossenen Fläche im Maximum q geschlossene Curven ziehen kann, ohne die Fläche zu zerstücken, so setzt Riemann den Zusammenhang derselben $= 2q + 1$. Aber es ist bereits in den Neumann'schen „Vorlesungen über Riemann's Theorie etc." angedeutet und neuerdings von Hrn. Schläfli hervorgehoben worden (vgl. z. B. Borchardt's Journal. t. 76. p. 152. Note), dass es consequenter ist, in einem solchen Falle nur von einem $2q$-fachen Zusammenhange zu sprechen. Indem ich mich im Texte dieser Bezeichnung anschliesse, füge ich, nach dem Vorgange Schläfli's, wo eine Undeutlichkeit entstehen könnte, dem Worte „Zusammenhang" das Attribut „ungewöhnlich" hinzu.

anderer die beiden übrigen Hälften enthält. Dabei wird die gerade Linie selbst doppelt gedacht, nämlich sowohl im oberen als im unteren Blatte verlaufend.

Eine solche Einführung von Doppelflächen erscheint um so mehr zulässig, als sie schon in den Untersuchungen der Analysis situs, welche sich nur auf im Endlichen gelegene Flächen beziehen, nothwendig wird*). Ein bekanntes Beispiel dafür bietet die (mit einer Randcurve versehene) Fläche, welche man aus einem Papierstreifen bilden kann, indem man die beiden Enden des Streifens so aneinanderheftet, dass die eine Seite desselben in die andere übergeht. Ein anderes Beispiel für eine solche Fläche, und zwar eine geschlossene Fläche, giebt, wie weiter unten gezeigt werden soll, die Steiner'sche Fläche, die man ja bekanntlich als völlig im Endlichen gelegen voraussetzen darf. (Von den isolirten Stücken, welche ihre Doppelgeraden besitzen, wird dabei abgesehen.)

Ich habe nun gefunden, dass man die Theorie des Flächenzusammenhangs, wie sie gewöhnlich entwickelt wird, in der That auf die projectivischen Vorstellungen unverändert übertragen kann, wenn man sich überhaupt entschliesst, *die unpaaren Flächen der projectivischen Geometrie als Doppelflächen zu betrachten, und eine unpaare Curve erst dann als geschlossen anzusehen, wenn man sie zweimal durchlaufen hat.*

Ob man sich dieser Anschauung anschliessen will, oder nicht, wird zunächst dem freien Entschlusse des Einzelnen überlassen sein. Es mag sogar hervorgehoben werden, dass es von vorneherein sehr unnatürlich scheint, in der projectivischen Geometrie die Ebene als Grenzfall der nicht-geradlinigen Flächen zweiter Ordnung betrachten zu sollen. Aber die Anschauung empfiehlt sich durch ihren Erfolg. Denn man kann im Anschlusse an sie auch für die projectivische Auffassung des Unendlich-Weiten den Satz aussprechen, der den Zusammenhangsbegriff für die functionentheoretischen Untersuchungen so werthvoll macht: *dass nämlich zwei geschlossene Flächen dann und nur dann auf einander Punkt für Punkt bezogen werden können, so dass consecutiven Punkten der einen consecutive Punkte der anderen entsprechen, wenn der Zusammenhang der beiden Flächen der gleiche ist.* (Für ungeschlossene Flächen kommt nur die weitere Bedingung hinzu,

---

*) Freilich verlangt dann die Consequenz, dass man, wenn von einer Fläche, deren entgegengesetzte Seiten nicht in einander übergehen, schlechthin die Rede ist, unter dem Zusammenhange der Fläche die Grundzahl versteht, die man dem von den beiden Seiten gebildeten *Systeme* beizulegen hat (cf. Neumann's Vorlesungen). Der Zusammenhang der Kugel wäre dann $= -2$; der Zusammenhang der einzelnen Kugelseite $= 0$.

dass auch die Anzahl der Randcurven bei beiden übereinstimmen muss*)).

Dem widerspricht nicht, wie vorab bemerkt sei, wenn ich in meiner schon genannten Arbeit hervorhob, das einschalige Hyperboloid und die Ringfläche seien nicht in einander überführbar, obgleich ihr Zusammenhang nach Schläfli's wie nach meiner Zählung übereinstimmend gleich Zwei zu setzen ist. Denn unter Ueberführbarkeit wurde damals etwas Anderes verstanden, als hier für die Transformirbarkeit zweier Flächen in einander verlangt wird. Eine Fläche wurde damals (vgl. § 16. meiner Arbeit) in eine andere überführbar genannt, wenn es gelang, durch Verbindung von Collineationen, die das Unendliche in's Endliche bringen, mit stetigen, unendlich kleinen Transformationen, die nur das Endliche betreffen, die eine Fläche aus der anderen abzuleiten. Durch solche Mittel ist das einschalige Hyperboloid allerdings nicht in eine Ringfläche zu verwandeln.

Dagegen kann eine eindeutige, stetige Beziehung zwischen beiden durch den folgenden unstetigen Process ohne Weiteres hergestellt werden: Man zerschneide das Hyperboloid längs der unendlich fernen Ebene, bringe die so entstandene zweifach berandete Fläche durch Verzerrung ganz in's Endliche und hefte die beiden Ränder dann wieder in der Weise an einander, dass jeder Punkt des einen Randes mit demjenigen des anderen vereinigt wird, von dem er vorher durch den Schnitt getrennt worden war. (Damit dies geschieht, muss man den einen Rand des Hyperboloids gegen den anderen Rand um 180° drehen, ehe man die Ränder durch Zusammenbiegen vereinigt). — Aehnliche unstetige Processe zur Herstellung der eindeutigen Beziehung werden übrigens schon nothwendig, wenn man nur von Flächen handelt, die ganz im Endlichen liegen. Man kann z. B. eine einfach berandete, mit einem Verzweigungspunkte versehene Riemann'sche Fläche nur dadurch mit einem einfach zusammenhängenden Stücke einer Ebene zur Deckung bringen, dass man sie durch einen vom Verzweigungspunkte zum Rande gehenden Schnitt zerschneidet und hinterher die durch den Schnitt getrennten Partieen wieder an einander heftet. Ich finde, dass die Darstellungen dieser Theorie, welche mir gerade zur Hand sind, hierüber keine volle Klarheit geben: es wird von der Möglichkeit eines solchen Zerschneidens und Wieder-Verbindens gesprochen, aber dasselbe wird nur als nützlich, nicht als für viele Fälle nothwendig dargestellt. — Es ist wohl kaum nöthig, hervorzuheben, dass der Unterschied, den ich zwischen Hyperboloid und Ringfläche

---

*) Dass diese Bedingungen für die Transformirbarkeit zweier Flächen in der That *hinreichend* sind, findet sich kurz und übersichtlich bei C. Jordan bewiesen in Liouville's Journal t. XI. 1866.

und überhaupt zwischen paaren und unpaaren Flächen in meiner früheren Arbeit hervorhob, durch diese Bemerkungen nicht bedeutungslos wird; er kommt nur bei der Frage nach der Möglichkeit der eindeutigen Beziehung zweier Flächen auf einander, wie sie hier gestellt wird, nicht in Betracht. —

Den Beweis für das aufgestellte Theorem erbringe ich in der Weise, dass ich den Raum mit unendlich ferner Ebene zu dem Raume mit unendlich fernem Punkte in eine einfache ein-zweideutige Beziehung setze, vermöge deren das Theorem unmittelbar aus dem gleichlautenden Satze der gewöhnlichen Analysis situs hervorgeht.

Es mag das zunächst bei der Ebene erörtert werden. In der gewöhnlichen Analysis situs wird die Ebene einer Kugel äquivalent gesetzt, auf die sie durch stereographische Projection bezogen ist. Aber man kann die Kugel dann weiterhin durch centrale Projection auf eine neue Ebene beziehen. Diese Ebene ist dann doppelt von den Bildern der Kugelpunkte überdeckt; ihre unendlich ferne Gerade kommt als solche zur Geltung, indem ihr ein grösster Kreis auf der Kugel entspricht. Sieht man nun von der Kugel ab, welche die Beziehung zwischen den beiden Ebenen vermittelte, so hat man eine ein-zweideutige Verwandtschaft zwischen der Ebene mit unendlich ferner Geraden und der Ebene mit unendlich fernem Punkte, vermöge deren jeder in der letzteren gezogenen Curve, falls man nur die unpaaren Curven der ersteren als Doppel-Curven ansieht, eine Curve der ersteren Ebene eindeutig entspricht.

Ganz entsprechend kann man eine ein-zweideutige Beziehung zwischen den beiden Räumen herstellen. Da sich der Process bei ihnen, wegen des Nothwendigwerden's einer vierten Dimension, minder anschaulich bezeichnen lässt, so mögen die Formeln hergesetzt werden, welche ihn repräsentiren. Sind x, y, z rechtwinklige Coordinaten des Raumes mit unendlich fernem Punkte, x', y', z' des Raumes mit unendlich ferner Ebene, ist endlich λ eine beliebige Constante, so hat man zu setzen:

$$x' = \frac{x}{1-\lambda(x^2+y^2+z^2)}, \quad y' = \frac{y}{1-\lambda(x^2+y^2+z^2)}, \quad z' = \frac{z}{1-\lambda(x^2+y^2+z^2)}.$$

Jeder Fläche des Raumes mit unendlich fernem Punkte entspricht dann eindeutig eine Fläche des anderen Raumes, vorausgesetzt, dass man seine unpaaren Flächen als Doppelflächen betrachtet, *und unser Theorem betr. die Flächen des letzteren Raumes ist richtig, weil es für die Flächen des anderen gilt.*

Es mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf gewisse Beziehungen erstrecken, welche zwischen dem Zusammenhange

algebraischer Flächen und ihrem Verhalten bei algebraisch-eindeutigen Transformationen Statt finden.

Wenn zwei Flächen algebraisch eindeutig in einander übergeführt werden können, wenn dabei jedem reellen Punkte der einen ein reeller Punkt der anderen entspricht*), wenn endlich auf keiner von beiden dabei reelle Fundamentalpunkte auftreten, so haben die Flächen ersichtlich denselben Zusammenhang. Man kann von dieser Bemerkung Gebrauch machen, um den Zusammenhang gewisser algebraischer Flächen ohne Weiteres zu bestimmen. Die vierte der von Schläfli aufgezählten Flächen dritter Ordnung z. B. (welche nur 3 reelle Gerade und 7 reelle Dreiecksebenen besitzt) lässt sich auf die Ebene ohne Zwischentreten reeller Fundamentalpunkte reell abbilden, denn die 6 bei ihrer Abbildung im algebraischen Sinne vorhandenen Fundamentalpunkte sind paarweise conjugirt imaginär. Der Zusammenhang der Fläche ist daher Null; überdiess ist sie eine Doppelfläche, weil jedem Punkte der Ebene, unabhängig davon, ob man ihn der einen oder anderen Seite der Ebene zurechnet, ein und derselbe Punkt der Fläche entspricht. Aus demselben Grunde ist, wie bereits oben angegeben wurde, die Steiner'sche Fläche eine Doppelfläche vom Zusammenhange Null; denn es ist bekannt, dass sie ohne Auftreten von Fundamentalpunkten durch reelle Functionen zweiten Grades auf die Ebene abgebildet werden kann**).

Es drängt sich nun von selbst die Frage auf, welche Beziehungen für den Zusammenhang zweier Flächen gelten, die zwar auf reelle Weise algebraisch eindeutig auf einander bezogen werden können, bei deren Abbildung aber reelle Fundamentalpunkte auftreten. Dabei müssen natürlich solche Flächen von der Betrachtung ausgeschlossen sein, die nicht isolirte, vielfache Punkte besitzen. Denn es wird bei den Definitionen des Zusammenhangs, wie sie gewöhnlich gegeben werden, überhaupt von solchen Flächen abgesehen. Lässt man sie bei Seite, so kann man folgenden Satz aussprechen: *Finden sich auf der einen Fläche μ, auf der andern ν (reelle) Fundamentalpunkte, so ist der Zusammenhang der ersten, vermehrt um μ, gleich dem Zusammenhang der zweiten, vermehrt um ν.*

---

*) Dies ist nicht immer der Fall. Z. B. kann die Fläche dritter Ordnung ohne Knoten, mit 3 reellen Geraden und 13 reellen Dreiecksebenen (die fünfte Art der allgemeinen Fläche nach Schläfli's Eintheilung) nur durch Functionen mit complexen Coefficienten eindeutig auf die Ebene abgebildet werden.

**) Es sei hier daran erinnert, dass Clebsch gelegentlich seiner Untersuchung der Linienflächen vom Geschlechte Null (Math. Annalen Bd. V.) alle Flächen, die ohne Auftreten von (reellen oder imaginären) Fundamentalpunkten algebraisch eindeutig auf einander bezogen werden können, als Flächen eines *Typus* zusammenfasst.

Einige Beispiele mögen das zunächst erläutern.

1. Zwei Ebenen sollen algebraisch eindeutig (durch eine Cremona-Transformation) auf einander bezogen sein. Dann ist bekannt, dass die Zahl der beiderseits überhaupt auftretenden (reellen und imaginären) Fundamentalpunkte die gleiche ist; gemäss unserer Behauptung muss auch die Zahl der reellen Fundamentalpunkte allein beiderseits übereinstimmen.

2. Eine Kugel werde stereographisch auf die Ebene (die Doppelebene) bezogen. Dann entspricht die Ebene eindeutig dem Aggregate der beiden Kugelflächen, welche durch die innere und äussere Seite der Kugel vorgestellt werden, und die zusammen nach einer bereits oben gemachten Bemerkung den Zusammenhang -2 repräsentiren. In der That treten auf der Kugel bei der Abbildung zwei Fundamentalpunkte auf, nämlich sowohl auf der äusseren als der inneren Seite je einer.

3. Ein einschaliges Hyperboloid werde durch stereographische Projection auf eine Ebene bezogen. Dann ist wiederum die eine Seite der Fläche der einen Seite der Ebene, die andere der zweiten Seite der Ebene entsprechend gesetzt, und man hat nicht sowohl ein einzelnes Hyperboloid, als ein System von zwei Hyperboloiden mit der Ebene zu vergleichen. Jedes der beiden Hyperboloide trägt einen Fundamentalpunkt: den Projectionspunkt. Aber die Ebene trägt vier Fundamentalpunkte; denn man muss die beiden Fundamentalpunkte, von denen man bei der Abbildung eines Hyperboloids gewöhnlich spricht, hier doppelt zählen, weil sie sowohl der einen als der anderen Seite der Ebene angehören. Der Zusammenhang des Hyperboloidsystems wird daher gleich $+2$, wie es in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Zählung sein muss; denn jedes der beiden Hyperboloide ist zweifach zusammenhängend, und ihre Trennung zählt für -2.

4. Wenn man die drei ersten Schläfli'schen Arten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung (die bez. 27, 15, 7 reelle Gerade enthalten) auf die Ebene abbildet, so erscheinen in der Ebene bez. 6, 4, 2 reelle Fundamentalpunkte, die man wiederum doppelt zu zählen hat. Auf der Fläche selbst treten keine Fundamentalpunkte auf. *Dementsprechend wird der Zusammenhang bez. gleich* 12, 8, 4. Schläfli gab die Zahlen 6, 4, 2. Aber er betrachtet bei seiner Abzählung die Flächen als einfache, nicht als Doppelflächen. Thut man das Letztere, so hat man die Processe, vermöge deren Schläfli diese Flächen aus der mit dem Zusammenhange Null vorausgesetzten, unbegrenzten Ebene herstellt, in der That doppelt zu zählen, da sie sich auf beide Seiten der Fläche beziehen. Schläfli's Zählung war von dem hier entwickelten Standpunkte aus inconsequent, weil die

Annahme, dass die Ebene nullfach zusammenhängend sei, bereits darüber entscheidet, dass man die Ebene als Doppelebene betrachten muss. Will man die Ebene und dementsprechend diese Flächen als einfache betrachten, so ergeben sich für die Flächen die Zusammenhangs-Zahlen 8, 6, 4, wie ich in meiner früheren Arbeit ausführte. —

Um den Beweis der nunmehr an einzelnen Beispielen erläuterten Regel zu führen, ist es nöthig, für reelle Elemente insbesondere einige Ueberlegungen zu entwickeln, welche sonst nur für beliebig complexe Elemente in der Theorie des algebraisch-eindeutigen Entsprechens bewiesen werden.

Es seien zwei geschlossene Flächen auf einander reell eindeutig bezogen. Jedem Fundamentalpunkte der einen Fläche entspricht auf der anderen eine Fundamentalcurve. Es ist leicht zu sehen, dass diese Curve nur aus einem Zuge bestehen kann. Denn man muss sich die Vorstellung bilden, dass dem Büschel von Fortschreitungsrichtungen, welche von dem Fundamentalpunkte ausgehen, eindeutig die Punkte dieser Curve entsprechen: sowie jenes Büschel ohne Unterbrechung ist, so müssen die Punkte der Curve eine einzige, zusammenhängende Reihenfolge bilden. Die den verschiedenen Fundamentalpunkten der einen Fläche entsprechenden Fundamentalcurven werden sich, wie leicht zu sehen, nur in den Fundamentalpunkten der zweiten Fläche schneiden können. Sie werden durch sie in eine Anzahl, S, von Segmenten zerlegt, die gleich ist der Anzahl von Malen, dass sie überhaupt durch die Fundamentalpunkte durchgehen.

Man überzeugt sich nun von folgendem Satze: *Die Anzahl S der Segmente, in welche die Fundamentalcurven zerlegt werden, ist auf beiden Flächen dieselbe.* Geht nämlich die Fundamentalcurve, welche dem i^{ten} Fundamentalpunkte der ersten Fläche entspricht, a_{ik} mal durch den k-Fundamentalpunkt der zweiten, so wird auch die Curve, welche letzterem auf der ersten Fläche entspricht, a_{ik} mal durch den i^{ten} Fundamentalpunkt der ersten Fläche gehen müssen. Denn durch beide Behauptungen wird nur gleichmässig ausgesprochen, dass a_{ik} Fortschreitungsrichtungen in dem einen und dem anderen Fundamentalpunkte existiren, welche einander entsprechen. Die Zahl S ist aber die Summe aller a_{ik}; sie fällt also beiderseits gleich aus. — Durch die a_{ik} Fortschreitungsrichtungen, welche den verschiedenen Fundamentalpunkten k der zweiten Fläche entsprechen, wird das Büschel der von dem i^{ten} Fundamentalpunkte der ersten Fläche ausgehenden Richtungen in $\sum_k a_{ik}$ Theile, oder, wenn man will, in $2\sum_k a_{ik}$ Halbbüschel zerlegt. In eben soviele Segmente wird die dem i^{ten} Fundamentalpunkte auf der zweiten Fläche entsprechende Curve durch die Fundamentalpunkte der zweiten Fläche getheilt; der

Unterscheidung der Halbbüschel entspricht die Unterscheidung der beiden Seiten der verschiedenen Segmente.

Nunmehr wandele man jede der beiden Flächen in folgender Weise um. Man hebe die μ Fundamentalpunkte der ersten Fläche und die ν Fundamentalpunkte der zweiten heraus (d. h. man schneide aus den Flächen kleine Stücke aus, welche diese Punkte umgeben). Dadurch wächst der Zusammenhang der ersten Fläche um μ, der der zweiten um ν. Sodann zerschneide man die Flächen längs der auf ihnen liegenden Fundamental-Curven: eine Operation, welche nun, nachdem durch das Herausheben der Fundamentalpunkte Begränzungen entstanden sind, in dem Ziehen von S Querschnitten besteht. So ist die eine Fläche um $\mu - S$, die andere um $\nu - S$ im Zusammenhange vermehrt; *die so veränderten Flächen sind aber nunmehr ohne Zwischentreten von Fundamentalpunkten eindeutig auf einander bezogen.* Der Rand jeder der beiden so erhaltenen Flächen besteht, wie der grösseren Bestimmtheit wegen hervorgehoben sei, abwechselnd aus Segmenten von Fundamentalcurven und Stücken der um Fundamentalpunkte herumgelegten kleinen Ovale, wie sie auf diesen Ovalen durch die von den Fundamentalpunkten ausgehenden Halb-Büschel bestimmt werden. Die beiden Ränder der beiden Flächen sind dann so eindeutig auf einander bezogen, dass jedem Stücke des einen, welches aus einem Segmente einer Fundamentalcurve besteht, ein Stück des anderen zugeordnet ist, welches einem der kleinen Ovale angehört, und umgekehrt. Zu jedem von einem Halbbüschel ausgeschnittenen Stück eines Ovals gehört ein zweites, welches durch das complementäre Halbbüschel bestimmt wird. Dem entspricht, dass auch jedes Segment einer Fundamentalcurve zweimal in der Begrenzung auftritt. — Aber der Zusammenhang der beiden so erhaltenen Flächen ist um $\mu - S$ und bez. $\nu - S$ grösser, als der Zusammenhang der beiden ursprünglichen Flächen; *addirt man also zum Zusammenhange der einen ursprünglichen Fläche μ, zu dem der anderen ν, so erhält man gleiche Zahlen, wie behauptet wurde.*

Erlangen, Februar 1874.

Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen.

Von Felix Klein in Erlangen.

Bei der Untersuchung der algebraischen Functionen y einer Veränderlichen x pflegt man sich zweier verschiedener anschauungsmässiger Hülfsmittel zu bedienen. Man repräsentirt nämlich entweder y und x gleichmässig als Coordinaten eines Punktes der Ebene, wo dann die reellen Werthe derselben allein in Evidenz treten und das Bild der algebraischen Function die algebraische Curve wird — oder man breitet die complexen Werthe der einen Variabeln x über eine Ebene aus und bezeichnet das Functionsverhältniss zwischen y und x durch die über der Ebene construirte Riemann'sche Fläche. Es muss in vielen Beziehungen wünschenswerth sein, zwischen den beiden Anschauungsbildern einen Uebergang zu besitzen. Ich darf mit Bezug hierauf nur das Eine hervorheben, dass nämlich ein solcher Uebergang vom rein geometrischen Standpunkte aus geradezu gefordert werden muss, wenn die Sätze, welche sich auf die Zahl und Periodicität der längs einer algebraischen Curve erstreckten Integrale beziehen, zu einem unmittelbaren Verständnisse gebracht werden sollen.

Ein solcher Uebergang ist nun in einfachster Weise herzustellen. Er schliesst sich an die Auffassung einer Curve als des Umhüllungsgebildes ihrer Tangenten*) an; er setzt ferner in einem gewissen Masse diejenigen Erörterungen über den Zusammenhang der Flächen voraus, welche in dem vorstehenden Aufsatze entwickelt wurden.

Man gehe von der Bemerkung aus, dass man jeder Tangente einer algebraischen Curve, mag die Tangente reell oder imaginär sein, im Allgemeinen *einen* reellen Punkt zuordnen kann. Ist nämlich die Tangente reell, so wähle man als entsprechenden Punkt ihren Berührungspunkt; ist die Tangente imaginär, so wähle man den einen reellen Punkt, den sie überhaupt besitzt. Diese beiden Festsetzungen, deren eigentlicher Sinn übrigens aus den weiter unten angeführten Beispie-

---

*) Wollte man die dualistisch entgegenstehenden Ueberlegungen anstellen, so würde die Anschaulichkeit des Resultats, auf die ich eben Gewicht legen möchte, verloren gehen.

len völlig deutlich werden soll, stimmen insofern mit einander, als die auf reelle Tangenten bezügliche aus der anderen durch Grenzübergang hervorgeht. Denn der reelle Punkt einer imaginären Tangente ist ihr Durchschnittspunkt mit der conjugirten Tangente, und, wenn diese beiden Linien in eine reelle zusammenfallen, so wird aus ihrem Durchschnittspunkte eben der Berührungspunkt.

Diese Festsetzungen werden bei etwaigen mehrfach berührenden reellen Tangenten ungenügend. Wir wollen nur den Fall reeller Doppel- oder Wende-Tangenten ins Auge fassen. Hat die Doppeltangente reelle Berührungspunkte, so werden wir ihr eben diese beiden Punkte zuordnen; ist sie aber isolirt, so mag ihr die Gesammtheit der ihr angehörigen reellen Punkte entsprechend gesetzt sein. Ebenso sollen einer Wendetangente alle auf ihr gelegenen reellen Punkte zugeordnet werden. Es wird noch aus den weiteren Ausführungen hervorgehen, dass diese Festsetzungen mit den voraufgeschickten nicht nur verträglich sind, sondern sich aus ihnen in naturgemässer Weise ergeben.

Die zweifach unendlich vielen reellen Punkte, welche man, diesen Festsetzungen zufolge, der Gesammtheit der reellen und imaginären Tangenten der Curve zuordnet, werden eine geschlossene Fläche bilden, welche die verschiedenen Theile der Ebene mit einer Anzahl von Blättern überdeckt, die jedesmal gleich ist der Anzahl der imaginären Tangenten, welche man von einem Punkte des betreffenden Theiles der Ebene an die Curve legen kann (und die also immer gerade ist). *Diese Fläche ist dann ein vollständiges Bild der durch die Curve definirten algebraischen Function.* Sie ist auf die gewöhnliche Riemann'sche Fläche, wie man sie für diese Function construiren könnte, im Allgemeinen eindeutig bezogen. Eine Ausnahme tritt nur für diejenigen Werthsysteme ein, welche den reellen, isolirten Doppeltangenten und den reellen Wendetangenten der Curve entsprechen. Denn während dieselben auf der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche durch je zwei Punkte vorgestellt werden (welche im Falle der Wendetangenten consecutiv sind), entsprechen ihnen bei unserer Fläche ganze gerade Linien, die der Fläche, wie man findet, bez. als Doppel- und Rückkehrkanten angehören: die beiden Flächen sind also in der Art auf einander bezogen, dass auf der einen eine Reihe von Fundamentalpunkten auftritt. Um also von dem Zusammenhange unserer Fläche auf den Zusammenhang der entsprechenden Riemann'schen Fläche schliessen zu können, wird man den Satz benöthigen, der im vorstehenden Aufsatze gegen Ende aufgestellt und bewiesen wurde.

Doch betrachten wir eine Reihe von Beispielen. Sei zunächst ein Kegelschnitt gegeben, der als Ellipse vorausgesetzt sein mag. Die reellen Punkte, welche den imaginären Tangenten der Ellipse entsprechen, erfüllen das Innere der Ellipse doppelt, *unsere Fläche hat*

also in diesem Falle die Gestalt eines elliptischen Doppelblattes, oder, wenn man will, eines flachen Ellipsoids. Ein Ellipsoid ist aber eine nullfach zusammenhängende Fläche*); deshalb giebt es beim Kegelschnitte kein längs der Curve erstrecktes überall endliches Integral.

Nehmen wir ferner eine Curve dritter Classe. Auch sie kann, was für die Anschauung bequem ist, als völlig im Endlichen gelegen vorausgesetzt werden, und besteht dann entweder aus zwei geschlossenen Zweigen oder nur aus einem, wie dies in den beistehenden, übrigens nur schematischen Zeichnungen dargestellt ist.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Sowohl von jedem Punkte ausserhalb des Ovals als von jedem Punkte innerhalb des mit drei Spitzen versehenen Curvenzugs kann man drei reelle Tangenten an die Curve legen; die reellen Punkte, welche imaginären Tangenten der Curve entsprechen, erfüllen daher den Raum zwischen den beiden Curvenzügen doppelt, *unsere Fläche ist eine Art Ringfläche.* Sie ist also in der That zweifach zusammenhängend, wie es für eine Curve mit dem Geschlechte 1 sein muss, oder umgekehrt, *es liegt darin der Beweis, dass die Curve dem Geschlechte 1 angehört.* Es ist leicht, die Werthe, welche das eine auf die Curve bezügliche überall endliche Integral für die einzelnen Punkte der Fläche annimmt, ihrer allgemeinen Vertheilung nach anzugeben. Zu dem Zwecke sei es gestattet, von *Meridianen* der Ringfläche und von *Breitencurven* derselben zu sprechen; die beiden Züge, aus denen die Curve dritter Classe besteht, werden selbst zu den Breitencurven gehören. Die beiden Perioden, welche das auf die Curve bezügliche überall endliche Integral besitzt, entstehen dadurch, dass man dem zwischen bestimmten Grenzen ge-

*) Wegen dieser Art der Zählung vgl. den vorstehenden Aufsatz.

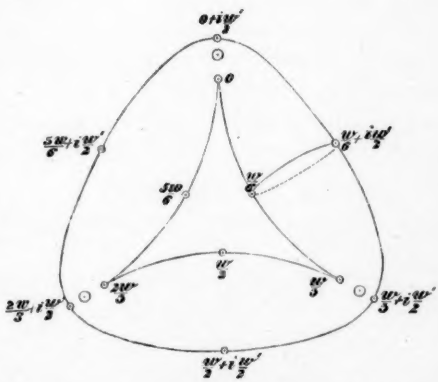
führten Integrationswege beliebig Meridiancurven und Breitencurven zufügen kann. (Diese und die folgenden Behauptungen, welche sich aus den bekannten Sätzen über die Integrale auf Riemann'schen Flächen ohne Weiteres ergeben, sollen hier ohne Beweis angeführt sein.) Die erstere dieser Perioden sei imaginär genommen, gleich iw', die zweite reell, gleich w. Als untere Grenze werde dasjenige Werthsystem gewählt, welches durch die in der Zeichnung vertical gestellte reelle Rückkehrtangente bezeichnet ist, und dem auf unserer Fläche der obere von den drei reellen Rückkehrpunkten entspricht. Das bis zu irgend einem anderen Punkte hingeleitete Integral werde, unter Trennung des reellen und imaginären Theiles, $u + iv$ genannt, wo also u nur bis auf Multipla von w, v bis auf Multipla von w' bestimmt ist. Dann hat man als Bedingung dafür, dass drei Tangenten der Curve dritter Classe, welche den Integralwerthen

$$u_1 + iv_1\,, \quad u_2 + iv_2\,, \quad u_3 + iv_3$$

entsprechen, sich in einem Punkte schneiden, die Relationen*):

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &\equiv 0 \pmod{w} \\ v_1 + v_2 + v_3 &\equiv 0 \pmod{w'}\,. \end{aligned}$$

In Folge dessen ergiebt sich eine Vertheilung der Werthe von $u + iv$ über unsere Fläche, wie sie auf der beigesetzten Zeichnung veranschaulicht ist.



Längs des Zuges mit drei Spitzen sind die reellen Zahlen von 0 bis w in der Weise vertheilt, dass die drei Spitzen die Argumente 0,

---

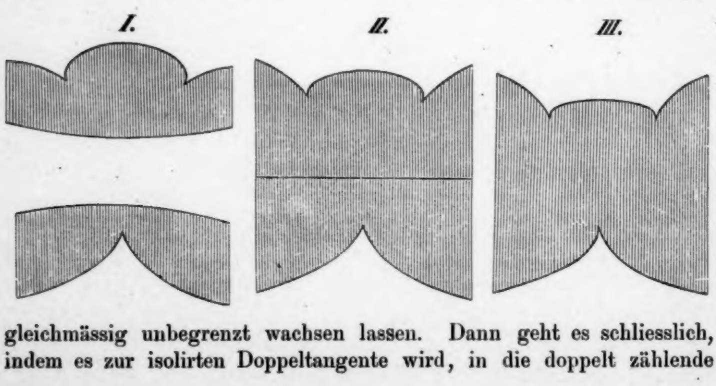
*) Vgl. Clebsch in Borchardt's Journal t. 63, p. 105. Es sind dort nur nicht, wie im Texte, der reelle und imaginäre Theil getrennt, überdies ist die untere Grenze des Integrals beliebig gelassen.

$\frac{1}{3}w$, $\frac{2}{3}w$ bekommen. Die Punkte einer Meridiancurve, welche durch eine Tangente dieses Curvenzuges auf der Fläche bezeichnet ist, besitzen alle dasselbe u, längs der Curve ändert sich nur das v von 0 anfangend bis w'. Für die Punkte des umschliessenden Ovals hat v gleichmässig den Werth $\frac{w'}{2}$. An den drei Stellen etwa, die durch kleine Kreise bezeichnet sind, befinden sich diejenigen Punkt, welche die 6 paarweise conjugirt imaginären Rückkehrtangenten der Curve repräsentiren; ihre Argumente sind bezüglich $0 \pm \frac{iw'}{3}$, $\frac{w}{3} \pm \frac{iw'}{3}$, $\frac{2w}{3} \pm \frac{iw'}{3}$.

Für die Curven dritter Classe ohne Oval gestalten sich diese Verhältnisse im Allgemeinen ähnlich. Der ganze Raum ausserhalb des mit drei Spitzen versehenen Curvenzuges wird bei ihnen doppelt von den Punkten überdeckt, die imaginären Tangenten entsprechen. *Die zugehörige Fläche erstreckt sich also ähnlich ins Unendliche, wie ein einschaliges Hyperboloid.* Der Zusammenhang der Fläche ist nach wie vor gleich 2 (vgl. den vorstehenden Aufsatz), die Curve hat das Geschlecht 1.

Es ist nun besonders interessant, zu sehen, wie sich die zugehörige Fläche modificirt, wie im Zusammenhange damit das Geschlecht der algebraischen Function auf Null herabsinkt, wenn man der Curve eine Doppeltangente oder Wendetangente ertheilt. Die Doppeltangente kann isolirt oder mit reellen Berührungspunkten vorausgesetzt werden. Beidemal bildet die zugehörige Curve einen Uebergang zwischen den beiden vorstehend unterschiedenen Arten ohne Doppeltangente. Die Curve mit Wendetangente endlich stellt sich wieder als Uebergangsform zwischen die beiden Curven mit Doppeltangente.

Um nämlich zunächst eine Curve mit isolirter Doppeltangente zu erhalten, kann man das Oval der ersten Figur nach allen Richtungen



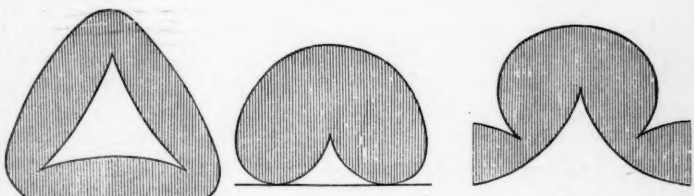
gleichmässig unbegrenzt wachsen lassen. Dann geht es schliesslich, indem es zur isolirten Doppeltangente wird, in die doppelt zählende

unendlich ferne Gerade über; setzt man den Aenderungsprocess noch weiter fort, so wird es imaginär und man hat die allgemeine Curve ohne Oval. Doch besser lassen sich diese Verhältnisse übersehen, wenn man die betreffenden Figuren so durch eine Collineation umgestaltet, dass die fragliche Doppeltangente ins Endliche fällt. Die Curven haben dann die in der Zeichnung dargestellte Gestalt; die von der zugehörigen Fläche überdeckten Partieen der Ebene sind schraffirt.

Im Falle II hat die Fläche eine Doppelgerade bekommen (oder richtiger eine Selbstberührungsgerade), sie ist nach wie vor zweifach zusammenhängend. Aber die zugehörige Riemann'sche Fläche ist nur noch nullfach zusammenhängend. Denn sie trägt zwei Fundamentalpunkte, denen diese Doppelgerade entspricht, und also ist ihr Zusammenhang, nach den Auseinandersetzungen des vorstehenden Aufsatzes, um Zwei kleiner als der Zusammenhang der von uns construirten Fläche.

Doch nehmen wir die Doppeltangente nicht isolirt. Dann kann sich der Uebergang in der folgenden Weise gestalten, die aus den nebenstehenden Figuren wohl verständlich ist:

I. *II.* *III.*

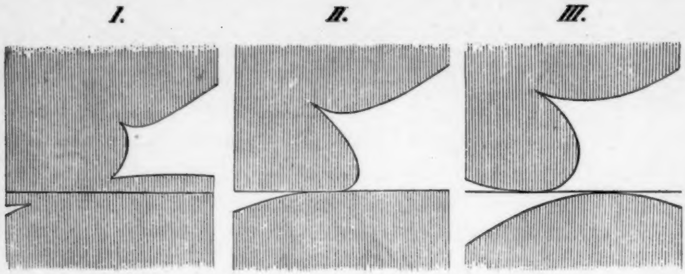


Dabei ist es nun völlig deutlich, dass die in Figur I und III zweifach zusammenhängende Fläche im Falle II nullfach zusammenhängend geworden ist.

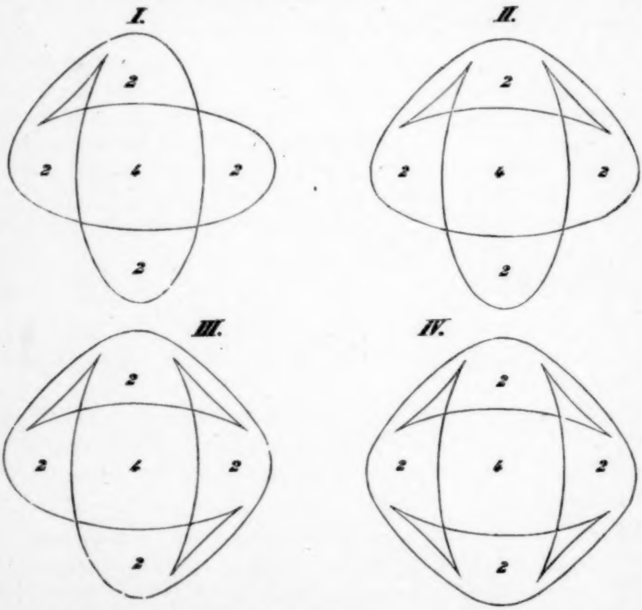
Den Fall der Curve dritter Classe mit Wendetangente endlich mag man in der Art als Zwischenfall zwischen den zweierlei Curven mit Doppeltangente betrachten, wie die Zeichnung auf der folgenden Seite veranschaulicht.

Es mag dadurch insbesondere deutlich werden, warum man eine Wendetangente als Rückkehrtangente unserer Fläche aufzufassen hat. Denn sie entsteht in Figur II aus der Doppelkante von Figur I. Es würde in gewissem Sinne consequenter sein, die Doppeltangente in Figur III als isolirte Curve unserer Fläche beizubehalten, statt sie durch ihre beiden Berührungspunkte zu ersetzen; man müsste dann nur die

Festsetzung hinzufügen, dass eine solche isolirte Curve für den Zusammenhang der Riemann'schen Fläche nicht in Betracht kommt, wodurch das Resultat dasselbe bleibt.



Von Curven *vierter* Classe will ich nur einige Beispiele angeben, welche sich der Anschauung besonders leicht darbieten. Eine solche Curve werde zunächst als in zwei Kegelschnitte zerfallen vorausge-

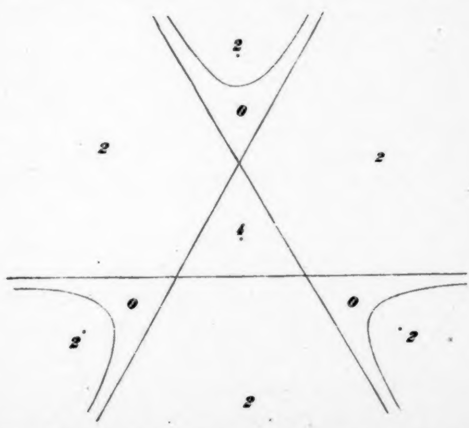


setzt; man nehme für diese Kegelschnitte zwei Ellipsen mit vier gemeinsamen Punkten. Die auf sie bezügliche Fläche besteht dann aus

zwei Ellipsoiden, welche sich zum Theil überlagern, aber keinen Punkt mit einander gemein haben, womit eben dem Umstande, dass man es mit einer reducibeln Curve vierter Classe zu thun hat, Ausdruck gegeben wird und geradezu diese Reducibilität bewiesen ist. Man construire nun die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen und und wende auf dieselben (auf eine oder mehrere) den soeben bei den Curven dritter Classe bereits gebrauchten Auflösungsprocess an. Ich will hier nur diejenigen Zeichnungen hinsetzen, welche man erhält, wenn man die im Endlichen gelegenen Theile der bez. gemeinsamen Tangenten in reelle Curvenzweige spaltet. Die beigesetzten Zahlen beziehen sich auf die Zahl der Blätter, mit der die Fläche die verschiedenen Theile der Ebene überdeckt; die nicht bezeichneten Theile der Ebene sind nullfach überdeckt, insbesondere also die kleinen, mit zwei Spitzen versehenen Dreiecke im Innern der bez. Zeichnungen

Die so hergestellten Flächen sind in der That bez. 0-, 2-, 4-, 6-fach zusammenhängend, wie sie es sein müssen, da sie sich auf Curven vierter Classe mit 3, 2, 1, 0 Doppeltangenten beziehen, die also $p = 0, 1, 2, 3$ ergeben.

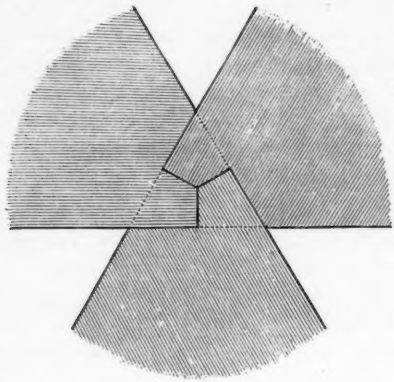
Die bisher betrachteten Flächen zeichnen sich durch ihre grosse Uebersichtlichkeit, durch das Fehlen jeder Verzweigung aus. Eine solche wird aber im Allgemeinen vorhanden sein, und ich darf mit Bezug hierauf als ein Beispiel das Folgende anführen. Es sei eine Curve dritter Ordnung mit isolirtem Doppelpunkte gegeben; als Classencurve aufgefasst ist sie vom vierten Grade und dadurch singulär,



dass sie drei reelle Wendetangenten besitzt. Eine solche Curve werde in der Art gezeichnet, dass ihre Wendetangenten zugleich ihre Asympto-

ten sind, wo dann der isolirte Punkt in dem Innern des von den drei Asymptoten gebildeten Dreiecks liegen wird.

Es sind der Figur bereits die Zahlen zugesetzt, welche angeben, wie viele imaginäre Tangenten von den Punkten der verschiedenen Theile der Ebene an die Curve gehen. Das Innere des Asymptotendreiecks wird, wie man sieht, viermal von der Fläche überdeckt, während es die angrenzenden Partieen der Ebene nur zweimal oder nullmal sind. Dies wird möglich, indem man der Fläche eine von dem isolirten Doppelpunkte ausgehende Verzweigung ertheilt, wie sie etwa, in symmetrischer Weise, durch die beigesetzte Zeichnung veranschaulicht ist.



Erlangen, im Februar 1874.

Ueber Normalen an algebraische Flächen.

Von Rud. Sturm in Darmstadt.

In meinem Aufsatze Bd. VI S. 241 dieser Annalen habe ich die Wahrscheinlichkeit des Satzes ausgesprochen, dass *die Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine Fläche stets gleich der Summe* $n+r+m$ *ist, wenn* n *die Ordnung,* r *der Rang (Grad des Tangenten-Complexes) und* m *die Classe der Fläche ist**). Ich will in Folgendem einen Beweis dieses Satzes mittheilen und dann noch einige andere Untersuchungen anknüpfen, unter anderm *Ordnung und Classe der Fläche der Krümmungscentren* angeben.

1. Nennen wir l *die fragliche Zahl*, so ist ersichtlich der Grad n' derjenigen geradlinigen Fläche N, welche von den einer beliebigen Geraden g begegnenden Normalen der Fläche $F=(n, r, m)$ erzeugt wird, gleich $l+r$, denn in einer Ebene liegen im Allgemeinen r Normalen von F und die Gerade g ist eine l-fache Leitgerade von N.

Die Torse, welche der F längs eines ebenen Schnitts C umschrieben ist, ist bekanntlich r^{ter} Classe, folglich die Polarcurve ihres unendlich fernen Schnitts in Bezug auf C_∞^2 von der Ordnung r; dieselbe ist eindeutig auf C bezogen, demnach erzeugen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, d. h. die Flächennormalen längs C nach Chasles (C. R. Bd. 62) eine Fläche (Normalie) vom Grade $n+r$; da also $n+r$ von diesen Normalen von der Geraden g getroffen werden, so *ist die Curve* B *der Fusspunkte derjenigen Normalen von* F, *welche* g *treffen, von der Ordnung* $v=n+r$, indem auf jedem ebenen Schnitte von F v Fusspunkte liegen. B begegnet der g in den n Punkten $S=(F, g)$ und jede Ebene durch g enthält ausserdem r Fusspunkte, weil so viele Normalen.

---

*) Ich habe nachträglich bemerkt, dass schon Salmon im Jahre 1847 (Cambridge and Dublin Math. Journ. Bd. III, S. 47) diesen Satz gefunden, jedoch nur für den Fall, dass der Punkt unendlich fern ist, bewiesen und auf die endlichen Punkte übertragen hat (vgl. Nr. 2.).

Der Kegel, der der Fläche F aus einem beliebigen Punkte umschrieben ist, ist m^{ter} Classe, seine Berührungscurve r^{ter} Ordnung, mithin die Fläche der Normalen von F längs dieser Curve vom Grade $r+m$, woraus wiederum hervorgeht, dass *die Torse T der Tangentenebenen von F, deren Normalen die g treffen und welche also in den Punkten von B berühren, von der Classe $\mu_1 = r + m$ ist.* Daher ist die Polarcurve ihres unendlich fernen Schnitts in Bezug auf C^2_∞, welche eindeutig auf B bezogen ist, von der Ordnung $r+m$; und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, also *die Normalen, welche g treffen, erzeugen eine Fläche N vom Grade $n' = n + r + r + m$* $= n + 2r + m$; da diese Grösse andererseits gleich $l + r$ ist, so ergiebt sich

$$l = n + r + m,$$

wie zu beweisen war.

2. Durch den unendlich fernen Punkt von g — sowie überhaupt durch jeden unendlich fernen Punkt — gehen m endliche Normalen, welche den auf g senkrechten Berührungsebenen zugehören, und $n+r$ in E_∞ gelegene, nämlich die von jenem Punkte an die unendlich ferne Curve C_∞ von F gehenden; denn alle (in E_∞ gelegenen) Normalen dieser Curve sind, wie bekannt, Flächennormalen.

Der Schnitt von N mit E_∞ besteht aus diesen $n+r$ Normalen und der oben genannten Polarcurve der unendlich fernen Curve der Torse T.

3. *Die Anzahl h der Normalen von F, welche zwei Gerade treffen, ist $n' = n + 2r + m$*; mithin begegnen sich die zwei Geraden zugehörigen Curven B in $n + 2r + m$ Punkten. Schneiden sich die beiden Geraden, so sind $n + r + m$ von diesen Punkten die Fusspunkte der aus dem Schnittpunkte gefällten Normalen, die r übrigen gehören den r Normalen in der Ebene der beiden Geraden an.

4. Suchen wir die Classe ϱ der Curve B, d. i. die Ordnung ihrer Tangentenfläche. Bei den Flächen 2. Ordnung kann B nur 4. Ordnung 8. Classe sein, da sie sich offenbar gegen beide Schaaren gleichartig verhalten muss und ein Doppel- oder Cuspidalpunkt nicht möglich ist.

Es sei α die Zahl der Osculanten (Wendetangenten) von F, welche in einer beliebigen Ebene liegen, σ dagegen die der Osculanten, welche durch einen beliebigen Punkt gehen (beide Zahlen bekanntlich dualistisch zu einander). Die Ordnung der Torse, welche der Fläche F längs eines ebenen Schnitts C umschrieben ist, ist $n + \alpha$, denn der Schnitt dieser Torse mit der Ebene von C besteht aus C und deren α Osculanten.

Das dualistische Resultat hiervon ist: Die Classe der Berührungscurve des der Fläche aus einem Punkte O umschriebenen Kegels ist $m + \sigma$; von den Tangenten dieser Curve, welche z. B. einer durch O

gehenden Geraden begegnen, liegen m in den durch diese Gerade an die Fläche geführten Berührungsebenen, die übrigen sind die σ Osculanten, welche von O ausgehen. Bemerken wir weiter: jede Tangente der Curve C und die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der längs C umschriebenen Torse sind conjugirte Tangenten, und ebenso jede Tangente, die durch O geht, und die Tangente der Berührungscurve des aus O der Fläche umschriebenen Kegels in dem Berührungspunkte jener sind conjugirte Tangenten.

Dreht man nun eine Ebene um eine Gerade g und construirt längs jeden Schnittes mit F die umschriebene Torse, so lautet die Frage: „wie viele dieser Torsen gehen durch einen Punkt O?“ mit andern Worten: „wie viele Tangenten von F gehen durch O, deren conjugirte die Gerade g treffen?“ oder „welches ist die Classe der Berührungscurve des aus O umschriebenen Kegels?“.

Man sieht also, dass $m + \sigma$ der genannten Torsen durch einen Punkt gehen.

5. Sei nun g die Leitgerade unserer Normalenfläche N; l_∞ die allen zu g normalen Ebenen gemeinsame Gerade, T_∞ ein Punkt derselben; π die Ebene durch g, welche auf der Richtung nach P_∞ normal ist. Die längs des Schnitts derselben der Fläche umschriebene Torse trifft l_∞ in $n + \alpha$ Punkten P'_∞; umgekehrt durch jeden Punkt P'_∞ auf l_∞ gehen $m + \sigma$ der den Ebenen durch g zugehörigen Torsen; also giebt jeder P'_∞ $m + \sigma$ Punkte P_∞. Die Zahl der Coincidenzen ist demnach $n + m + \alpha + \sigma$. Durch jeden dieser Punkte gehen zwei unendlich nahe Berührungsebenen von F, deren Berührungspunkte sich auf derjenigen Ebene π befinden, welche zur Richtung nach dem Coincidenzpunkte normal ist, d. h. durch g gehen $n + m + \alpha + \sigma$ Ebenen, welche zwei unendlich nahe Normalen enthalten.

Da nun die Fläche der Krümmungscentren von F bekanntlich von allen den Ebenen eingehüllt wird, in denen zwei von den r Flächennormalen unendlich nahe sind, so hat sich das Resultat ergeben:

Die Fläche der Krümmungscentren von F ist von der Classe $m'' = n + m + \alpha + \sigma$.

6. Die Ebenen durch g mit zwei unendlich nahen Normalen liefern weiter ebenso viele Tangenten der Curve B, welche die Gerade g treffen; dazu kommen noch die $2n$ Tangenten von B, welche von den n Punkten S herrühren; daraus folgt, dass *die Classe ϱ der Curve B gleich* $3n + m + \alpha + \sigma$ *ist.* Wir erkennen ferner, dass wir in den durch g gehenden Ebenen mit zwei unendlich nahen Normalen zugleich diejenigen Torsallinien von N erhalten, deren Spitzen*) nicht auf g liegen; es sind deren also $q = n + m + \alpha + \sigma$.

*) Hinsichtlich dieser Benennungen sehe man meinen am Anfang genannten Aufsatz Nr. 20.

Weil ferner die Fläche N und die Curve B eindeutig auf einander bezogen sind, so besteht, *wenn r' der Rang von N ist,* folgende Relation:

$$2(n'-1)-r'=2(\nu-1)-\varrho,$$

also

$$r'=2(n'-\nu)+\varrho=3n+2r+3m+\alpha+\sigma.$$

Mithin besitzt die Fläche N ausser der l-fachen Leitgeraden g noch eine Doppelcurve D von der Ordnung

$$\delta=\frac{r}{2}(2n+3r+2m)-\tfrac{3}{2}(n+r+m)-\tfrac{1}{2}(\alpha+\sigma).$$

Auf ihr liegen die Spitzen der oben erwähnten q Torsallinien; jede Ebene durch g trifft sie in den $\frac{1}{2}r(r-1)$ Schnittpunkten ihrer r Normalen; folglich begegnet D der Geraden g in

$$d=r(n+r+m)-\tfrac{1}{2}(3n+2r+3m)-\tfrac{1}{2}(\alpha+\sigma)$$

Punkten. In diesen Punkten von g begegnen sich zwei endlich verschiedene Normalen, deren Ebene durch g geht, während sonst von den $\frac{1}{2}l(l-1)$ Ebenen, welche durch je zwei der l von einem Punkte auf g ausgehenden Normalen gebildet werden, keine durch g geht.

7. An der eben citirten Stelle meines Aufsatzes habe ich gezeigt, dass die Gesammtzahl der Torsallinien einer Regelfläche von dem Grade n' und dem Range r' gleich $2(r'-n')$ ist. Mithin hat die Fläche N im Ganzen $4(n+m)+2(\alpha+\sigma)$ Torsallinien, folglich bleiben nach Abzug der q oben erhaltenen noch übrig $3(n+m)+\alpha+\sigma$ Torsallinien, welche ihre Spitze auf g — also in deren Cuspidalpunkten — haben. Dies sind Normalen der Fläche, welche von einer unendlich nahen und zwar auf g getroffen werden, ohne dass die Ebene beider durch g geht.

Diese Begegnungspunkte sind aber ersichtlich die auf g gelegenen Punkte der Fläche der Krümmungscentren; mithin *ist die Ordnung n'' der Fläche der Krümmungscentren gleich* $3(n+m)+\alpha+\sigma$*).

Nach einer brieflichen Bemerkung des Herrn Schubert ist also $n''=(3n+\alpha)+(3m+\sigma)$ gleich der Summe der Ordnungen der Evoluten zweier ebenen Schnitte, welche beziehlich in die gegebene Fläche und in deren Reciprocalfläche gemacht sind.

Die Fläche der Krümmungscentren ist die Brennfläche des Systems der Normalen, welches von der Ordnung $n+r+m$ und der Classe r ist; folglich muss**)

---

*) Durch Abzählung im Unendlichen hat, wie ich neuerdings (April 1874) gesehen habe, Herr Samuel Roberts dies Resultat schon im vorigen Jahre gefunden (Proceedings of the London Mathematical Society, 13. März 1873).

**) Klein, in S. Lie's Aufsatz Göttinger Nachr. 1870, Nr. 4.

$$n'' - m'' = 2(n + r + m - r)$$
$$= 2(n + m)$$

sein, wie auch auf der Stelle ersichtlich ist.

8. Es sei g' irgend eine andere Gerade; durch jeden Punkt von g gehen $n + r + m$ Normalen; ihre Fusspunkte erzeugen mit g' ebenso viele Ebenen; die Normalie längs des Schnitts jeder dieser Ebenen ist $(n + r)^{\text{ten}}$ Grades und trifft g noch mit $n + r - 1$ Normalen.

Also jedem Punkte auf g entsprechen so $(n + r + m)(n + r - 1)$ andere Punkte und umgekehrt; von den $2(n + r + m)(n + r - 1)$ Coincidenzpunkten sind die einen — der Zahl nach v — so beschaffen, dass von jedem zwei endlich verschiedene Normalen ausgehen, deren Fusspunkts-Verbindungsgerade die g' trifft, und diese Punkte sind doppelt zu rechnen, weil bei jedem derselben zwei von den $n + r + m$ Ebenen und damit zwei von den $n + r + m$ entsprechenden Gruppen von je $n + r - 1$ Punkten identisch sind, also jeder dieser Punkte sich gleich mit zwei seiner entsprechenden Punkte vereinigt hat; die andern sind solche Punkte, von deren Normalen eine und die unendlich nahe vom Nachbarpunkte auf g so beschaffen sind, dass ihre Fusspunkts-Verbindungsgerade, also eine Tangente von B, die Gerade g' trifft. Die Zahl der letzteren ist demnach ϱ. Folglich ist

$$2v + \varrho = 2(n + r + m)(n + r - 1),$$

demnach

$$v = (n + r + m)(n + r) - \tfrac{1}{2}(5n + 2r + 3m) - \tfrac{1}{2}(\alpha + \sigma).$$

Fällt man also aus jedem Punkte von g die l Normalen an F, verbindet deren Fusspunkte unter einander, so erhält man durch diese Verbindungsgeraden eine Fläche vom Grade v. Die Curve B ist auf derselben offenbar $(n + r + m - 1)$-fach; folglich wird die Fläche von der Geraden g ausserhalb der n Punkte S noch in $v - n(n + r + m - 1)$ Punkten getroffen; das sind die d Begegnungspunkte der Doppelcurve D von N mit g.

Da die Formeln für $l, n', r', m'', n'', d, \delta$ in Bezug auf n und m einerseits und α und σ andererseits symmetrisch sind, so *haben diese Grössen für zwei polare Flächen denselben Werth.*

9. Die in den meisten Formeln auftretende Summe $\alpha + \sigma$ lässt sich nicht als lineare Function von n, r, m darstellen. Bei den allgemeinen Flächen n^{ter} Ordnung ist $\alpha + \sigma = m + 2r - 3n$; dies stimmt aber, wie ich mich bei mehreren früher von mir untersuchten Flächen mit Doppelcurven*) überzeugt habe, bei denselben nicht, vielmehr ist, wie sich bis jetzt empirisch gezeigt hat, die rechte Seite kleiner als die linke und zwar um die doppelte Zahl der auf der Dop-

*) Math. Ann. Bd. IV, S. 249.

pelcurve befindlichen Cuspidalpunkte. Auch ist die Ungleichheit a priori ersichtlich, da die Summe $\alpha + \sigma$ durch polare Transformation in sich selber übergeht, während dies bei $m + 2r - 3n$ ja nicht der Fall ist. Also muss jene Summe in den Formeln bleiben.

Für eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung verwandeln sich die Formeln, weil $r = n(n-1)$, $m = n(n-1)^2$, $\alpha = 3n(n-2)$, $\sigma = n(n-1)(n-2)$, also $\alpha + \sigma = n(n+2)(n-2) = n(n^2-4)$ ist, in folgende:

$$l = n(n^2 - n + 1), \quad v = n^2, \quad \mu_1 = n^2(n-1), \quad n' = h = n^3,$$
$$\varrho = 2n^2(n-1), \quad r' = 4n^2(n-1), \quad m'' = 2n(n^2 - n - 1),$$
$$\delta = \tfrac{1}{2}n(2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 2n + 1), \quad d = n^2(n^3 - 2n^2 + 1),$$
$$n'' = 2n(n-1)(2n+1), \quad v = n(n-1)(n^3 - n + 1)\ ^{*)}.$$

Die Formeln für l, n', r', m'', d, δ, n'' gelten wegen ihrer Symmetrie mit Vertauschung von n in m *für eine allgemeine Fläche m^{ter} Classe*, weil ebenso $r = m(m-1)$, $n = m(m-1)^2$, $\alpha = m(m-1)(m-2)$, $\sigma = 3m(m-2)$ ist.

Bei einer windschiefen Regelfläche ist $m = n$, $\sigma = \alpha$, also $l = 2n + r$ **), $v = \mu_1 = n + r$, $n' = h = 2(n + r)$, $\varrho = 2(2n + \alpha)$, $r' = 2(3n + r + \alpha)$, $m'' = 2(n + \alpha)$, $n'' = 2(3n + \alpha)$.

10. Der Schnitt der Fläche der Krümmungscentren (n''^{ter} Ordnung) durch E_∞ ***) besteht aus 3 Theilen. Der eine ist, weil alle Normalen von C_∞ Flächennormalen sind, die Evolute dieser Curve (n^{ter} Ordnung, r^{ter} Classe), welche bekanntlich von der Classe $n + r$ und der Ordnung $3n + \alpha$ ist; dieselbe enthält die auf diesen unendlich fernen Normalen befindlichen Krümmungscentra, insofern C_∞ deren

*) Der Werth für l findet sich zuerst angegeben von Terquem Journ. v. Liouville sér. I, t. V, p. 175; geometrische Beweise haben noch gegeben F. August, Journ. f. Math. Bd. 68, S. 245, und Mannheim, Comptes rendus 1870, erste Hälfte, p. 1025; F. August hat auch den Werth von v ermittelt und zugleich gefunden, dass (bei einer allgemeinen Fläche) die Curve B die Grundcurve eines Büschels von Flächen n^{ter} Ordnung ist; Mannheim hat noch den Werth für n' oder h hinzugefügt und Darboux, Comptes rendus 1870 erste Hälfte p. 1328, die Werthe für ϱ, m'', n''; die zwei letzteren sind gleichzeitig von dem der Wissenschaft als Opfer des Krieges so früh entrissenen L. Marcks gefunden: Math Ann. Bd. V, S. 29. Mit der Darboux'schen Note, von welcher ich erst nach Vollendung meiner Untersuchungen Kenntniss erhielt, werden sich in meinem Aufsatze mancherlei übereinstimmende Schlüsse finden; immerhin aber hoffe ich, auch ausser der wesentlichen Verallgemeinerung, doch einiges Neue zu bieten.

**) Vgl. meinen Aufsatz, Math. Annalen Bd. VI, S. 254.

***) Vgl. Marcks a. a. O., wo die Untersuchung für den Fall der allgemeinen Flächen n^{ter} Ordnung mit zum Theil ähnlichen Schlüssen gemacht wird, nur dass dort aus der Ordnung des unendlichfernen Schnitts erst auf die der Fläche geschlossen wird, in ähnlicher Weise wie es bei Salmon in Bezug auf die Zahl l geschieht.

Hauptnormalschnitt ist. Der zweite Theil wird von den zweiten Krümmungscentren derselben Normalen gebildet, welche zu den endlichen Hauptnormalschnitten der Punkte von C_∞ gehören.

Die Ordnung dieser Curve kann auf folgende Weise ermittelt werden: man denke sich einen von dem unendlich fernen Schnitt unendlich wenig verschiedenen ebenen Schnitt; von demselben kann angenommen werden, dass er auf den zweiten Krümmungslinien, welche durch die Punkte von C_∞ gehen, je die unendlich nahen Punkte enthält. Die Normalie längs desselben ist vom Grade $n+r$; n Erzeugende von ihr liegen in E_∞, welche ihre Fusspunkte in den beiden Schnitten gemeinsamen Punkten haben; der übrige Schnitt dieser Normalie mit E_∞, eine Curve r^{ter} Ordnung, ist der gesuchte zweite Theil. Diese Curve r^{ter} Ordnung ist übrigens der Curve C_∞ in Bezug auf C_∞^2 polar. Der dritte Theil endlich enthält die unendlich fernen Krümmungscentren der Punkte der parabolischen Curve; es ist leicht einzusehen, dass diese dritte Curve die Polarcurve (in Bezug auf C_∞^2) des unendlich fernen Schnitts der Torse der stationären Berührungsebenen (spinode torse) ist, welche ja längs der parabolischen (Wende-) Curve berührt. Ist also die Classe dieser Torse ι, so ist dies die Ordnung der dritten Curve; es ist bekannt, dass $\iota = 3(m-r)+\sigma$. Damit nun die Ordnung $n'' = 3(n+m)+\alpha+\sigma$ der Fläche der Krümmungscentren gleich der Summe der Ordnungen $3n+\alpha$, r und $3(m-r)+\sigma$ sei, muss die mittelste Curve dreifach gezählt werden; sie ist mithin Rückkehrcurve*) und zeigt sich so die Cuspidalität, die bekanntlich immer bei Normalenproblemen im Unendlichen auftritt. Interessant ist, wie die beiden Summanden von $\alpha+\sigma$ sich hier bez. auf den ersten und dritten Bestandtheil vertheilen.

11. *Die Gerade g, welche wir als Leitgerade für Normalen von F aufgefasst haben, sei nun selbst eine Normale.* Ein ebener Schnitt, der nicht durch den Fusspunkt von g geht, zeigt, dass die Fusspunktscurve B der die g treffenden Normalen nach wie vor $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung ist; geht aber der ebene Schnitt durch den Fusspunkt P von g, so gehört g zur Normalie dieses Schnittes, welche $(n+r)^{\text{ten}}$ Grades ist, und wird, wie bekannt, von $n+r-2$ andern Erzeugenden derselben getroffen. Dies beweist, dass ein solcher ebener Schnitt der Curve B ausserhalb P nur $(n+r-2)$-mal begegnet, dass also *P ein Doppelpunkt auf B ist, und die Normale g von zwei unendlich nahen Normalen getroffen wird.* In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass die

*) Vgl. Steiner, Journ. f. Math. Bd. 49, S. 349 u. 340. Auf ähnliche Weise wie oben können auch die Rückkehrkegelschnitte der Fläche der Krümmungscentren einer F^2 in den Hauptdiametralebenen ermittelt werden, welche Clebsch, Journ. f. Math. Bd. 62, S. 64 ff., gefunden hat.

längs B umschriebene Torse T noch $(r+m)^{\text{ter}}$ Classe ist, die Berührungsebene τ von F in P zur doppelten Berührungsebene hat. Die Polarcurve (in Bezug auf C_∞^2) des unendlich fernen Schnitts von T, welche also einen Doppelpunkt hat, ist wie oben eindeutig auf die Curve B bezogen und zwar so, dass sich die beiden Doppelpunkte entsprechen. *Das Erzeugniss N der sich auf die Normale g stützenden andern Normalen ist also, wie oben, vom Grade $n+2r+m$*; g aber ist nun sowohl Leitgerade als auch Erzeugende, und unendlich nahe an ihr sind zwei andere Erzeugende, so dass *N längs g von zwei Ebenen „torsal" berührt wird. In jedem Punkte von g wird N von $n+r+m+1$ Berührungsebenen berührt, von denen zwei die beiden „torsalen" sind, die andern von den $n+r+m-1$ Erzeugenden herrühren, die durch den Punkt gehen.* Mithin liegt g auf N $(n+r+m+1)$-fach: als Leitgerade $(n+r+m-1)$-fach, als Erzeugende doppelt; in jeder Ebene durch $'g$ liegen $r-1$ Erzeugende. Bei F^2 ist also N vom 8. Grade und g auf ihr 7-fach, was freilich von der Angabe des Herrn Geiser abweicht*).

Dass die beiden Richtungen, in denen die Fusspunkte der Nachbarnormalen liegen, welche g schneiden, also die Tangenten der durch P gehenden Krümmungslinien, zu einander normal sind, ist leicht in folgender Weise zu ersehen: Sei P_1 einer dieser Fusspunkte, g_1 seine Normale, so steht die Ebene (g, g_1) auf der Schnittlinie der beiden Berührungsebenen τ und τ_1 in P und P_1 senkrecht, mithin auf der conjugirten Tangente von PP_1; also die Tangente einer Krümmungslinie steht stets auf ihrer conjugirten senkrecht. Da es nun durch jeden Punkt zwei Krümmungslinien und im Allgemeinen in der Involution der conjugirten Tangenten nur ein Paar zu einander rechtwinkliger conjugirten giebt, so erhellt, dass *die Krümmungslinien-Tangenten diese zu einander rechtwinkligen conjugirten Tangenten sind.* Umgekehrt ist leicht darzuthun, dass, wenn PP_1 und PP_2 die beiden rechtwinkligen conjugirten Tangenten in P sind, dann die Normale in P von denen in P_1 und P_2 getroffen werden muss**).

---

*) Sulle normali all' ellissoide, Annali di Matematica Ser. II, t. I, p. 327.

**) Ueberhaupt scheint diese Definition der Krümmungslinien, dass jede ihrer Tangenten zu ihrer conjugirten senkrecht ist, diejenige zu sein, von der aus wohl am besten auf rein geometrischem Wege dieses Gebiet zu bearbeiten ist. Aus ihr ergeben sich z. B. die bekannten Sätze, dass zwei auf einander folgende Berührungsebenen einer der Fläche längs einer Krümmungslinie umschriebenen Torse gegen die zugehörige Osculationsebene der Krümmungslinie gleiche Neigung haben (also wenn die Krümmungslinie eben ist, alle Ebenen der Torse gegen die Ebene der Krümmungslinie, Joachimsthal's Satz), ferner dass, wenn eine Linie für zwei Flächen Krümmungslinie ist, dieselben sich in ihr unter constantem Winkel durchschneiden, und dessen Umkehrungssatz auf rein geometrischem Wege in sehr einfacher Weise.

Die Erzeugenden der Torse T, in denen sie von τ berührt wird, sind in Folge dessen, weil sie zu den Tangenten von B im Doppelpunkte, also den Krümmungslinien-Tangenten conjugirt sind, mit ihnen identisch.

12. *Ein Nabel- oder Kreispunkt ist ein Punkt, bei welchem die Involution der conjugirten Tangenten aus lauter Paaren zu einander rechtwinkliger Strahlen besteht. Die (imaginären) Osculanten* — auf F^2 die durch den Punkt gehenden Geraden — *begegnen also* C_∞^2, *und die Normale des Nabelpunktes wird von allen Nachbarnormalen getroffen. Sei* g *nun eine solche Nabelpunkts-Normale*; die Curve B der Fusspunkte der sie treffenden (im Allgemeinen endlich von ihr verschiedenen) Normalen ist noch von der Ordnung $n+r$; jeder ebene Schnitt, der durch den Nabelpunkt P gelegt ist, zeigt, dass B mit ihm ausserhalb P nur $n+r-3$ Punkte gemein hat; denn die Normale von P ist auf der Normalie dieses Schnittes, wie er auch sonst gelegt sei, Torsallinie, trifft demnach nur $n+r-3$ endlich entfernte Erzeugenden der Normalie. Also *ist der Nabelpunkt auf der Curve* B, *die seiner Normale zugehört, ein dreifacher Punkt, d. h. drei Richtungen gehen von ihm aus, in denen auch noch die zweite Normale der des Kreispunktes begegnet**).

Die längs B umschriebene Torse T hat ebenfalls noch die Classe $r+m$; die Berührungsebene des Nabelpunktes berührt sie dreifach. *Die Fläche* N *der (im Allgemeinen endlich von* g *verschiedenen) Normalen, welche die Normale* g *des Kreispunktes treffen, hat*, wie im allgemeinen Falle, *den Grad* $n+2r+m$; *sie hat die* g *zur* $(n+r+m-1)$-*fachen Leitgeraden*, weil von jedem ihrer Punkte $n+r+m-1$ Normalen ausgehen, was auch so viele Berührungsebenen giebt; ausserdem ist g noch dreifache Erzeugende von N, und dem entsprechen 3 *Ebenen, welche* — von g mit den 3 oben genannten unendlich nahen Normalen gebildet — *längs* g, *also torsal berühren*; in jeder Ebene durch g liegen — ausser g und der unendlich nahen — noch $r-2$ Normalen, woraus sich ebenfalls die $(n+r+m+2)$-fachheit der g auf N ergiebt.

13. Bei *den Flächen* 2. *Grades* gestaltet sich dies durch Degenerationen folgendermassen: Es ist von vornherein ersichtlich, dass, weil die Osculanten eines Nabelpunktes stets imaginär sein müssen, nur bei den Flächen mit imaginären (punktirten) Geraden reelle Nabelpunkte vorhanden sind; Nabelpunkte sind überhaupt bei einer Fläche 2. Grades die Berührungspunkte der 12 Tangentialebenen, welche durch die 6 Seiten des durch C_∞^2 und C_∞, die unendlich ferne Curve von F^2,

---

*) Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raumes (erste Aufl.), II, S. 46.

constituirten Vierecks an F^2 gehen; von diesen 6 Seiten sind nur zwei Gegenseiten reell, und da dieselben F^2 jedenfalls in imaginären Punkten treffen, so sind die 4 von ihnen ausgehenden Berührungsebenen nur bei den Flächen mit imaginären Geraden reell. Die 4 durch zwei Gegenseiten gehenden Tangentialebenen gehen stets durch den unendlich fernen Punkt einer Axe der Fläche, also liegen die 4 ihnen entstammenden Nabelpunkte auf derselben Haupt(diametral)ebene; folglich gilt dies auch für die vier reellen Nabelpunkte einer Fläche mit imaginären Geraden.

Da ein Nabelpunkt (P) stets auf einer Hauptebene liegt, so fällt seine Normale (g) in diese Ebene; die Normalen des Hauptschnitts sind nun sämmtlich Flächennormalen; also löst sich von der einer Nabelpunkts-Normale zugehörigen Curve B (4. Ordnung) der ganze Hauptschnitt, von der zugehörigen Torse T (4. Classe) der längs desselben umschriebene Cylinder und von der Normalenfläche N (8. Grades) die Evolute des Hauptschnitts (als ebene Curve 4. Classe, als Linienfläche 4. Grades) ab. Der übrig bleibende Theil von B bez. von T besteht aus den beiden durch den Nabelpunkt gehenden Flächengeraden g' und l', bez. deren Ebenenbüscheln; denn weil diese Geraden die C^2_∞ treffen und die Verbindungslinie dieser Begegnungspunkte G'_∞ und L'_∞, also die unendlich ferne Gerade der Berührungsebene des Nabelpunkts, dem unendlich fernen Punkte G_∞ der Normale g in Bezug auf C^2_∞ polar ist, also $G_\infty G'_\infty$ und $G_\infty L'_\infty$ den C^2_∞ tangiren, so fallen die Normalen sämmtlicher Punkte von g' bez. l' in die Ebene (g, g'), bez. (g, l'), treffen also g und umhüllen in jeder dieser Ebenen eine die g berührende (stets imaginäre) Parabel, in welche demnach das Paraboloid, das sonst von den Normalen längs einer Geraden der Fläche erzeugt wird, ausgeartet ist. Diese Parabel wird auch von g' bez. l' tangirt, also sind 24 Geraden der Fläche Normalen, nämlich die durch die Nabelpunkte gehenden; die zugehörige Tangentialebene ist die durch die Gerade und die Normale des Nabelpunkts bestimmte. Die beiden Parabeln vervollständigen die Evolute zur vollen Fläche 8. Grades; die Normale g, die Evolute und beide Parabeln berührend, zeigt sich als dreifache Erzeugende; der dreifache Punkt auf B und die dreifache Berührungsebene von T kommt dadurch zu Stande, dass P und seine Berührungsebene τ zu jedem der drei Bestandtheile von B bez. T gehört. In jeder Ebene durch g liegt im Allgemeinen ausser g und der unendlich nahen keine Normale mehr, weil $r - 2$ hier gleich 0 ist; die 6 Normalen aber, welche ein Punkt von g immerhin liefern muss, sind g, die drei weitern Tangenten der Evolute und je die andere Tangente der Parabeln in (g, g') und (g, l').

Es liefert nun zwar jeder Nabelpunkt zwei Parabelebenen, es ergeben sich aber nicht 24 Parabelebenen, sondern nur 8, nämlich jede

der 4 Tangenten des Kreises C_∞^2 in seinen Begegnungspunkten mit C_∞ bestimmt mit den beiden Geraden von F^2, die durch ihren Berührungspunkt gehen, zwei derartige Parabelebenen, so dass 8 mal je drei Normalen von Nabelpunkten, die nicht derselben Hauptebene angehören, in derselben Ebene liegen. Die drei Nabelpunkte befinden sich auf derselben Geraden von F^2 und sind also deren Durchgangspunkte durch die Hauptebenen. Es ergeben sich auf diese Weise die singulären Ebenen des Normalensystems einer F^2, welches 6. Ordnung und 2. Classe ist; nämlich 4 mit Curven 4. Classe (E_∞ und die Hauptebenen) und 8 mit Curven 2. Classe, welche Ebenen also vierfache, bez. doppelte Berührungsebenen der Fläche der Krümmungscentren sind*).

14. Da die Flächen höherer Ordnung im Allgemeinen nicht Ebenen besitzen, welche den Hauptebenen der Flächen F^2 entsprechen, und da auch die für die Nabelpunkte einer F^2 eben entwickelten Eigenschaften wesentlich auf dem Umstande beruhen, dass die Osculanten ganz der Fläche angehören, so *lässt sich über singuläre Ebenen der Normalensysteme der Flächen höherer Ordnung nur die eine allgemeine Eigenschaft angeben, dass die E_∞ stets eine solche mit einer Curve $(n+r)^{ter}$ Classe ist* (Nr. 10).

Hingegen muss natürlich für die (windschiefen) *geradlinigen Flächen* überhaupt etwas Aehnliches sich aussagen lassen wie für die F^2. *Reelle Nabelpunkte kann eine solche Fläche,* weil ihre Osculanten stets reell sind, *nicht haben.* Es ist aber wieder ersichtlich, dass die *Normalen längs jeder der $2n$ (imaginären) Erzeugenden, welche C_∞^2 treffen***), *sich sämmtlich in der durch diese Erzeugende gelegten und C_∞^2 berührenden Ebene befinden und dort eine Parabel einhüllen, welche auch die Erzeugende berührt, so dass diese auch eine Normale ist und auf der genannten Ebene, obgleich in derselben gelegen, senkrecht steht.*

Jede dieser Erzeugenden g_i' geht durch eine Reihe (imaginärer) Nabelpunkte, deren Zahl gleich der nicht auf g_i' gelegenen Schnittpunkte von C_∞^2 mit der Fläche der zweiten Osculanten der Punkte von g_i' ist; diese zweiten Osculanten erzeugen aber die andere Schaar des Hyperboloids, welches mit der Regelfläche die betrachtete und zwei unendlich nahe Erzeugende gemein hat; also *liegen auf jeder der $2n$ Erzeugenden 3 Nabelpunkte,* und da auf andern Erzeugenden keine sich befinden, so *enthält jede Regelfläche n^{ten} Grades $6n$ (imaginäre) Nabelpunkte.*

---

*) Vgl. den Aufsatz von Clebsch über das Normalenproblem (Borchardt's Journ. Bd. 62) und Herrn Kummer's Abhandlung über Strahlensysteme 1. und 2. Ordnung § 11. (Abh. der Berliner Acad. von 1866).

**) Vgl. Darboux a. a. O.

Das einer Regelfläche zugehörige Normalensystem $(2n+r)^{ter}$ *Ordnung und* r^{ter} *Classe*, welches bekanntlich aus einer einfach unendlichen Schaar gleichseitiger hyperbolischer Paraboloide besteht, *enthält also eine singuläre Ebene* (E_∞) *mit einer Curve* $(n+r)^{ter}$ *Classe und* $2n$ *(imaginäre) singuläre Ebenen mit Curven zweiter Classe (Parabeln)* *). Diese Parabeln gehören zur Schaar der Paraboloide.

Weil jedes der Normalenparaboloide von der Geraden g, welche zur Leitgeraden einer Normalenfläche N gewählt ist, zweimal getroffen wird, so begegnet die der g zugehörige Curve B jeder Erzeugenden zweimal und zwei Ebenen der Torse T gehen durch jede Erzeugende.

15. *Wird eine Erzeugende g' selbst zur Leitgeraden einer Normalenfläche genommen*, so löst sich von B die Erzeugende g' selbst ab; es bleibt als eigentliche Curve B' der im Allgemeinen nicht auf g' gelegenen Fusspunkte von die g' treffenden Normalen eine Curve $(n+r-1)^{ter}$ Ordnung, welche jeder andern Erzeugenden zweimal, der g' aber in n Punkten begegnet, weil es in jeder Ebene durch g' $r-1$ Normalen giebt, deren Fusspunkte nicht auf g' liegen; $n-2$ dieser Punkte sind die Fusspunkte der Normalen auf den Doppelebenen durch g, deren jede eine der $n-2$ die g' treffenden Erzeugenden enthält.

Von der T sondert sich das Ebenenbüschel durch g' ab und es bleibt eine Torse T' $(n+r-1)^{ter}$ Classe, für die das Dualistische wie für B' gilt; endlich von N löst sich das Normalenparaboloid längs g' ab und es bleibt eine Fläche N' vom Grade $2(n+r-1)$, welche die g' zur $(2n+r-1)$-fachen Leitgeraden hat.

Darmstadt, den 12. October 1873.

Nachtrag.

1. Herr von Jonquières hat Comptes rendus Bd. 58 S. 570 *die Anzahl der Flächen eines Systems* (μ, ν, ϱ) *angegeben, welche eine allgemeine Fläche* F n^{ter} *Ordnung berühren*, nämlich

$$(1) \qquad N = n\,[\mu\,(n-1)^2 + \nu\,(n-1) + \varrho]$$

und daraus schon in einer andern Abhandlung Comptes rendus Bd. 61 S. 442, freilich nur durch das Princip der Continuität, die Folgerung gezogen, dass wenn die Fläche F nicht allgemein ist, sondern von der Ordnung n, dem Range r und der Classe m ist (nach meiner Be-

---

*) Wegen der zwei Schaaren subsumiren sich die F^2 nicht hierunter.

zeichnungsweise), die Zahl der sie berührenden Flächen im Systeme (μ, ν, ϱ) ist:

(2) $$N = \mu m + \nu r + \varrho n\,.$$

Herr Zeuthen hat in den Nouv. Ann. für 1868 S. 390 einen Beweis der Formel (1) für den Fall gegeben, dass das System aus Flächen 2. Grades besteht, und mit Hülfe derselben die bekannte Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine allgemeine Fläche von neuem gefunden.

Dieser Beweis lässt sich ohne irgend welche wesentliche Aenderung auch für die allgemeinere Formel (2) (wie Herr Zeuthen gewiss selbst bemerkt hat) benutzen, und ich will ihn in dieser Verallgemeinerung hier reproduciren.

Sei nach der Chasles'schen Benennung

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$$

der Modul für die Bedingung Z, d. h. in einem Systeme (μ, ν, ϱ) von Flächen 2. Ordnung gebe es $\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$ Flächen, welche der neunten Bedingung Z genügen, so hat Herr Zeuthen an der genannten Stelle folgende Formeln ermittelt:

$$\begin{aligned}
\psi\,(6\,p,\ \ P, Z) &= 10\,\gamma,\\
\psi\,(\ p,\ 6\,P, Z) &= 10\,\alpha,\\
\varphi\,(4\,p,\ 3\,P, Z) &= \ \ 8\,\alpha + 16\,\beta,\\
\chi\,(3\,p,\ 4\,P, Z) &= 16\,\beta + \ \ 8\,\alpha,
\end{aligned}$$

worin φ, χ, ψ die Anzahl der Kegel, der Kegelschnitte und der Oberflächen, die aus zwei Ebenen mit in zwei Punkten begrenzter Schnittlinie bestehen, in dem betreffenden Systeme sind; dabei ist freilich jeder solche Kegel, bez. Kegelschnitt achtfach gerechnet, weil sein Scheitel sich in 3 gegebenen Ebenen befindet, bez. seine Ebene durch 3 gegebene Punkte geht, wie dies Herr Zeuthen vorher auseinander gesetzt hat.

Wenn nun Z die Bedingung ist, dass die Fläche $F = (n, r, m)$ berührt werde, so findet sich zunächst leicht:

$$\psi\,(6\,p, P, F) = 10\,n\,,$$

weil es durch 6 Punkte 10 Ebenenpaare giebt, von denen jedes n-fach zu rechnen ist, indem der eine Grenzpunkt seiner Schnittgeraden deren Begegnungspunkt mit der Ebene, der andere je einer der n Schnittpunkte mit F ist; das Dualitätsprincip giebt:

$$\psi\,(p, 6\,P, F) = 10\,m.$$

Da sich ferner (in einer Ebene) wie bekannt stets $n + 2\,r$ Kegelschnitte befinden, welche eine Curve n^{ter} Ordnung und r^{ter} Classe, wie

z. B. den Schnitt der Ebene mit der Fläche F, und 4 Gerade berühren, so ist

$$\chi(3p, 4P, F) = 8(n + 2r)$$

und dualistisch

$$\varphi(4p, 3P, F) = 8(m + 2r).$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den obigen giebt für die Berührung mit F

$$\alpha = m, \quad \beta = r, \quad \gamma = n.$$

Also *befinden sich in einem Systeme* (μ, ν, ϱ) *von Flächen zweiten Grades stets* $m\mu + r\nu + n\varrho$ *Flächen, welche eine Fläche* (n, r, m) *berühren.*

2. Daraus ergiebt sich:

1) weil ein System concentrischer Kugeln alle drei Charakteristiken gleich 1 hat, so *ist die Anzahl der Normalen aus einem Punkte an eine Fläche* (n, r, m) *gleich* $n + r + m$;

2) es ist früher (Math. Ann. Bd. VI, S. 248) von mir gefunden worden, dass die Classe der Fusspunktsfläche einer Fläche gleich der Zahl der Rotationsparaboloide ist, welche denselben zwei Kegeln eingeschrieben sind und die Fläche F tangiren. In einem Systeme von Flächen zweiten Grades, die denselben zwei Kegeln eingeschrieben sind, befindet sich ein Ebenenpaar, bestehend aus den beiden gemeinsamen Berührungsebenen der Kegel, dessen Schnittgerade in den Scheiteln der Kegel begrenzt ist. Daher ist die Charakteristik μ dieses Systems nur 2; $\nu = 2$, $\varrho = 1$. Also ist die Zahl der Flächen eines solchen Systems, welche F berühren, mithin *die Classe der Fusspunktsfläche von* F

$$2m + 2r + n,$$

wie von mir a. a. O. S. 249 vermuthungsweise ausgesprochen ist.

3. Die gefundene Formel

$$N = m\mu + r\nu + n\varrho$$

überträgt sich unmittelbar auf *die Curven und abwickelbaren Flächen.* Haben wir eine Curve von der Ordnung n' und der Classe r'*) (Zahl der eine Gerade treffenden Tangenten) und fassen sie als Fläche (n, r, m) auf, so ist $n = 0$, $r = n'$, $m = r'$; also

$$N = \mu r' + \nu n';$$

und fasst man eine abwickelbare Fläche von der Ordnung r' und der Classe m' als Fläche (n, r, m) auf, so ist $n = \nu'$, $r = m'$, $m = 0$, also

*) Ich muss hier nothwendig von meiner in der Abh. von Bd. VI gebrauchten Bezeichnungsweise abgehen.

$$N = \nu m' + \varrho r';$$

beides in Uebereinstimmung mit den von Herrn Zeuthen Nouv. Ann. 1868 S. 392 gefundenen Zahlen.

4. Es giebt drei einfach unendliche Systeme von Flächen 2. Ordnung, für die je zwei Charakteristiken 0, die dritte 1 ist; nämlich eine Punktreihe, ein ebener Strahlbüschel, ein Ebenenbüschel, deren Elemente involutorisch gepaart sind; die Charakteristiken sind bez. $\mu = \nu = 0$, $\varrho = 1$; $\mu = \varrho = 0$, $\nu = 1$; $\mu = 1$, $\nu = \varrho = 0$ und eine Fläche $F = (n, r, m)$ wird ersichtlich bez. von n, r, m Flächen jeder dieser Systeme tangirt, was mit der obigen Formel übereinstimmt.

5. In gleicher Weise lassen sich auch zwei andere von Herrn Zeuthen a. a. O. S. 392—397 gefundene Resultate in die allgemeinere Form umsetzen.

Ist noch $\varkappa$ die Ordnung der Cuspidalcurve der Fläche F und ι die Classe der Torse der stationären Berührungsebenen, so ergiebt sich für *die Zahl der Flächen 2. Ordnung, welche 7 Bedingungen* $Z_1 \cdots Z_7$ *genügen und die Fläche F doppelt berühren,*

$$N = \tfrac{1}{2} A m (m-1) + \tfrac{1}{2} Br (r-1) + \tfrac{1}{2} Cn (n-1)$$
$$+ D [r (n-2) - \tfrac{1}{4} (r + 3\varkappa)] + Enm + F [r (m-2) - \tfrac{1}{4} (r + 3\iota)],$$

worin die Zahlen A, B, C, $\cdots$, F) allein von den 7 Bedingungen $Z_1 \cdots Z_7$ abhängen.*

6. Wenn α, σ die Zahlen der Wendetangenten von F bez. in einer Ebene und durch einen Punkt sind, so findet sich in derselben Weise für *die Zahl der Flächen 2. Ordnung, die den 7 Bedingungen $Z_1 \cdots Z_7$ genügen und F stationär berühren,*

$$N_1 = \tfrac{1}{2} D (3n + \alpha) + \tfrac{1}{2} F (3m + \sigma),$$

worin auch $3r + \varkappa$ für $3n + \alpha$ und $3r + \iota$ für $3m + \sigma$ treten kann.

7. Aus dem letzteren Resultate ergiebt sich nun durch dieselben Schlüsse, wie sie Herr Zeuthen macht, dass *die Ordnung der Fläche der Krümmungsmittelpunkte für F ist:*

$$n'' = (3n + \alpha) + (3m + \sigma),$$

wie in der vorangehenden Abhandlung auf anderem Wege gefunden worden ist, oder auch

$$n'' = 6r + \varkappa + \iota.$$

8. Die Ermittelung der Formeln für N und N_1 in Nr. 5. und 6. geschah mit Hülfe der Formeln (4a) und (11a) in dem Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit (Kopenhagen 1865) des Herrn

*) Eine Verwechselung der beiden F ist wohl nicht möglich.

Zeuthen (der in den Nouv. Ann. 1866 in französischer Uebersetzung erschienen ist); in diesen Formeln sind die Plücker'schen Relationen benutzt; da dieselben für in Büschel zerfallende ebene Curven und Kegel nicht mehr gelten, so sind die Formeln für N und N_1 auf die Curven und Torsen nicht in der Weise von Nr. 3. zu übertragen.

9. *Die Grössen A, B, C, D, E, F, welche allein von den 7 Bedingungen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_7$ abhängen*, lassen sich auf einem etwas umständlichen, aber sonst nicht schweren Wege ganz nach der Anleitung des Herrn Zeuthen *als die 6 Charakteristiken des durch die 7 Bedingungen bestimmten doppelt unendlichen Systems von Flächen 2. Grades nachweisen, nämlich:*

$$A = N(7\,Z, 2\,p)\,, \quad B = N(7\,Z, 2\,l)\,, \quad C = N(7\,Z, 2\,P)\,,$$
$$D = N(7\,Z, l, P), \quad E = N(7\,Z, p, P), \quad F = N(7\,Z, p, l)\,;$$

etwas Aehnliches gilt *bei dem 6 Bedingungen unterworfenen dreifach unendlichen Systeme*, das nachher von Herrn Zeuthen betrachtet wird; *die 10 Grössen $A, B, C, \cdots, K$ sind dessen Charakteristiken, nämlich:*

$$A = N(6\,Z, 3\,p)\,, \quad B = N(6\,Z, 3\,l)\,, \quad C = N(6\,Z, 3\,P)\,,$$
$$D = N(6\,Z, 2\,p, l)\,, \quad E = N(6\,Z, 2\,p, P)\,, \quad F = N(6\,Z, p, 2\,l)\,,$$
$$G = N(6\,Z, 2\,l, P)\,, \quad H = N(6\,Z, p, 2\,P)\,, \quad J = N(6Z, l, 2\,P)\,,$$
$$K = N(6\,Z, p, l, P)\,.$$

Es ist wohl kaum einem Zweifel unterworfen, dass dies so weiter fortgeht; so dass *das von Chasles für ein einfach unendliches System ausgesprochene Gesetz sich einem allgemeineren subsumirt.*

Darmstadt, den 28. December 1873.

Einige Worte zum Andenken an Hermann Hankel.

Von W. v. Zahn.

Das Leben des Mathematikers Hermann Hankel, auf welches wir durch die nachfolgenden Zeilen die Aufmerksamkeit der Leser dieser Zeitschrift hinzulenken wünschen, ist kurz nach seiner Dauer und einfach in seinem äussern Verlaufe, aber reich an Früchten gewesen, welche dasselbe überdauern und dem früh Verstorbenen einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften sichern.

Hermann Hankel wurde am 14. Februar 1839 zu Halle geboren, wo sein Vater, der rühmlichst bekannte Physiker, Dr. Wilhelm Hankel, damals eine Lehrerstelle an der Realschule bekleidete, und zugleich als Docent an der Universität thätig war. Die geistige Befähigung des Knaben sprach sich früh in einem lebhaften Wissensdrange aus, der durch den Vater umsichtig befriedigt und zugleich fortdauernd rege erhalten wurde.

Seit der im Jahre 1849 in Folge der Berufung des Vaters an die Universität Leipzig erfolgten Uebersiedelung der Familie nach dieser Stadt besuchte Hermann Hankel das Nicolaigymnasium daselbst. Zeitig entwickelte sich seine ausgesprochene Befähigung für seinen spätern Beruf, und mit grösster Energie verwandte er seine Kräfte, soweit sie nicht von der Schule in Anspruch genommen wurden, auf das Studium der Mathematik.

Seine hervorragenden Leistungen in dieser verschafften ihm in den letzten Schuljahren die Erlaubniss des Rectors der Schule, zum Gegenstande seines Privatstudiums statt der alten Classiker die Schriften der Mathematiker des Alterthums in der Ursprache zu wählen, um so in höherem Maasse den philologischen Anforderungen der Schule und seinem der Mathematik zugewandten Wissensdrange zu genügen. — Bei seiner reich angelegten Natur musste hierdurch ein lebhaftes Interesse für die Geschichte der Mathematik um so mehr geweckt

werden, als die ihm eigene Gründlichkeit ihn stets auf den Zusammenhang der von ihm gewonnenen Kenntnisse blicken, und rechte Befriedigung erst dann finden liess, wenn er ihnen durch Zusammenschluss unter eine höhere Einheit Abrundung zu geben wusste.

Nachdem er so schon auf dem Gymnasium eine für seine Jahre ungewöhnliche mathematische Bildung sich angeeignet hatte, bezog er Ostern 1857 die Universität Leipzig, wo er in den Vorträgen seines Vaters, so wie in denen von Drobisch, Möbius und vor allen von Scheibner Belehrung und immer neue Anregung zu seinen eigenen rastlosen Studien fand.

Der in die Zeit des Anfanges der Leipziger Universitätsstudien fallende Ausbruch eines schweren körperlichen Leidens, den seine damals ungeachtet der geistigen Anstrengungen noch kräftige Constitution glücklich überwand, nöthigte ihn in Allem, was neben der Mathematik ihn noch geistig anzog, strenges Maass zu halten. So stellte er z. B. seine historischen Forschungen wieder ein, um sich zuvörderst mit ganzer Kraft den streng mathematischen Arbeiten zu widmen.

Von Ostern 1860 an setzte er seine Studien in Göttingen fort, wo die epochemachenden Vorträge von Riemann ihn in die Theorie der complexen Functionen einführten und seinen Interessen die Richtung gaben, die seiner speciellen Begabung wohl die angemessenste war, und der er auch bis zu seinem Ende treu geblieben ist.

Aber auch den physikalisch-mathematischen Vorträgen des genialen Riemann wusste er mit reger Theilnahme zu folgen, und einen schönen Beweis, wie tief er schon damals in den Geist der analytischen Methoden eingedrungen war und mit welcher Gewandtheit er dieselben zu handhaben verstand, liefert seine unter dem Titel: „Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten" veröffentlichte, preisgekrönte Lösung der von der philosophischen Facultät der Georgia Augusta im Jahre 1860 gestellten Aufgabe: Die Gesetze für die Bewegung der Flüssigkeiten insbesondere für die von Helmholtz behandelten Wirbelbewegungen aus den Lagrange'schen Gleichungen abzuleiten.

Nachdem Hankel in so ehrenvoller Weise die Bahn eines mathematischen Schriftstellers betreten hatte, verliess er im Herbst 1861 Göttingen, um noch einige Zeit in Berlin zu studiren und dort namentlich Weierstrass und Kronecker zu hören. — Vorher hatte er noch in Leipzig auf eine Abhandlung: „Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten, Göttingen 1861" die philosophische Doctorwürde erworben. In dieser Abhandlung werden Determinanten, in denen die auf einer Parallele zu einer Diagonale befindlichen Elemente einander gleich sind, mehreren eleganten Transformationen unterzogen, und das Problem der Entwickelung einer Potenzreihe in

einen Kettenbruch auf die Bildung solcher Determinanten zurückgeführt. Im engern Anschluss hieran steht eine in den Berichten der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften für 1862 publicirte kleine Abhandlung „Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche“.

Im Herbste 1862 kehrte Hankel nach Leipzig zurück, in der Absicht, sich an der dortigen Universität zu habilitiren. Seine Gesundheit hatte sich befestigt, und der Aufenthalt auf den beiden fremden Universitäten hatte wie seine wissenschaftliche auch seine Charakterbildung vollendet. Klarheit des Denkens, welche die Voraussetzung hervorragender Leistungen in den mathematischen Disciplinen ist, beherrschte den ganzen Kreis seiner geistigen Bestrebungen. Sein durch strenge Selbstzucht ihm zur andern Natur gewordenes Streben nach Gründlichkeit und Tiefe machte sich bei der Beantwortung aller Fragen geltend, die das Leben dem Menschen stellt, und dieselbe Ehrfurcht, die er den ernsten Arbeiten des menschlichen Geistes auf dem mathematischen Gebiete entgegenbrachte, beseelte ihn auch allem geschichtlich Gewordenen gegenüber. Diese Ehrfurcht in Verbindung mit dem tiefen sittlichen Ernste seines Charakters liess ihn auch inmitten einer entgegengesetzten Zeitströmung an der geoffenbarten Wahrheit des Christenthums bis zu seinem Lebensende unerschütterlich festhalten.

Zu Anfang des Jahres 1863 habilitirte sich Hankel als Privatdocent der Mathematik an der Universität Leipzig. Zu der von ihm eingereichten Habilitationsschrift „Ueber die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes“ hatten die Vorlesungen von Riemann über Functionen complexer Variabeln die erste Anregung gegeben. Die Schrift ist ein Muster klarer Darstellung und historischer Gewissenhaftigkeit. Ihr besonderes Verdienst besteht aber darin, dass sie die Resultate der früheren Untersuchungen unter einen allgemeinen Gesichtspunkt zusammenfasst und ihre Ableitung vereinfacht. Dieser Art der Darstellung blieb Hankel stets getreu. — In allen spätern Arbeiten gleicher Gattung geht er von dem historisch gegebenen Materiale aus und giebt Rechenschaft von dem Verhältnisse seiner eigenen Entwickelung zu dem schon Geleisteten.

In seinen akademischen Vorträgen wusste der jugendliche Docent seine Zuhörer in seltenem Grade für den jedesmal behandelten Gegenstand zu interessiren, obwohl er (ganz entfernt vom Streben nach falscher Popularität) an seine Zuhörer nicht geringe Anforderungen stellte. Vor allem und mit dem glücklichsten Erfolge strebte er aber danach, durch klare Darlegung des Gedankenganges und durchsichtige Gliederung der Entwickelung auch dem schwächeren Verständnisse den

Ueberblick über das Ganze zu wahren und doch dabei die Theilnahme der höher Strebenden zu fesseln.

Diese Leistungen als akademischer Lehrer, verbunden mit seinen weiteren wissenschaftlichen Arbeiten, verschafften ihm die Anerkennung, dass er im Herbst 1867, nachdem er im Frühjahr desselben Jahres zum ausserordentlichen Professor in Leipzig ernannt war, als ordentlicher Professor der Mathematik an die Universität Erlangen und Ostern 1869 in gleicher Eigenschaft an die Universität Tübingen berufen wurde. In Erlangen gründete er einen eigenen Hausstand, indem er Marie Dippe aus Schwerin, die Tochter einer seinem elterlichen Hause lange befreundeten Familie als Gattin heimführte, an deren Seite er das gehoffte Lebensglück bis zu seinem Tode in reichem Masse fand.

Im Uebrigen waren die Verhältnisse in Erlangen nicht danach angethan, dem strebsamen Geiste Hankel's auf die Dauer zu genügen, weil die Zahl derjenigen, welche Mathematik studirten, überaus gering war. Bei der Begeisterung, mit welcher er dem akademischen Berufe anhing, empfand er daher den Ruf nach Tübingen als ein hohes Glück, wo ihm ein reiches Wirken für Wissenschaft und Leben in Aussicht gestellt schien. Zwar muthete ihn Manches fremd an, aber das reiche Geistesleben des schwäbischen Stammes, die Fülle des Interessanten in allen neuen ungewohnten Verhältnissen, die sorgenfreie Existenz, vor allem aber der grössere Kreis von Studenten gewährten ihm volle Befriedigung und die Hoffnung auf erspriessliche Thätigkeit. Diese Hoffnung ist, obwohl ihm nur eine vierjährige Wirksamkeit beschieden gewesen ist, nicht unerfüllt geblieben. — Von Anfang an arbeitete er darauf hin, das mathematische Studium zu heben, die Ziele desselben zu erweitern und den wissenschaftlichen Sinn der Studirenden zu beleben. — In dem beim Eintritt in den akademischen Senat der Universität Tübingen im April gehaltenen Vortrage: „Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten“ gab Hankel dieser Absicht in beredten Worten Ausdruck, indem er als das Ziel der akademischen Vorlesungen bezeichnete, das ganze Ideal der Wissenschaft denen vorzuführen, die derselben ihr Leben widmen wollen, und sich zu dem Grundsatze bekannte: „Will man gewiss sein, ein mittleres Ziel zu erreichen, so stelle man sich das höchste, wer nur nach Mittelmässigkeit strebt, wird auch diese nicht erreichen“.

Nachdem Hankel sich genau mit den höchst eigenthümlichen und interessanten Verhältnissen des württembergischen Unterrichtswesens bekannt gemacht hatte, richtete er noch im Sommer 1869 ein mathematisches Seminar von vier Cursen ein, dessen Verfassung der des schon bestehenden philologischen Seminars nachgebildet war. Die Theilnahme an den Uebungen des Seminars wurde für die Candidaten des Reallehramts obligatorisch gemacht. Eine weitere von Hankel

bewirkte Verbesserung bestand in der Erhöhung der Anforderungen in dem sogenannten Professoratsexamen, indem die Prüfung mit auf analytische Mechanik und neuere Geometrie erstreckt wurde. Hankel's Ueberzeugung, dass bei der durch ausgezeichnete Schulbildung im Allgemeinen weit geförderten geistigen Entwickelung der Studenten mit dem Ziele auch die Kräfte wachsen würden, fand sich bald durch manchen schönen Erfolg bestätigt. Die Aufgabe des Professors der Mathematik war es nun, vor Allem seinen Vorträgen eine dem gesteckten Ziele entsprechende Mannigfaltigkeit und Vollendung zu geben.

Mit verdoppelter Sorgfalt arbeitete Hankel jetzt an seinen Heften, welche die Grundlage seiner stets frei gehaltenen Vorträge bildeten, und freudig empfand er die durch volle Hingabe auf beiden Seiten bedingte Wechselwirkung zwischen ihm und seinen Zuhörern.

Aufmerksam auf die Aufnahme seiner Worte im Zuhörerkreise achtend, lernte er selbst immer mehr sich dessen Bedürfnissen zu accomodiren, und die Gewissheit, nicht vergeblich zu arbeiten, gab ihm die Sicherheit, die den Meister kennzeichnet. Im Bewusstsein, hier auch für tiefer gehende Bemerkungen Verständniss zu finden, konnte er mehr als sonst seine eigenartige Auffassung hervortreten lassen und in gesteigerter Lebhaftigkeit des Vortrags die Zuhörer mit fortreissen.

Bei solcher Hingabe an den Beruf als akademischer Lehrer blieb für Hankel in Tübingen nur wenig Zeit übrig, seine früheren litterarischen Arbeiten fortzusetzen oder neue zu unternehmen.

Die grosse Aufgabe, die er sich schon in Leipzig gestellt hatte, durch eine fundamentale Untersuchung die eigentliche Natur jener Vorstellungen und Begriffe aufzuklären, auf welcher die complexen Zahlen und ihre Functionen beruhen, und damit zugleich das Gebiet zu begrenzen, innerhalb dessen sie ihre volle Berechtigung haben, sowie gewissermassen die Direction für den weiteren Fortschritt zu geben, ist von ihm rücksichtlich der complexen Zahlensysteme durch den im Jahre 1867 in Leipzig erschienenen ersten Theil der Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen mit glücklichem Erfolge gelöst worden. Um so mehr ist es zu bedauern, dass er zur Ausarbeitung des zweiten Theils, welcher die Functionen der complexen Zahlen in entsprechender Weise behandeln sollte, nicht gelangt ist. — Es ist damit eine Lücke unausgefüllt geblieben, welche als solche auch von denen empfunden wird, die selbstthätig an der Erweiterung des bezeichneten Gebietes der Wissenschaft arbeiten. Von kleineren Arbeiten sind zu erwähnen:

„Die Zerlegung algebraischer Functionen in Partialbrüche nach den Principien der complexen Functionentheorie in der Zeitschrift für Mathematik und Physik I, S. 425—433."

„Mathematische Bestimmung des Horopters. Poggendorff Annalen, CXXII, 575."

„Ueber die Vieldeutigkeit der Quadratur und Rectification algebraischer Curven. Eine Gratulationsschrift. Leipzig 1864."

„Darstellung symmetrischer Functionen durch Potenznummern, Borchardt's Journal Bd. 67."

„Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art, in den Mathematischen Annalen von Clebsch und Neumann, Leipzig 1869, S. 467—501." Von dieser Abhandlung hat sich eine Fortsetzung in Hankel's Nachlasse vorgefunden und steht die Publication derselben in diesen Annalen in Aussicht.

Auch dürfen wir die Artikel „Gravitation", „Grenze" und „Lagrange's Lehrsatz" in der Encyklopädie von Ersch und Gruber nicht mit Stillschweigen übergehen, von denen der erstere eine höchst geistreiche Beleuchtung einer der wichtigsten Episoden aus der Geschichte der exacten Wissenschaften ist, der zweite aber um deswillen eine besondere Erwähnung verdient, weil er die Grundlage der Analysis ganz im Geiste und mit der historischen und sachlichen Gründlichkeit der „Theorie der complexen Zahlensysteme" behandelt.

Einige populäre Aufsätze, die Hankel schrieb, beweisen die Vielseitigkeit und Feinheit seiner Bildung; wegen seines höhern wissenschaftlichen Werthes möchte dagegen hervorzuheben sein: „Ein Beitrag zur Beurtheilung der Naturwissenschaft des griechischen Alterthums. Deutsche Vierteljahrsschrift, 1867, IV, p. 120—155."

Hankel's letzte rein mathematische Arbeit waren die „Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen", in einem 1870 in Tübingen erschienenen Universitätsprogramme. Im Anschluss an die erwähnte Arbeit über den Grenzbegriff unterzieht Hankel in dieser Abhandlung den Functionsbegriff im Allgemeinen einer systematischen Analyse. Wenn er dabei zwar von gelegentlichen Untersuchungen Riemann's ausgeht und mit peinlicher Sorgfalt den sporadischen Aeusserungen älterer und neuerer Mathematiker über die Fragen dieses eminent schwierigen Capitels nachforscht, so muss doch die Arbeit als eine durchaus selbstständige bezeichnet werden. Durch knappe, prägnant zeichnende Terminologie, durch genaue Darlegung des erstrebten Zieles der Untersuchung und durch einen unbefangenen Nachweis, wie weit es dem Autor gelungen ist, die Wissenschaft diesem Ziele entgegen zu führen, dürfte diese Arbeit für Nachfolger auf der glücklich betretenen Bahn einen geeigneten Ausgangspunkt zu neuen Forschungen bilden, indem sie zugleich die Richtungen andeutet, in welchen weitere Fortschritte sich vollziehen können. — Die Hoffnung, selbst diese Untersuchungen weiter zu führen, um sie dem inzwischen im ersten Entwurf begonnenen zweiten

Theile seiner Functionentheorie einzufügen, sollte sich ihm nicht erfüllen, weil er am Schlusse des heissen und für ihn mit grossen Anstrengungen verbunden gewesenen Sommers 1872, an einer Hirnhautentzündung erkrankte, die ihn an den Rand des Grabes brachte, und deren Folgen zur äussersten Schonung seiner Kräfte ihn nöthigten.

In den vorangehenden beiden Jahren hatte er neben der geschilderten Thätigkeit für sein akademisches Lehramt seine Kraft in erhöhtem Masse der Vorbereitung einer Geschichte der Mathematik zugewandt. Hankel hatte frühzeitig die Idee gefasst, in dem bei Gelegenheit seiner mathematischen Studien mit historischer Gründlichkeit gesammelten Materiale im Laufe der Jahre den Apparat zur Abfassung einer umfassenden kritischen Geschichte der Mathematik zu gewinnen, glaubte aber die Ausführung der Arbeit selbst einer späteren Periode seines Lebens vorbehalten zu sollen, weil die besten Mannesjahre der Production auf dem rein wissenschaftlichen Gebiete gewidmet sein müssten. Gleichwohl entschloss er sich gern, einer an ihn herangetretenen Aufforderung zur Abfassung eines Abrisses der Geschichte der Mathematik Folge zu geben, indem er in der Herausgabe eines solchen kleineren Werkes ein vorzügliches Mittel erkannte, der für spätere Zeit beabsichtigten umfassenderen Schrift einen höhern Grad von Vollendung zu geben. Daher steckte er sich schon bei diesem kleinen Werke das Ziel, die herkömmliche Auffassung vollkommen selbstständig und mit allen ihm zu Gebote stehenden Mitteln einer strengen Kritik zu unterziehen, und bei der Gründlichkeit und Sorgfalt seiner Vorarbeiten konnte es nicht fehlen, dass er auf dem zwar vielfach, aber oft sehr ungenügend bearbeiteten Felde nicht wenig Neues entdeckte.

Das Werk neigte sich bereits seinem Abschlusse zu, als ihn die erwähnte schwere Krankheit befiel. Wie durch ein Wunder genas er und wurde den Seinen noch einmal zurückgegeben; es zeigte sich aber bald, dass er die frühere Kraft nicht mehr besass und auf angestrengte Arbeit verzichten musste. — Nur mit Unterbrechungen konnte er wieder Vorlesungen halten, und während ihm sonst die historischen Arbeiten fast wie eine Erholung im Vergleich zu dem abstracten mathematischen Forschen erschienen waren, musste er auch diese einstellen und die Vollendung des Werkes von einer vollständigen Wiederherstellung seiner Gesundheit erwarten. Diese Hoffnung aber, an der er bis zuletzt, jedoch mit religiöser Ergebung in den Willen Gottes festhielt, erfüllte sich nicht. Denn am 29. Aug. 1873 machte auf einer Erholungsreise, die er mit seiner Gattin unternommen, zu Schramberg im Schwarzwalde ein Gehirnschlag seinem Leben plötzlich ein Ende.

An seinem frühen Grabe trauert mit seinen Angehörigen und Freunden auch die Wissenschaft. Denn er war ein reichbegabter

Forscher und würde, wenn ihm ein längeres Leben beschieden gewesen wäre, noch durch schöne Früchte seines Fleisses und seines Scharfblicks sich ausgezeichnet haben. Aus seinem Nachlasse soll unter Anderem die Geschichte der Mathematik, soweit sie vollendet ist, und eine Reihe von Vorlesungen über die neuere Geometrie zur Veröffentlichung gelangen. Diese, wie seine früheren Arbeiten zeigen, welch reiches Talent mit diesem jungen Gelehrten zu Grabe getragen worden ist, wie Vieles noch daraus hätte erblühen können, und sichern ihm ein bleibendes und ehrenvolles Andenken.

Ueber die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Curven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen.

Von F. E. Eckardt in Chemnitz.

1. Bedeuten x, y, z die sogenannten Dreieckscoordinaten irgend eines Punktes in einer Ebene, so stellt bekanntlich jede homogene Gleichung m^{ten} Grades zwischen denselben:

$$f(x, y, z) = 0,$$

eine ebene Curve dar. Es mögen nun in dieser Gleichung die Substitutionen

$$x = \alpha\beta + \gamma\delta,$$
$$y = \alpha\gamma + \beta\delta,$$
$$z = \alpha\delta + \beta\gamma$$

ausgeführt werden, wobei jede der Grössen $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch mit einer gewissen Constanten multiplicirt oder dividirt sein könnte, welche hier durchgängig der Einfachheit halber gleich der Einheit gesetzt wird. Versteht man nun unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die tetraedrischen Coordinaten eines Punktes im Raume, so stellt die hervorgehende Gleichung eine Fläche $2\,m^{\text{ten}}$ Grades dar. Die Eigenschaften der auf diese Weise enstehenden Flächen sollen im Nachstehenden genauer untersucht werden.

Zunächst enthält jede derartige Fläche die acht Punkte, in welchen sich die drei Flächen

$$\alpha\beta + \gamma\delta = 0,$$
$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0,$$
$$\alpha\delta + \beta\gamma = 0$$

durchschneiden. *Diese sind aber die Ecken zweier Tetraeder; das eine ist das Fundamentaltetraeder selbst, das andere dagegen, dessen Eckencoordinaten den Bedingungen genügen:*

$$\begin{array}{rl} -\alpha = \beta = \gamma = \delta, \\ \alpha = -\beta = \gamma = \delta, \\ \alpha = \beta = -\gamma = \delta, \\ \alpha = \beta = \gamma = -\delta, \end{array}$$

wird von den vier Ebenen

$$\begin{aligned} X &= -\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \\ Y &= \alpha - \beta + \gamma + \delta = 0, \\ Z &= \alpha + \beta - \gamma + \delta = 0, \\ W &= \alpha + \beta + \gamma - \delta = 0 \end{aligned}$$

gebildet. Wir wollen der Einfachheit halber die Ecken des Fundamentaltetraeders mit A_1 $(\beta = \gamma = \delta = 0)$ u. s. w., und diejenigen des zweiten mit B_1 $(Y = Z = W = 0)$ u. s. w. bezeichnen, diejenigen des Fundamentaldreiecks dagegen mit a_1 $(y = z = 0)$ u. s. w. *Die acht Punkte A und B sind dann m-fache Punkte der Fläche.* Dies geht für die ersteren unter Anderem daraus hervor, dass die Gleichung der Fläche keine Coordinate in einer höheren als der m^{ten} Potenz enthält; für die letzteren folgt es daraus, dass dieselbe Gleichung sich nicht ändert, sobald α mit X, β mit Y u. s. w. vertauscht wird, infolge der Identitäten:

$$\alpha\beta + \gamma\delta = \tfrac{1}{4}(XY + ZW) \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung der Curve, in welcher die Fläche einer Tetraederebene, z. B. $\delta = 0$, begegnet, ist:

$$f(\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma) = 0$$

oder

$$f\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) = 0;$$

sie geht also aus der Gleichung der ursprünglichen Curve hervor, wenn man die Coordinaten mit den reciproken Werthen gewisser Tetraedercoordinaten vertauscht. Aehnliches gilt für die Schnittcurven mit den Ebenen des Tetraeders der B. Dagegen ist die Gleichung des Tangentialkegels im Punkte A_1 identisch mit der gleich Null gesetzten Function, welche in der Gleichung der Fläche in δ^m multiplicirt erscheint, also

$$f(\gamma, \beta, \alpha) = 0.$$

Dass somit die Gleichung jener Schnittcurve und diejenige dieses Tangentialkegels aus einander hervorgehen, wenn man die Coordinaten durch ihre reciproken Werthe ersetzt, hängt mit dem Umstande zusammen, dass sich die Gleichung der Fläche auch dann nicht ändert,

wenn α mit $\frac{1}{\alpha}$, β mit $\frac{1}{\beta}$ u. s. w., und auch, wenn α mit $\frac{1}{X}$, β mit $\frac{1}{Y}$ u. s. w. vertauscht wird.

2. *Einer Geraden in der Ebene entspricht nach unserer Transformation eine Fläche zweiten Grades im Raume, welche durch die acht Punkte A und B geht. Einem Punkte der Ebene entspricht der Durchschnitt zweier derartigen Flächen, also im Allgemeinen eine durch die acht Punkte A und B gehende Raumcurve vierten Grades.*

Wenn man daher durch unsere Transformation zwei Flächen $2m^{\text{ten}}$ und $2n^{\text{ten}}$ Grades entstehen lässt, so schneiden sich dieselben in mn Raumcurven vierten Grades, entsprechend den mn Schnittpunkten der zugehörigen ebenen Curven.

Einem Doppelpunkte der ebenen Curve entspricht stets auf der Fläche eine Doppelcurve vierten Grades, also einer Spitze der ersteren eine Rückkehrkante der Fläche.

Bei den beiden diesen § 2. einleitenden Sätzen sind jedoch eine Reihe von Ausnahmen festzustellen. *Einem Fundamentalpunkte in der Ebene, z. B. a_1, entspricht der Durchschnitt der Flächen*

$$\alpha\gamma+\beta\delta=0,$$
$$\alpha\delta+\beta\gamma=0,$$

welcher aus den vier geraden Linien

$$\alpha=0,\quad \beta=0,$$
$$\gamma=0,\quad \delta=0,$$
$$X=0,\quad Y=0,$$
$$Z=0,\quad W=0$$

besteht, also aus zwei einander gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders der Punkte A, und aus zwei jene schneidenden und einander ebenfalls gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders B.

3. *Sechs gerade Linien in der Ebene giebt es, denen im Raume statt der Flächen zweiten Grades Ebenenpaare entsprechen.* Die Gleichungen dieser Linien sind:

$$y\pm z=0,$$
$$z\pm x=0,$$
$$x\pm y=0.$$

Der Linie

$$y+z=0$$

entspricht z. B. das Ebenenpaar

$$\alpha\gamma+\beta\delta+\alpha\delta+\beta\gamma=0$$

oder

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=0 .$$

In jeder der 12 Ebenen dieser Paare liegt je eine Kante der Tetraeder A und B.

Jedem Punkte, welcher in einer der sechs geraden Linien in der Ebene liegt, entspricht eine Raumcurve vierten Grades, welche im zugehörigen Ebenenpaare liegen und daher in zwei Kegelschnitte zerfallen muss. Alle Flächen unserer Entstehungsweise haben daher die Eigenschaft, *dass sie von den 12 Ebenen*

$$\alpha \pm \beta = 0 ,$$
$$\alpha \pm \gamma = 0 \text{ u. s. w.}$$

in Kegelschnitten durchschnitten werden. Ist dabei eine der sechs geraden Linien der Ebene zufällig eine Tangente der Curve, so berühren die zwei entsprechenden Ebenen die Fläche längs eines Kegelschnittes; ist jene eine Doppeltangente, so berühren die Ebenen längs je zweier Kegelschnitte u. s. w.

So entspricht dem Kegelschnitte

$$\sqrt{m(y+z)}+\sqrt{n(z+x)}+\sqrt{p(x+y)}=0$$

die Fläche vierten Grades

$$\sqrt{m(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}+\sqrt{n(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}+\sqrt{p(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}=0,$$

welche von jeder von sechs Ebenen längs eines Kegelschnittes berührt wird.

4. Die sechs geraden Linien des vorigen § schneiden sich ausser in den Fundamentalpunkten noch zu je dreien in vier Punkten, die wir resp. mit c_0, c_1, c_2, c_3 bezeichnen wollen und deren Coordinaten den Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} x &= y = z, \\ -x &= y = z, \\ x &= -y = z, \\ x &= y = -z. \end{aligned}$$

Diesen vier Punkten entsprechen nun auch keine wirklichen Kegelschnittpaare, sondern je vier gerade Linien, und es entsprechen z. B. dem Punkte c_0 die vier geraden Linien, in welchen die Ebenen

$$\alpha-\beta=0 ; \quad \gamma-\delta=0$$

von den andern

$$\alpha-\gamma=0 ; \quad \beta-\delta=0$$

oder auch von

$$\alpha-\delta=0 ; \quad \beta-\gamma=0$$

durchschnitten werden. Diese vier geraden Linien schneiden sich in einem Punkte C_0:

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta,$$

und jede derselben geht sowohl durch einen der Punkte A, als auch durch einen der Punkte B.

Ebenso entsprechen den andern Punkten c_1, c_2, c_3 je vier gerade Linien, welche durch je einen der Punkte A und B gehen und sich resp. in den Punkten

$$\begin{aligned}\alpha&=\ \ \beta=-\gamma=-\delta,\\ \alpha&=-\beta=\ \ \gamma=-\delta,\\ \alpha&=-\beta=-\gamma=\ \ \delta,\end{aligned}$$

welche wir C_1, C_2 und C_3 nennen wollen, treffen.

Liegt einer der Punkte c, z. B. c_1, auf einer ebenen Curve, so liegen auf der entsprechenden Fläche stets die vier geraden Linien, welche sich in C_1 schneiden, und da diese nicht in einer Ebene liegen, *so muss der Punkt C_1 ein Doppelpunkt der Fläche sein.* Geht also z. B. ein Kegelschnitt durch die vier Punkte c, in welchem Falle seine Gleichung sein wird

$$mx^2+ny^2+pz^2=0\,,\quad \text{wobei } m+n+p=0\,,$$

so hat seine entsprechende Fläche vierten Grades 12 Doppelpunkte A, B und C und enthält die 16 geraden Linien, welche die Punkte C mit den Punkten A und B verbinden.

5. Wenn eine gerade Linie in der Ebene durch einen der Punkte c geht, so entspricht ihr eine Fläche zweiten Grades durch die vier demselben entsprechenden, in einem Punkte C sich treffenden Geraden, also *ein Kegel, welcher den Punkt C zum Scheitel hat.* Da nun jede Gerade einer ebenen Curve m^{ten} Grades in m Punkten begegnet, so schneidet jeder Kegel, welcher einen der Punkte C zum Scheitel hat und durch die vier geraden Linien geht, welche diesen mit den Punkten A oder B verbinden, unsere Flächen in m Raumcurven vierten Grades.

An eine ebene Curve m^{ten} Grades ohne Doppelpunkt und Spitze lassen sich von einem beliebigen ausserhalb gelegenen Punkte aus $m(m-1)$ Tangenten legen. *Daraus folgt, dass man von jedem Punkte C aus an unsere Fläche $2\,m^{\text{ten}}$ Grades, sofern dieselbe keine Doppel- oder Rückkehrcurve hat, $m(m-1)$ Kegel zweiten Grades legen kann, welche dieselbe längs einer Raumcurve vierten Grades berühren und ausserdem in $m-2$ derartigen Raumcurven durchschneiden.* Jeder dieser Kegel ist dabei ein doppelter Berührungskegel, da jede Erzeugende desselben die Fläche in den zwei Punkten berührt, in welchen sie der

Raumcurve vierten Grades begegnet. Daher repräsentiren jene $m(m-1)$ Kegel zweiten Grades im Ganzen einen Berührungskegel vom Grade

$$4\,m\,(m-1)\,.$$

Nun ist aber der Grad des Tangentialkegels bei einer Fläche $2\,m^{\text{ter}}$ Ordnung im Allgemeinen

$$2\,m\,(2\,m-1)\,;$$

man wird daher noch einen weiteren Berührungskegel von C aus erwarten können, und zwar einen solchen $2\,m^{\text{ten}}$ Grades.

Die $m(m-1)$ Berührungscurven vierten Grades der $m(m-1)$ Tangentialkegel liegen ferner in einer Fläche $2(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche der ersten Polaren des Punktes c in Bezug auf die ebene Curve entspricht. Da nun die erste Polare des Punktes C in Bezug auf unsere Fläche vom Grade $2\,m-1$ ist, *so muss die Berührungscurve des weiter zu erwartenden Tangentialkegels in einer Fläche vom Grade*

$$2\,m-1-2\,(m-1)\,,$$

d. h. in einer Ebene liegen. Dies geht auch auf andere Weise noch klarer hervor.

Die Gleichung der ersten Polaren eines beliebigen Punktes $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ in Bezug auf unsere Fläche ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1+\gamma_1\delta+\gamma\delta_1)+\frac{\partial f}{\partial y}\,(\alpha_1\gamma+\alpha\gamma_1+\beta_1\delta+\beta\delta_1)+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial z}\,(\alpha_1\delta+\alpha\delta_1+\beta_1\gamma+\beta\gamma_1)=0\,,$$

wobei in $\frac{\partial f}{\partial x}$ u. s. w. noch die bekannten Werthe für x, y und z einzuführen sind. Für den Punkt C_0 $(\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=\delta_1)$ z. B. wird nun diese Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\right)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0$$

und die Berührungsebene des weiteren Tangentialkegels ist daher

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\,,$$

d. h. unabhängig von der Function f und somit für alle unsere Flächen dieselbe.

Gleicherweise sind die Berührungsebenen der drei von C_1, C_2 und C_3 aus zu legenden Tangentialkegel:

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta=0\,,$$
$$\alpha-\beta+\gamma-\delta=0\,,$$
$$\alpha-\beta-\gamma+\delta=0\,.$$

Das Tetraeder dieser vier Ebenen hat wieder die Punkte C zu Ecken und man kann daher sagen, dass das Tetraeder der Punkte C in Bezug auf alle unsere Flächen *sich selbst conjugirt ist.*

Noch ist zu erwähnen, dass für alle die unendlich vielen Raumcurven vierten Grades, welche die Punkte A und B enthalten, die vier Punkte C die Scheitel der darüberstehenden Kegel zweiten Grades sind. Daraus ergiebt sich unter Anderem, dass die Kegelschnitte, in welchen nach § 3. unsere Fläche durch zwei zusammengehörige Ebenen, z. B.

$$\alpha+\beta=0, \quad \gamma+\delta=0$$

durchschnitten wird, sich paarweise in doppelt perspectivischer Lage befinden und dass die beiden nicht auf der Schnittlinie jener Ebenen liegenden Punkte C die Scheitel der zugehörigen Sehkegel sind.

7. Geht eine ebene Curve durch einen der Punkte c, so hat, wie schon erwähnt, die entsprechende Fläche den zugehörigen Punkt C zum Doppelpunkt. *Der Tangente an die Curve in jenem Punkte entspricht sodann der Berührungskegel der Fläche im Doppelpunkte.* Derselbe berührt die Fläche längs der vier geraden Linien, welche den Punkt C mit den Punkten A oder B verbinden, und jede Erzeugende desselben hat mit der Fläche im Scheitel vier zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich. Ueberdies schneidet der Berührungskegel die Fläche in $m-2$ Raumcurven vierten Grades.

Wäre c ein Doppelpunkt der ebenen Curve, so wäre der Punkt C ein vierfacher Punkt der Fläche; *der Tangentialkegel desselben zerfällt in zwei Kegel zweiten Grades,* welche den Tangenten des Doppelpunktes entsprechen.

Ist c eine Spitze, so fallen diese beiden Kegel zusammen. Ist allgemein c ein p-facher Punkt der ebenen Curve, so ist der Punkt C ein $2p$-facher Punkt der Fläche, dessen Tangentialkegel in p Kegel zweiten Grades zerfällt. Die vier geraden Linien, welche den Punkt C mit den Fundamentalpunkten verbinden, sind p-fache Linien der Fläche.

8. Einem Eckpunkte des Fundamentaldreiecks in der Ebene entsprechen, wie bereits gezeigt wurde, zwei sich kreuzende Kanten des Tetraeders der Punkte A und zwei sich kreuzende, aber jene schneidende Kanten des Tetraeders der Punkte B. Geht also eine Curve durch einen der Fundamentalpunkte, so enthält die entsprechende Fläche jene vier Kanten, und *ist eine Curve dem Fundamentaldreieck umschrieben, so enthält die Fläche sämmtliche 12 Kanten beider Tetraeder.*

Alsdann entspricht der Tangente der Curve in einem der Eckpunkte eine Fläche zweiten Grades, welche durch je zwei Kanten beider Te-

traeder geht und die Fläche in sämmtlichen Punkten dieser Kanten berührt. Besonders bemerkenswerth ist dabei der Fall, in welchem die Tangente der Curve zusammenfällt mit einer der sechs Geraden, denen nach § 3. Ebenenpaare entsprechen. Berührt z. B. die gerade Linie

$$y + z = 0$$

die Curve im Punkte a_1, so berührt die Ebene

$$\alpha + \beta = 0$$

die Fläche längs der Kanten

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \text{und} \quad Z = 0, \quad W = 0;$$

ebenso die Ebene

$$\gamma + \delta = 0$$

längs der Kanten

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0 \quad \text{und} \quad X = 0, \quad Y = 0.$$

Der Punkt

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\delta$$

hat somit, da er sowohl auf der Kante $\alpha = 0$, $\beta = 0$, als auch auf $X = 0$, $Y = 0$ liegt, zwei verschiedene Tangentialebenen:

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{und} \quad \gamma + \delta = 0.$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn dieser Punkt ein Doppelpunkt der Fläche ist. Gleiches gilt für den Punkt

$$\alpha = -\beta, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0.$$

Wenn also eine der sechs mehrfach erwähnten Geraden die Curve in einem Fundamentalpunkte berührt, so hat die entsprechende Fläche zwei der Punkte, in welchen sich die Kanten der beiden Tetraeder A und B gegenseitig schneiden, zu Doppelpunkten.

Berühren daher die drei geraden Linien

$$y + z = 0,$$
$$z + x = 0,$$
$$x + y = 0$$

die Curve in den Fundamentalpunkten, so schneidet die Ebene

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

die Fläche in einer Curve, welche die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits zu Doppelpunkten hat.

9. Einem Punkte im Raume entspricht ein einziger Punkt der Ebene, diesem aber entspricht umgekehrt eine Raumcurve vierten Grades, durch welche unzählig viel Flächen zweiten Grades gelegt werden können, und zwar diejenige, welche durch die acht Punkte

A und B geht und jenen Punkt im Raume enthält. Ebenso entspricht einer beliebigen Curve im Raume eine Curve in der Ebene, dieser aber umgekehrt eine Fläche im Raume, und diese ist der geometrische Ort derjenigen Raumcurven vierten Grades, welche durch die acht Punkte A und B, sowie durch einen Punkt der Raumcurve gehen. Der Grad dieser Fläche hängt selbstverständlich ab von dem Grade der Curve im Raume und von der Lage derselben zu den Ecken und Kanten der beiden Tetraeder A und B.

Liegt z. B. diese Leitlinie m^{ten} Grades in einer Fläche $\alpha=0$ des Fundamentaltetraeders, und ist die Gleichung derselben

$$\alpha_1=0\,,\quad f(\beta_1,\gamma_1,\delta_1)=0\,,$$

so ist die Gleichung der erzeugenden Curve vierten Grades

$$(\alpha\beta+\gamma\delta)\,\beta_1=(\alpha\gamma+\beta\delta)\,\gamma_1=(\alpha\delta+\beta\gamma)\,\delta_1\,,$$

woraus folgt:

$$\beta_1:\gamma_1:\delta_1=\frac{1}{\alpha\beta+\gamma\delta}:\frac{1}{\alpha\gamma+\beta\delta}:\frac{1}{\alpha\delta+\beta\gamma}\,,$$

so dass sich die Gleichung der Fläche ergiebt:

$$f\left(\frac{1}{\alpha\beta+\gamma\delta},\ \frac{1}{\alpha\gamma+\beta\delta},\ \frac{1}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right)=0\,.$$

Der Grad der Fläche ist somit unter der gemachten Voraussetzung im Allgemeinen das Vierfache von demjenigen der Leitcurve und die 12 Kanten beider Tetraeder sind m-fache Linien der Fläche. Geht aber die Leitlinie durch einen der Fundamentalpunkte, so vermindert sich der Grad der Fläche sofort um 2. Ist z. B. die Leitlinie eine Gerade

$$\alpha_1=0\,,\quad m\beta_1+n\gamma_1+p\delta_1=0\,,$$

so ist die Gleichung der Fläche

$$\frac{m}{\alpha\beta+\gamma\delta}+\frac{n}{\alpha\gamma+\beta\delta}+\frac{p}{\alpha\delta+\beta\gamma}=0\,.$$

Auf dieser Fläche liegen im Allgemeinen 20 gerade Linien, nämlich die 12 Kanten der Tetraeder A und B, und die acht geraden Linien, welche die acht Flächen beider Tetraeder noch überdies mit der Fläche gemeinsam haben.

Liegt die gerade Linie beliebig im Raume, so ist dagegen die Fläche im Allgemeinen vom achten Grade.

10. Es ist klar, dass man die Betrachtungen der vorigen §§ wesentlich verallgemeinern kann, wenn man für x, y und z überhaupt homogene Functionen der Coordinaten α, β, γ, δ substituirt; es wird alsdann allerdings die Lage der acht Fundamentalpunkte A und B eine weit allgemeinere als bisher, dagegen geht auch dabei der grösste Theil

der gefundenen einfachen Eigenschaften verloren. Diese Sätze würden nur dann mit nur unwesentlichen Aenderungen wiederkehren, wenn die mit unserer früheren verwandte Substitution

$$x = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$$
$$y = (\alpha + \gamma)(\beta + \delta)$$
$$z = (\alpha + \delta)(\beta + \gamma)$$

ausgeführt würde. Es ist bekannt, dass man sowohl diese, als auch die früheren Werthe x, y, z zu Wurzeln der Resolvente einer Gleichung vierten Grades wählen kann, sofern die letztere die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hat.

Aber die Betrachtungen des vorigen § lassen sich auch noch in anderer Beziehung wesentlich verallgemeinern, wenn man statt der Raumcurven vierten Grades andere Curven zu Erzeugungslinien der Fläche wählt. Besonders einfach ist der Fall, in welchem die Fläche erzeugt wird durch Raumcurven dritten Grades, welche durch fünf gegebene Punkte gehen. Eine Fläche dieser Art kann auf folgende einfache Weise erhalten werden: Man beziehe einen Kegel auf ein bestimmtes Tetraeder und ersetze hierauf in der Gleichung desselben die Coordinaten durch ihre reciproken Werthe; alsdann entsprechen den Erzeugenden des Kegels Raumcurven dritten Grades, welche durch die vier Eckpunkte des Tetraeders und durch den Punkt gehen, welcher vermöge der angewandten Transformation dem Kegelscheitel entspricht. Die fünf Punkte sind aber nur dann gleich vielfache Punkte der Fläche, wenn der gewählte Kegel ein solcher $3m^{\text{ten}}$ Grades ist, welcher die vier durch die Tetraederecken gehenden Erzeugenden zu m-fachen Linien hat. Die Flächen haben alsdann den Grad $5m$; die fünf Punkte sind $3m$-fache Punkte und ihre 10 Verbindungslinien m-fache Linien der Fläche.

11. Ein besonders bemerkenswerthes Beispiel zu den in dieser Abhandlung betrachteten Flächen bietet die *Kernfläche der Flächen dritten Grades mit vier Doppelpunkten*, welche ich z. B. in einer im fünften Bande dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeit S. 38 etwas näher betrachtet habe. Legt man als Gleichung der Fläche dritten Grades

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 0$$

zu Grunde, so kann die Gleichung ihrer Kernfläche unter der Form

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right)(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 4,$$

aber auch noch einfacher

$$\frac{1}{\alpha\beta+\gamma\delta}+\frac{1}{\alpha\gamma+\beta\delta}+\frac{1}{\alpha\delta+\beta\gamma}=0$$

geschrieben werden. Die fragliche Fläche ist also diejenige, welche vermöge unserer Transformation dem Kegelschnitte

$$yz+zx+xy=0$$

entspricht. Da dieser Kegelschnitt durch die Fundamentalpunkte geht, so enthält die Fläche die Kanten der beiden Tetraeder A und B, während die Ecken Doppelpunkte der Fläche sind. Da ferner der Kegelschnitt in den Fundamentalpunkten von den Linien

$$y+z=0,\quad z+x=0,\quad x+y=0$$

berührt wird, so berührt jede der sechs Ebenen

$$\alpha+\beta=0,$$
$$\alpha+\gamma=0 \text{ u. s. w.}$$

die Fläche längs je einer Kante beider Tetraeder und die sechs Punkte, in welchen die Ebene

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

den sechs Kanten eines jeden der beiden Tetraeder begegnet, sind Doppelpunkte der Fläche (§ 8.). Diese Ebene schneidet daher die Fläche in einer Curve vierten Grades mit sechs Doppelpunkten, also in den vier Geraden, in welchen sie den Flächen beider Tetraeder begegnet.

Vom Punkte C_0

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta$$

kann man an die Fläche zunächst zwei, allerdings imaginäre Berührungskegel zweiten Grades legen, ausserdem aber noch einen weiteren Kegel vierten Grades, dessen Berührungscurve in der Ebene

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

liegt und somit aus den eben erwähnten vier geraden Linien besteht. Man kann daher längs dieser vier Linien Berührungsebenen an die Fläche legen, welche sich in einem Punkte schneiden.

Für die drei Punkte C_1, C_2, C_3 zerfällt der Kegel vierten Grades nicht; die Berührungsebenen

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta=0 \text{ u. s. w.}$$

schneiden vielmehr aus der Fläche je eine Curve vierten Grades mit zwei Doppelpunkten und es ist hiernach die im Schlusssatze des § 8. der oben citirten Arbeit aufgestellte Behauptung zu berichtigen. Dagegen zerfallen für jeden dieser Punkte C_1, C_2, C_3 die zwei Kegel zweiten Grades in vier Ebenen, welche längs gewisser Tetraederkanten berühren.

Zugleich mag bei dieser Gelegenheit einiger Eigenschaften der fraglichen Fläche gedacht werden, welche sich nicht unmittelbar aus den oben entwickelten allgemeinen Sätzen ergeben.

Legt man in einem Doppelpunkte A und dem entsprechenden Doppelpunkte B (z. B. A_1 und B_1) die Tangentialkegel, so schneiden diese sich gegenseitig in einem Kegelschnitte, welcher zugleich auf der Fläche liegt, und ausserdem in einem Kegelschnitt auf der Polarebene von C_0. Die Ebene des ersten Kegelschnittes ist dabei eine der durch den Punkt C_0 gehenden und die Fläche längs einer Geraden berührenden, oben erwähnten Ebenen. Jeder dieser Tangentialkegel berührt überdies die Fläche längs drei geraden Linien.

Die Tangentialkegel in einem der weiteren sechs Doppelpunkte berühren dagegen die Fläche längs vier geraden Linien und durchschneiden sie daher sonst nicht. Zwei dieser Kegel aber, deren Scheitel auf gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders A liegen, durchschneiden sich gegenseitig in zwei Kegelschnitten. Die sechs so sich ergebenden Kegelschnitte liegen paarweise in den Ebenen CC_1C_2, CC_1C_3, CC_2C_3.

Der Tangentialkegel, welchen man ausser dem eigentlichen Berührungskegel des Punktes selbst noch von einem der Doppelpunkte A oder B aus an die Fläche legen kann, zerfällt in die drei Ebenen, welche die Fläche längs der drei in jenem Punkte zusammenlaufenden Tetraederkanten berühren, und in einen Kegel dritten Grades mit einer isolirten Doppelkante. Für den Punkt A_1 z. B. ist die Gleichung des letzteren:

$$(\gamma + \delta)(\delta + \beta)(\beta + \gamma) = 8\,\beta\gamma\delta\,.$$

Die Berührungscurve dieses Kegels ist eine ebene und die Gleichung der Berührungsebene ist:

$$3\,\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0\,.$$

Für jeden der weiteren sechs Doppelpunkte dagegen zerfällt der Tangentialkegel in:

1) den Berührungskegel des Doppelpunktes selbst;
2) einen längs eines Kegelschnittes berührenden Kegel zweiten Grades;
3) die Berührungsebenen längs der zwei Kanten der Tetraeder A und B, welche sich in dem Doppelpunkte schneiden.

Für den Doppelpunkt

$$\alpha = -\beta\,, \quad \gamma = 0\,, \quad \delta = 0$$

z. B. ist die Gleichung des Kegels unter 2)

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha + \beta) + 4\,\gamma\delta = 0\,;$$

die Gleichungen der beiden Ebenen unter 3) dagegen sind

$$\alpha+\beta=0\,,\quad \gamma+\delta=0\,.$$

12. Eine andere bemerkenswerthe Fläche vierten Grades entspricht dem Kegelschnitte

$$\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}=0\,.$$

Dieser geht durch die drei Punkte c_1, c_2 und c_3, und die Schnittpunkte der drei Tangenten, die man an die Curve in diesen Punkten legen kann, liegen auf den Linien

$$y-z=0\,,\quad z-x=0\,,\quad x-y=0\,.$$

Die Fläche

$$\frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}+\frac{1}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}+\frac{1}{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}=0$$

hat daher ausser den acht Punkten A und B noch die drei Punkte C_1, C_2, C_3 zu Doppelpunkten und enthält die 12 geraden Linien, welche diese drei Punkte mit den Punkten A und B verbinden (§ 4.). Die Tangentialkegel in je zweien dieser Punkte C schneiden sich in zwei Kegelschnitten und die Ebenen der sechs so sich ergebenden Kegelschnitte schneiden sich sämmtlich im Punkte C_0.

Jede der sechs Ebenen

$$\alpha+\beta=0\,,\quad \alpha+\gamma=0 \text{ u. s. w.}$$

schneidet die Fläche in vier Geraden, jede der sechs Ebenen

$$\alpha-\beta=0\,,\quad \alpha-\gamma=0 \text{ u. s. w.}$$

dagegen in zwei Geraden und einem Kegelschnitt. Die sechs auf diese Weise entstehenden Kegelschnitte sind zu je zweien in doppelt perspectivischer Lage und die Scheitel der sechs Sehkegel liegen in den Punkten C_1, C_2, C_3.

13. Unter den Flächen sechsten Grades ist diejenige hervorzuheben, welche der Curve dritten Grades

$$(y+z)(z+x)(x+y)=8\,xyz$$

entspricht. Diese Curve geht durch die drei Fundamentalpunkte a und hat in diesen die Linien

$$y+z=0\,,\quad z+x=0\,,\quad x+y=0$$

zu Tangenten; ferner hat die Curve den Punkt c_0

$$x=y=z$$

zum isolirten Punkt. Die entsprechende Fläche

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)=8(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

hat daher die acht Punkte A und B zu dreifachen Punkten, den Punkt

C_0 zu einem vierfachen Punkt und die sechs Punkte, in welchen die Ebene

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

den sechs Kanten der Tetraeder A oder B begegnet, zu Doppelpunkten. Ferner liegen auf der Fläche die zwölf Kanten beider Tetraeder, und ausserdem sind die vier geraden Linien, welche den Punkt C_0 mit den vier Ecken A oder B verbinden, isolirte Doppellinien der Fläche. Der Tangentialkegel des vierfachen Punktes zerfällt in zwei Kegel zweiten Grades; derjenige eines dreifachen Punktes dagegen schneidet die Fläche in einer ebenen Curve dritten Grades, welche zugleich auf der gegenüberliegenden Tetraederebene liegt. Jede der sechs Ebenen $\alpha+\beta=0$ u. s. w. berührt die Fläche in je einer Kante der Tetraeder A und B und durchschneidet sie überdies in einem Kegelschnitt.

Chemnitz, im Januar 1874.

Ueber eine neue Bedingung für den gewöhnlichen Mittelwerthsatz.

Von Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Nach dem gewöhnlichen Mittelwerthsatz kann das Integral $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ auf die Form:

$$f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx\,, \quad a \leqq \xi \leqq b\,,$$

gebracht werden, wenn $\varphi(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ ihr Zeichen nicht wechselt. Diese Bedingung kann durch folgende davon gänzlich verschiedene ersetzt werden: Jene Umformung ist gestattet, *wenn* $f(x)$ *im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *entweder nirgends zunimmt oder nirgends abnimmt, und wenn,* $\int_a^x \varphi(x)\,dx = \Lambda(x)$ *gesetzt, die Function* $\Lambda(x)$ *im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *ihr Zeichen nicht wechselt und stets* $\leqq \Lambda(b)$ *ist.* Geometrisch bedeutet diese Bedingung Folgendes: Die Curve $y = \Lambda(x)$ darf, indem sie die Punkte $x = a$, $y = \Lambda(a) = 0$ und $x = b$, $y = \Lambda(b)$ verbindet, das von den Geraden:

$$x = a\,, \quad x = b\,, \quad y = 0\,, \quad y = \Lambda(b)$$

eingeschlossene Rechteck nicht verlassen.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus dem zweiten Mittelwerthsatz*):

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi_1}\varphi(x)\,dx + f(b)\int_{\xi_1}^b \varphi(x)\,dx\,, \quad a \leqq \xi_1 \leqq b\,,$$

da die beiden Integrale rechter Hand positiv sind, indem man einen zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Werth vor diese Integrale nimmt.

---

*) Man findet jenen Satz in Borchardt's Journal Bd. 69, S. 65, ferner auch in diesen Annalen Bd. VI, S. 313. Anm. d. Redaction.

Die neue Bedingung ist deshalb bemerkenswerth, weil sie für die Function $\varphi(x)$, der sie ja beliebig viele Zeichenwechsel gestattet, viel weniger einschränkend ist als die alte, wofür sie allerdings der Function $f(x)$ weniger Spielraum gönnt.

Ich benutze diese Gelegenheit, um in meinem letzten Aufsatz *„Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen“* (Seite 241 dieses Bandes) einen störenden Druckfehler zu berichtigen. Auf Seite 254 jenes Aufsatzes muss nämlich die zweite Formel so lauten:

$$\begin{aligned}\mathrm{Lim}\Big\{\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \cos x\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha + \cdots \cos nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha \\ + \sin x\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha + \cdots \sin nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\Big\} \\ = \frac{\pi}{2}\Big\{f(x_1+0)+f(x_1-0)\Big\} + \Big\{f(x_1+0)-f(x_1-0)\Big\}\,\mathrm{Lim}\int_0^{n(x-x_1)} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.\end{aligned}$$

Tübingen, im April 1874.

Ueber die Correspondenzformel.

Von A. Brill in Darmstadt.

Im VI. Bande dieser Annalen (S. 38 ff.) habe ich einen Satz bewiesen, vermöge dessen das bekannte Chasles'sche Correspondenzprincip für Punkte auf einer Geraden ausgedehnt wird auf Punkte einer Curve von allgemeinem Geschlecht. Erscheint an jener Stelle der Satz wesentlich nur als Corollar zu Untersuchungen über Correspondenzen-*paare*, und werden demnach manche an ihn anknüpfende Fragen dort unerörtert gelassen, so wird im vorliegenden Aufsatze beabsichtigt, durch näheres Eingehen auf die Eigenschaften einer einzelnen Correspondenz und ihrer Coincidenzen diese Lücke auszufüllen.

Der a. a. O. gelieferte algebraische Beweis der Correspondenzformel (der Formel für die Anzahl der Coincidenzen einer Correspondenz auf einer algebraischen Curve) wird in (I.) in geometrischer Fassung wiederholt. Die allgemeine Gestalt, welche Cayley jener Formel gegeben hat, indem er ausser einfachen auch mehrfach zu rechnende Punkte der Curve als durch die Correspondenz auf einander bezogen annahm, lässt sich, wie gezeigt wird, aus der vorher bewiesenen besonderen ableiten, ohne dass es nöthig ist, ein Zerfallen der Correspondenz unter Adjunction der Curvengleichung in einzelne Correspondenzen zwischen „einwerthigen" Punkten — was übrigens in vielen Fällen der Anwendung eintritt — vorauszusetzen. Man erreicht dies mit Hülfe eines auf Correspondenzen mit mehrwerthigen Punkten bezüglichen Satzes (§ 9.), welcher die Vertauschung des unabhängig veränderlichen Punktes mit einem der ihm entsprechenden Punkte betrifft.

Das Verhalten der Correspondenzen in Doppel-, Rückkehr- u. s. w. -Punkten der gegebenen Curve, das in (III.) betrachtet wird, veranlasst eine Unterscheidung zwischen „eigentlichen" und „uneigentlichen" Coincidenzen, von denen nur die ersteren bei eindeutiger Transformation der gegebenen Curve nicht verloren gehen können. Eine Reduction der Correspondenzformel wird ebenso nur durch eigentliche Coincidenzen, welche in singuläre Punkte der Curve fallen, hervorgebracht. Mit Hülfe der in § 21. aufgestellten Regeln lässt sich in jedem Falle die

Grösse dieser Reduction bestimmen, wobei sich denn ganz allgemein ergiebt, dass das Vorhandensein von Doppelpunkten nur in Ausnahmefällen eine solche nöthig macht.

I. Correspondenzen mit einwerthigen Punkten.

1. Vermöge einer Correspondenz φ zwischen zwei Punkten x und y (die man sich als Gleichung zwischen den Coordinaten derselben vorzustellen hat) möge jedem Punkte x der Ebene eine Curve (y) L. Ordnung entsprechen, jedem Punkte y eine Curve (x) K. Ordnung. Sei dazu eine Curve f von der m. Ordnung gegeben, so entsprechen wegen φ jedem Punkte y $Km = k$ Punkte x dieser Curve, jedem Punkte x $Lm = l$ Punkte y auf f. Es giebt in der Ebene eine Curve von der Ordnung $K + L$, für welche die Curve (y) durch den Punkt x geht, und umgekehrt. Es giebt also auf f $k + l$ Punkte, für welche einer der correspondirenden Punkte x in y fällt, oder umgekehrt. Wir werden diese Punkte die *Coincidenzpunkte* der Correspondenz φ nennen; die Correspondenz selbst, insofern wir sie in der Folge vorzugsweise in Bezug auf f betrachten, wollen wir durch (k, l) bezeichnen.

2. Gegeben sei nun zwischen den Punkten x und y ausser φ eine andere Correspondenz $\varphi' = (k', l')$. Wandert y auf f, so beschreiben die Punkte x, welche gleichzeitig den Correspondenzen φ und φ' genügen, eine Curve, deren Grad leicht zu ermitteln ist. Wir betrachten eine beliebige Gerade G. Einem Punkte x derselben entsprechen vermöge φ' l' Punkte y auf f, jedem von diesen vermöge φ eine Curve von der Ordnung K, die auf G $l'K$ Punkte x' ausschneiden. Da nun jedem von diesen wiederum $k'L$ Punkte x entsprechen, so ist die Zahl der Coincidenzen von Punkten x mit Punkten x' gleich:

$$l'K + k'L.$$

Daher ist:

$$m(l'K + k'L) = l'k + k'l$$

die Anzahl der Punktepaare x, y auf f, welche den beiden Correspondenzen (k, l) und (k', l') zugleich genügen.

Zeigen die Punkte x und y in jeder der beiden Correspondenzen ein *symmetrisches* Verhalten, ist also $k = l$, $k' = l'$, so ergiebt das angeführte Verfahren nicht nur die Coincidenzen der Punkte x, sondern auch die der entsprechenden Punkte y, und die Anzahl der Paare, welche gleichzeitig den Correspondenzen (k, k), (k', k') genügen, ist gleich der *Hälfte* der oben gefundenen Zahl:

$$= kk'.$$

3. Wir betrachten jetzt eine Correspondenz φ für sich, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Curven (x) und (y) durch die Punkte y

bez. x selbst hindurch gehn, welchen sie entsprechen, und wollen, um gleich die Rücksicht auf die Curve f zu wahren, annehmen, dass einem Punkte y von f eine Curve (x) entspreche, von deren k Schnittpunkten mit f γ in y fallen (z. B. durch Berührung, oder einen vielfachen Punkt u. s. w.), wir wollen kurz sagen: eine Curve (x) mit einem *„γ-werthigen Schnittpunkt in $x = y$"*. Ebenso sollen vermöge derselben Correspondenz von den l Schnittpunkten, welche einem Punkte x entsprechen, δ wieder in x fallen. Alsdann kann man zunächst zeigen, dass immer $\gamma = \delta$ ist. Wir werden eine solche Correspondenz in der Folge durch $(k - \gamma, l - \gamma)$ bezeichnen.

Wegen eines geometrischen Beweises dieser Behauptung sei es gestattet, auf Nr. II. zu verweisen; hier möge ein einfacher algebraischer Beweis Platz finden.

Man denke sich mit Hülfe von $f(x) = 0$ eine der 3 homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes x, etwa x_3, eliminirt, so muss in der Eliminationsgleichung der Factor $\frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}$ γ-mal auftreten. Eliminirt man dann noch y_3, so enthält die resultirende Gleichung diesen Factor $m\gamma$-mal. Aber diese Gleichung kann keine andere sein, als wenn man umgekehrt erst y_3 und dann x_3 eliminirt hätte, wodurch denn jener Factor $m\delta$-mal vorgekommen wäre. Daher hat man $\gamma = \delta$.

4. Es mögen nun wieder zwei Correspondenzen gegeben sein: eine der eben betrachteten Art, $\varphi' = (k' - \gamma', l' - \gamma')$, mit einem γ' werthigen Punkt in $x = y$, und eine $\varphi = (k, l)$, welche durch Zusammenfallen von x mit y im Allgemeinen nicht befriedigt wird. Man suche die Anzahl der Paare von *getrennt* liegenden Punkten x, y auf f, welche gleichzeitig beiden genügen. Von der Anzahl Aller, welche die letztere Bedingung erfüllen:

$$kl' + lk',$$

sind diejenigen Punktepaare abzuzählen, für welche x in y fällt. Dies tritt nun aber nur an denjenigen Stellen von f ein, wo Coincidenzen von φ stattfinden, und zwar an jeder solchen Stelle γ'-fach, weil φ' dann immer einen γ'-fachen Punkt besitzt. Zählt man also:

$$\gamma'(k + l)$$

Paare ab, so bleiben die gesuchten:

$$k(l' - \gamma') + l(k' - \gamma')$$

Paare von getrennt liegenden Punkten.

5. Wir gehn endlich zu dem Falle über, dass 2 Correspondenzen $\varphi = (k - \gamma, l - \gamma)$ und $\varphi'(k' - \gamma', l' - \gamma')$ mit je einem γ- und γ'-werthigen Punkt in $x = y$ gegeben sind. Man denke sich zunächst die eine Correspondenz φ ein wenig deformirt in eine solche $\pi = (k, l)$,

welche in $x = y$ keinen ein- oder mehrwerthigen Punkt mehr besitzt, *dagegen γ diesem benachbarte Punkte auf f.* Nun ist die Anzahl der Punktepaare, welche den Correspondenzen π und φ' genügen, nach dem Vorigen:

$$kl' + lk' - \gamma'(k + l).$$

Unter diesen Paaren giebt es zwar keine solche von *zusammenfallenden* Punkten mehr, wohl aber noch solche von nahe benachbarten Punkten x, y, welche zusammenfallen, sobald die Deformation aufhört. Diese sind zu finden.

Lassen wir den Punkt x auf f wandern, so begleiten ihn die γ Punkte y, welche die deformirte Correspondenz π ergiebt, in unmittelbarer Nähe. Rückt aber x in die Nähe eines solchen Punktes C von f, in welchem die Correspondenz φ' ausser einem γ'-fachen Punkt noch eine Coincidenz besitzt, so rückt auch der coincidirende Punkt y in die Nähe von x, fällt in C mit x zusammen und entfernt sich wieder, wenn x sich von C entfernt. Während dessen wird aber dieser Coincidenzpunkt jeden der γ Punkte y, welche x begleiten, einmal passiren, und jeder Durchgang bezeichnet ein Paar von nahe benachbarten Punkten x, y, welche beiden Correspondenzen π und φ' angehören. Jedem Punkte C entsprechen somit γ Paare, und, wenn es P' Coincidenzpunkte der Correspondenz φ' giebt, so sind $\gamma \cdot P'$ Paare abzuziehen. Es bleiben also:

$$(\varphi\varphi') = kl' + lk' - \gamma'(k + l) - \gamma P'$$

Paare von getrennt fallenden Punkten x, y, welche den beiden Correspondenzen φ und φ' gleichzeitig genügen.

6. Nun verfährt man aber unsymmetrisch, indem man die eine Correspondenz φ deformirt. Hätte man statt dessen φ' deformirt, so würde man die Formel:

$$(\varphi\varphi') = k'l + l'k - \gamma(k' + l') - \gamma' P$$

erhalten haben, wo *P die Anzahl der Coincidenzpunkte der Correspondenz φ ist.* Da die beiden Werthe $(\varphi\varphi')$ einander gleich sein müssen, so erhält man durch Vergleichung:

$$\frac{P - (k - \gamma) - (l - \gamma)}{\gamma} = \frac{P' - (k' - \gamma') - (l' - \gamma')}{\gamma'}.$$

Dieser Quotient hat für φ dieselbe Form wie für φ' und muss daher von der speciellen Form der Correspondenz unabhängig sein; er kann nur noch von den Constanten der Curve f abhängen. Man findet aus irgend einer speciellen Correspondenz (z. B. der zwischen dem Berührungspunkt einer Tangente und den übrigen Schnittpunkten derselben bestehenden, für welche $P =$ der Anzahl der Wendetangenten von f

ist) den Werth des Quotienten gleich $2p$, wo p das Geschlecht der Curve f ist. Daher hat man die Correspondenzformel:

$$P = (k-\gamma) + (l-\gamma) + 2p\gamma\,;$$

und ferner durch Substitution:

$$(\varphi\varphi') = (k-\gamma)(l'-\gamma') + (k'-\gamma')(l-\gamma) - 2p\gamma\gamma'.$$

7. Setzt man noch:

$$k-\gamma = \varkappa\,;\quad k'-\gamma' = \varkappa'$$
$$l-\gamma = \lambda\,;\quad l'-\gamma' = \lambda',$$

wo dann also $\varkappa$ die Anzahl der vermöge der Correspondenz $\varphi = (\varkappa, \lambda)$ dem Punkte y entsprechenden nicht mit y zusammenfallenden Punkte x ist, λ die Anzahl der dem Punkt x entsprechenden Punkte y, welche nicht mit x vereinigt liegen u. s. w., so ist die *Anzahl der Coincidenzpunkte der Correspondenz* $(\varkappa, \lambda)$:

$$P = \varkappa + \lambda + 2p\gamma\,,$$

wo γ die „Werthigkeit" des Punktes $x = y$ bedeutet. Ferner ist die *Anzahl der den beiden Correspondenzen* $(\varkappa, \lambda)$ *und* $(\varkappa', \lambda')$ *zugleich entsprechenden Punktepaare* x, y:

$$(\varphi\varphi') = \varkappa\lambda' + \lambda\varkappa' - 2p\gamma\gamma'.$$

Ist das Vorkommen der Punkte x und y in jeder der Correspondenzen φ und φ' ein *symmetrisches*, so dass also $\varkappa = \lambda$, $\varkappa' = \lambda'$ ist, so ist, aus ähnlichen Gründen wie oben (§ 2.), die Zahl der gesuchten Paare gleich der *Hälfte* von $(\varphi\varphi')$:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') = \varkappa\varkappa' - p\gamma\gamma'.$$

8. Von den obigen Formeln für P und $(\varphi\varphi')$ steht hinsichtlich der Einfachheit der Darstellung keine hinter der anderen zurück; hinsichtlich der Anwendbarkeit verhält sich die letztere zur ersteren wie der Ausdruck für den Grad der Resultante aus zwei algebraischen Gleichungen zu dem für den Grad der Discriminante einer solchen. Man findet die weitere Discussion der Formel für $(\varphi\varphi')$, sowie eine Ausdehnung derselben auf einen allgemeineren Fall in dem oben citirten Aufsatz im VI. Bande d. Ann. durchgeführt. An dieser Stelle möge die Formel für P, die „*Correspondenzformel*", einer näheren Betrachtung unterzogen und insbesondere (in II.) auf eine solche Form gebracht werden, dass sich der Ausdruck für $(\varphi\varphi')$ als eine Folge derselben darstellen lässt.

II. Correspondenzen mit mehrwerthigen Punkten.

9. Wenn eine Correspondenz zwischen zwei Punkten x und y einer Curve f durch Zusammenfallen von x mit y befriedigt wird, so

ist, wie oben in § 3. gezeigt wurde, diejenige Zahl, welche wir die „Werthigkeit" des Punktes $x = y$ genannt haben, unabhängig davon, ob man den Punkt x oder den Punkt y als den gegebenen, unabhängig veränderlichen betrachtet. Diese Bemerkung lässt sich in folgender Weise verallgemeinern:

Wenn vermöge einer Correspondenz zwischen zwei Punkten x und y einer Curve f unter den einem Punkte x' entsprechenden Punkten y ein i-werthiger Punkt y', d. h. ein solcher Punkt vorkommt, in welchem i einfache Punkte vereinigt liegen, so ist — sofern die Lage des i-werthigen Punktes y' mit der von x' als continuirlich veränderlich vorausgesetzt wird — umgekehrt unter den dem Punkt y' entsprechenden Punkten x der Punkt x' ebenfalls als ein i-werthiger zu rechnen.

10. Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes leicht für den Fall, dass f eine Gerade ist. Denn die einander entsprechenden Parameter x und y der Punkte einer Geraden lassen sich als Coordinaten einer Curve auffassen, welche, wenn einem jeden Punkt x i gleiche Werthe y (ausserdem noch andere Werthe y) entsprechen sollen, eine i-fache Curve als Bestandtheil besitzt. Vermöge dieser Curve entspricht dann umgekehrt jedem Werth von y' das zugehörige x' i-fach.

Dieser Betrachtungsweise kann, wie dies ähnlich Herr Zeuthen that (diese Annalen Bd. III., S. 151), eine allgemeinere Fassung gegeben werden, indem man an Stelle der Coordinaten zwei Geradenbüschel einführt. Wir wollen gleich an den allgemeineren Fall einer beliebigen Curve f anschliessen und ausserhalb derselben zwei beliebig gelegene Punkte A und B annehmen, von deren einem A im Strahl X nach einem Punkte x von f gezogen werden möge. Sucht man die zu x und den übrigen Schnittpunkten von X mit f gehörigen Punkte y und verbindet jeden derselben mit B durch einen Strahl Y, so bilden, wenn x sich bewegt, die Schnittpunkte der Strahlen X, Y eine Curve C, welche als genau dieselbe entstanden wäre, wenn man die zu den Strahlen Y gehörigen Strahlen X aufgesucht und mit diesen geschnitten hätte. Entspricht nun einem Punkte x' von f unter anderen auch ein i-werthiger Punkt y', der seine Lage continuirlich ändert, wenn x' dieselbe ändert, so enthält die Curve C eine i-fache Curve als Bestandtheil, vermöge deren denn auch umgekehrt der Strahl X' dem Strahle Y' i-fach entspricht. Weil nun aber die Lage der Scheitel A, B der Strahlenbüschel beliebig ist, so lässt sich das, was von dem einem Punktepaare x', y' entsprechenden Strahlenpaare $X'Y'$ gilt, auf die Punkte $x'y'$ von f selbst übertragen, welche somit die Eigenschaft besitzen, einander *wechselweise* i-werthig zu entsprechen, q. e. d.

11. Durch die vorstehenden Betrachtungen rechtfertigt es sich, wenn wir in der Folge bisweilen unsymmetrisch verfahren, indem wir

den Punkt y als den unabhängig veränderlichen ansehn. Die so abgeleiteten Eigenschaften einer Correspondenz können nach Obigem keine anderen sein, als man sie erhalten haben würde, wenn man den Punkt x als den unabhängig veränderlichen angesehn hätte. Fällt insbesondere ein i-werthiger Punkt y' mit x' selbst zusammen, so hat man den oben (§ 3.) betrachteten Fall. Der Beweis desselben hätte einer kleinen Modification bedurft, wenn man noch die Punkte A und B als vereinigt gelegen angenommen hätte. Diese Modification, auf welche, mit Bezug auf § 1. der oben erwähnten Abhandlung im VI. Bande dieser Annalen (s. d. Druckfehlerverzeichniss zum VI. Bande), Herr Zeuthen mich aufmerksam gemacht hat, findet man leicht durch geometrische Interpretation der oben in § 3. angestellten algebraischen Betrachtung. Uebrigens lässt sich, wie bereits erwähnt, die besondere Untersuchung dieses Falls durch Annahme getrennter Lage der Punkte A, B vermeiden.

Es möge hier noch hervorgehoben werden, dass der oben (§ 9.) ausgesprochene Satz ohne Weiteres auf den von Herrn Zeuthen a. a. O. untersuchten Fall, wo die einander entsprechenden Punkte x und y auf *verschiedenen* Curven f und F gelegen sind, übertragen werden kann.

12. Hat man nun eine Correspondenz mit mehrwerthigen Punkten $\Phi(xy)$ gegeben, vermöge deren jedem Punkte x der Curve f λ' (nicht in x fallende) i'-werthige Punkte y', λ'' i''-werthige Punkte y'' u. s. w. auf f und endlich ein Γ-werthiger Punkt in x selbst entsprechen, so ist die Gesammtzahl aller einem Punkte x entsprechenden Punkte y gleich zu rechnen:

$$\Gamma + i'\lambda' + i''\lambda'' + \cdots = \Gamma + \Lambda$$

einwerthigen Punkten, von denen Λ nicht in x fallen. Die Gesammtzahl der einem Punkte y entsprechenden Punkte x findet man in folgender Weise. Man bestimme die Zahl $\varkappa'$ derjenigen Lagen des Punktes x, welchem der Punkt y als i'-facher Punkt y' entspricht; dann entsprechen diese, nach dem obigen Satz, dem Punkte y je als i'-werthige Punkte x'. Aehnlich bestimme man die Anzahl der dem Punkte y entsprechenden i''-werthigen Punkte x'' u. s. w. Die Gesammtzahl der einem Punkte y entsprechenden Punkte x ist alsdann gleich zu rechnen:

$$\Gamma + i'\varkappa' + i''\varkappa'' + \cdots = \Gamma + \mathrm{K}$$

einfachen Punkten.

13. Auch die Coincidenzen einer solchen Correspondenz sind verschiedenartig. Rückt nämlich von den einem Punkte x entsprechenden λ' i'-werthigen Punkten y' ein solcher in den Punkt x herein (abgesehen von dem in $y = x$ schon vorhandenen Γ-fachen Punkt), so

ist diese Coincidenz offenbar für i' Coincidenzen einfacher Punkte zu zählen. Giebt es P' solcher Coincidenzen, ferner P'' Coincidenzen von i''-werthigen Punkten y'' mit x u. s. w., so sind die sämmtlichen Coincidenzen äquivalent:

$$P = i'P' + i''P'' + \cdots$$

Coincidenzen einwerthiger Punkte.

Durch die vorstehenden Erörterungen ist die Correspondenz Φ auf eine solche mit einwerthigen Punkten zurückgeführt. Wendet man die für eine solche aufgestellte Correspondenzformel auf sie an, so erhält man die Gleichung:

$$P = \mathsf{K} + \Lambda + 2p\Gamma,$$

oder:

$$i'(P' - \varkappa' - \lambda') + i''(P'' - \varkappa'' - \lambda'') + \cdots = 2p\Gamma.$$

Dies ist aber eben die von Cayley angegebene Formel (Comptes rendus, T. LXII, 1866).

14. Mit Hülfe der in § 12. gemachten Bemerkungen lässt sich umgekehrt der Grad derjenigen Gleichung in den Coordinaten der Punkte x und y, welche die Beziehung auf der Curve f vermittelt, bestimmen. Dies möge an dem Beispiel der durch die Tangenten von einem Punkt x der Curve hergestellten Correspondenz ausgeführt werden.

Die Curve f sei von der m. Ordnung. — Dem Punkte x entsprechen:

1) die $m(m-1)-2$ Berührungspunkte y' der Tangenten des durch x gehenden Büschels (je doppelt zu rechnen);
2) die $(m-3)\{m(m-1)-2\}$ übrigen Schnittpunkte y'' dieser Tangenten;
3) der $[m(m-1)-2]$-fache Punkt in x selbst.

Die Summe aller ist:

$$m\{m(m-1)-2\}$$

einfachen Punkten äquivalent; der Grad der betreffenden Correspondenzgleichung in den Coordinaten von y also gleich:

$$m(m-1)-2.$$

Ferner entsprechen einem Punkte y:

1) sofern derselbe als Berührungspunkt einer Tangente (also ein Punkt y') aufgefasst wird: die $m-2$ übrigen Schnittpunkte x', je 2-fach zu rechnen;
2) sofern derselbe einfacher Schnittpunkt einer Tangente (y'') sein kann: die $(m-3)\{m(m-1)-2\}$ einfachen Schnittpunkte x'' der Tangenten des Büschels durch y; je einfach.
3) ein $[m(m-1)-2]$-facher Punkt in y selbst.

Die Summe ist:

$$m(m-1)(m-2)$$

einfachen Schnittpunkten äquivalent, woraus hervorgeht, dass der Grad der Correspondenzgleichung hinsichtlich der Coordinaten des Punktes y ansteigt auf:

$$(m-1)(m-2).$$

15. Ein in mehrfacher Hinsicht bemerkenswerthes Beispiel einer Correspondenz Φ mit mehrwerthigen Punkten ist diejenige, welche sich aus zwei Correspondenzen: $(\varkappa, \lambda)$ mit einem γ-fachen, und $(\varkappa', \lambda')$, mit einem γ'-fachen Punkt in $x=y$ (denen ein Punktepaar x, y zugleich genügen soll) zusammensetzt, und zu einer Bestimmungsgleichung für $(\varphi\varphi')$ (vgl. § 8.) führt. Vermöge $(\varkappa, \lambda)$ entsprechen nämlich einem Punkte x λ Punkte y, deren jedem wiederum vermöge $(\varkappa', \lambda')$ $\varkappa'$ Punkte, die wir nun als y'' bezeichnen wollen, entsprechen. Jedem von diesen entsprechen rückwärts λ' Punkte (x'), deren jedem wiederum $\varkappa$ Punkte (x'') entsprechen. Alsdann ist $(\varphi\varphi')$ die Anzahl der Coincidenzen von Punkten y'' mit x. Die dem Punkt x entsprechenden Punkte y' sind je γ'-werthige Punkte, während die y'' einwerthig sind. Ist noch P die Anzahl der Coincidenzen der Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$, so erhält man unter Anwendung der erweiterten Correspondenzformel (§ 13.):

$$\gamma'(P-\varkappa-\lambda)+1\cdot((\varphi\varphi')-\varkappa\lambda'-\lambda\varkappa')=2p\cdot 0=0.$$

Dies ist aber die in § 6. auf anderem Wege abgeleitete Formel für $(\varphi\varphi')$.

III. Correspondenzen mit theilweise festen Punkten. Doppel- und Rückkehrpunkte der gegebenen Curve.

16. Mit Rücksicht darauf, dass, wie man soeben gesehn, eine Correspondenz mit mehrwerthigen Punkten als ein besonderer Fall einer solchen mit einwerthigen aufgefasst werden kann, knüpfen wir die folgenden Betrachtungen an die leichter zu übersehende Correspondenz mit einwerthigen Punkten an. Die Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ mit einem γ-werthigen Punkt in $x=y$ dachten wir uns oben (§ 1.) durch eine Gleichung $\varphi(x, y)=0$ zwischen den Coordinaten der Punkte x und y gegeben. Wenn nun die Curve f keine Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt, und die Curven (x) und (y), von der K. und L. Ordnung, welche die $\varkappa = K\cdot m-\gamma$ einem Punkte y entsprechenden Punkte x, bez. die $\lambda = L\cdot m-\gamma$ einem Punkte x entsprechenden y ausschneidet, alle mit x, bezw. y, beweglich sind, so liegen die P Coincidenzpunkte von $(\varkappa, \lambda)$ auf einer Curve C, deren Gleichung man aus $\varphi=0$ erhalten würde, wenn man darin die Coordinaten von x und y unendlich wenig verschieden annähme. Wir können indess ohne diese algebraische Operation den Grad dieser Curve C der Coincidenzpunkte vermittelst des Ausdrucks für P bestimmen, wenn wir darin die Zahlen $\varkappa$, λ und p durch m, γ, K und L ausdrücken:

$$P = \varkappa + \lambda + 2p\gamma = m\,\{K + L + \gamma\,(m-3)\} = m\cdot\Pi\,,$$

und berücksichtigen, dass diese P Punkte ein vollständiges Schnittpunktsystem auf f bilden müssen. Man erhält somit für den Grad von C die Zahl:

$$\Pi = K + L + \gamma\,(m-3).$$

17. Die Zahl Π bleibt die nämliche, wenn man für f eine Curve mit Doppel- und vielfachen Punkten nimmt, durch welche, ebenso wie durch feste einfache Punkte von f, die Curven (x) und (y) noch beliebig hindurch gehn können. Denn durch Specialisirung der Constanten in den Gleichungen für die Curve f und die Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ wird der Grad der Curve C nicht geändert. Irgend einem Punkte y der Curve f entsprechen dann ausser den γ in ihn selbst entfallenden Punkten:

a) $\varkappa$ mit y bewegliche Punkte;

b) die in *festliegende* einfache oder mehrfache Punkte $A, A', \cdots$ von f entfallenden Schnittpunkte der Curven (x) und (y) mit f. — Die Punkte $A, A' \cdots\cdot$ mögen „*Ausnahmepunkte*" von f heissen.

Demgemäss findet nun eine Coincidenz statt in folgenden Fällen:

1) Wenn einer der $\varkappa$ beweglichen einem Punkte y entsprechenden Punkte x (oder auch: einer der λ einem Punkte x entsprechenden Punkte y, vgl. § 10.) diesem Punkt auf *demselben* Curvenzweig unendlich nahe gelegen ist. Dieser Art sind alle Coincidenzen, welche eintreten, wenn f keine Ausnahmepunkte besitzt. Wir wollen dieselben im Gegensatz zu allen anderen, für welche eine jener Eigenschaften nicht vorhanden ist, *eigentliche Coincidenzen nennen.* Für eine gegebene Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ sei die Anzahl derselben $= P'$.

2) Wenn einer der Ausnahmepunkte A mit y zusammenfällt, d. h. wenn y in einen solchen hereinrückt. — Diese Coincidenzen sind uneigentliche, wenn von den $\varkappa$ beweglichen Punkten x, welche dem in A liegenden Punkte y entsprechen, keiner in A hereinfällt. Tritt dieser Fall indess für irgend einen Ausnahmepunkt A ein, so kann es sich ereignen, dass in diesen *Ausnahmepunkt eigentliche* Coincidenzen zu liegen kommen:

I. Wenn von den $\varkappa$ Punkten x, welche einem auf einen bestimmten Zweige von A angenommenen Punkte y entsprechen, einige auf *denselben* Zweige, auf welchem y liegt, zurückfallen. (Beispiele § 23. unten.)

II. Wenn jener Ausnahmepunkt A ein vielfacher Punkt mit theilweise *zusammenfallenden* Zweigen, z. B. ein Rückkehrpunkt ist. Zwei in einem solchen Punkt von f vereinigte Punkte der Correspondenz sind nicht nur als unendlich benachbart, sondern auch als auf dem-

selben Curvenelemente unendlich benachbart anzusehn, und bilden somit eine eigentliche Coincidenz.

Die unter I. und II. aufgezählten, in Ausnahmepunkte entfallenden eigentlichen Coincidenzen mögen vereinigt und ihre Summe durch ϱ bezeichnet werden. Diese ϱ Coincidenzen sind dann unter der obigen Zahl P' mit inbegriffen. Es möge demnach $P' - \varrho = P$ gesetzt werden.

Endlich möge noch Q die Summe aller *uneigentlichen* Coincidenzen von $(\varkappa, \lambda)$ darstellen.

Aus § 16. folgt dann, dass die Gleichung besteht:

$$P + Q + \varrho = m \cdot \Pi,$$

aus welcher sich die Zahl $P = P' - \varrho$ der *eigentlichen, nicht in Ausnahmepunkte entfallenden Coincidenzen* bestimmen lässt, wenn man Q und ϱ kennt.

Es möge zunächst die Anzahl Q der uneigentlichen Coincidenzen ermittelt werden.

19. In einen einfachen Ausnahmepunkt A von f möge für jede Lage von y eine Anzahl σ der diesem Punkt entsprechenden Schnittpunkte der Curve (x) entfallen; während von den einem Punkte x entsprechenden Punkten τ in A fallen mögen (wo τ und σ auch Null sein können).

Rückt nun der Punkt y in A, so entspricht ihm einmal der Punkt A σ-fach, weiter aber entspricht ihm die ganze Curve f τ-fach, weil er selbst jedem Punkt x dieser Curve τ-fach entspricht, und man hat somit:

$$\sigma + \tau$$

in A entfallende Coincidenzen*).

20. Aehnlich ermittelt man die Anzahl der in einen Doppelpunkt oder einen vielfachen Punkt von f entfallenden Punkte der Curve C. Man nehme zunächst an, dass für eine gegebene Correspondenz die Werthigkeit γ des Punktes $x = y$ Null sei, und dass in einem Doppelpunkt A' von f jede Curve (x) einen σ'-werthigen, jede Curve (y) einen τ'-werthigen Schnittpunkt besitze. Deformirt man nun die Correspondenz ein wenig, so dass die τ' vorher in A' entfallenden Punkte der Curve (y), welche irgend einem Punkte x entsprechen, nicht mehr

*) Diese Coincidenzen gehören nicht in die Kategorie der eigentlichen Coincidenzen, weil sie nicht dadurch entstanden sind, dass einer der $\varkappa$ beweglichen dem Punkte A entsprechenden Punkte x in diesen herein gerückt ist. Für $\tau = 0$ erkennt man dies direct; ist aber τ von Null verschieden, so kann man überhaupt nicht mehr von $\varkappa$ discreten dem Punkt A entsprechenden Punkten x reden, weil die ganze Curve f an deren Stelle getreten ist.

in A' selbst, sondern nur dem Punkte A' nahe benachbart fallen, so entspricht irgend einem von diesen τ' Punkten die ganze Curve f selbst einfach (wie im vorstehenden §), geht also y auf dem Weg zum Doppelpunkt durch einen solchen hindurch, so erhält man auf die oben (ibd.) erörterte Weise eine einfache Coincidenz; es ergeben sich so τ' Coincidenzen, zu welchen noch die σ' Coincidenzen kommen, welche eintreten, wenn y den Punkt A' selbst passirt, so dass im Ganzen in A': $\sigma' + \tau'$ Coincidenzen fallen. Geht man nun zu einer Correspondenz über, welche in A' sich ebenso wie die oben besprochene verhält, ausserdem aber in $x = y$ einen γ-werthigen Punkt besitzt, so kommen zu jenen $\sigma' + \tau'$ in A' entfallenden Coincidenzen noch die 2γ weiteren hinzu, welche durch Zusammenfallen je eines Zweiges des Doppelpunktes mit den auf den anderen Zweig entfallenden γ Schnittpunkten eintreten, und man hat im Ganzen:

$$\sigma' + \tau' + 2\gamma$$

in einen Doppelpunkt entfallende (uneigentliche) Coincidenzen*). Man findet auf demselben Wege die Anzahl der einem i-fachen Punkte A'' von f entsprechenden Coincidenzen, wenn σ'', bez. τ'' Schnittpunkte der Curven (x) und (y) in ihn entfallen, gleich:

$$\sigma'' + \tau'' + i(i-1)\gamma.$$

21. Haben also vermöge einer Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ (die übrigens nicht blos einwerthige, sondern auch beliebig vielwerthige Punkte besitzen kann) die Curven (x) und (y) in irgend einem festen i-fachen („Ausnahme"-) Punkte A von f $(i = 1, 2, \cdots)$ bezw. einen σ- und τ-werthigen Schnittpunkt, und ist die Anzahl der beweglichen einwerthigen Punkte, welche einem Punkt y, bez. x entsprechen (mehrwerthige denke man sich in einwerthige zerlegt):

$$\varkappa = m \cdot K - \Sigma\sigma - \gamma; \quad \lambda = m \cdot L - \Sigma\tau - \gamma,$$

wo das Zeichen Σ die Summe über die *allen* Ausnahmepunkten ent-

*) Die $\sigma' + \tau'$ ersteren Coincidenzen sind uneigentliche aus dem in der vorhergehenden Note angeführten Grunde; die 2γ anderen sind gleichfalls solche, und zwar nicht nur für den Fall, dass A' ein Doppelpunkt mit getrennten Tangenten ist, sondern auch noch, wenn derselbe ein Rückkehrpunkt ist. Man erkennt das Letztere am besten an dem besonderen Fall, wo $\tau' = 0$, σ' aber von Null verschieden ist, für welchen im Allgemeinen keiner von den $\varkappa$ dem Punkte A' entsprechenden Punkten x in denselben hereinfällt, so dass also die eine Bedingung der eigentlichen Coincidenz unerfüllt bleibt. — Wenn für $\sigma' = \tau' = 0$ γ von den $\varkappa$ dem Punkt A entsprechenden Punkten in A zurückfallen, wodurch dann, wenn A ein Rückkehrpunkt ist, γ eigentliche Coincidenzen entstehn, so muss man hiernach annehmen, dass dieselben zu jenen 2γ uneigentlichen Coincidenzen *hinzugetreten* sind, was sich in der That in einzelnen Fällen leicht nachweisen lässt. — Eine Bestätigung der obigen Schlüsse gewährt übrigens die Bemerkung in § 22.

sprechenden Zahlen bedeutet, so ist die Anzahl aller uneigentlichen Coincidenzen nach Vorstehendem:

$$Q = \Sigma\sigma + \Sigma\tau + \gamma \cdot \Sigma i(i-1)\,,$$

wo die letzte Summe Σ sich über alle Ausnahmepunkte von f erstreckt. Substituirt man diesen Werth von Q in die Gleichung des § 18., so erhält man, indem man noch den Ausdruck für Π einsetzt:

$$P = m \cdot \Pi - Q - \varrho = \varkappa + \lambda + 2p\gamma - \varrho\,,$$

wo:

$$p = \tfrac{1}{2}\, m\,(m-3) + 1 - \Sigma\, \tfrac{1}{2}\, i\,(i-1)$$

das Geschlecht der Curve f ist. Man hat ferner für *die Anzahl P' aller eigentlichen* (§ 17.) *Coincidenzen:*

$$P' = \varkappa + \lambda + 2p\gamma\,,$$

also genau die frühere Correspondenzformel (§ 7.), während P die Anzahl derjenigen eigentlichen Coincidenzen bedeutet, welche nicht in Ausnahmepunkte von f fallen. Um P aus der Correspondenzformel (P') zu erhalten, hat man eine *Reduction* ϱ an derselben anzubringen, welche sich aus den wegen der einzelnen Ausnahmepunkte anzubringenden Reductionen zusammensetzt. Die letztere aber findet man (§ 18.), *indem man die Anzahl derjenigen von den $\varkappa$ einem Ausnahmepunkte A entsprechenden einwerthigen Punkten x bestimmt, welche in A zurückfallen* (und zwar für einen vielfachen Punkt A mit getrennten Zweigen auf *denselben* Zweig, auf welchem y angenommen wurde). Dies ist (für jeden Zweig von A und) für alle Ausnahmepunkte A auszuführen. Die Summe der so erhaltenen Zahlen ist ϱ. — Insbesondere für *Rückkehrpunkte* gilt diese Regel ohne den in Klammern zugefügten Vorbehalt.

An Stelle der Correspondenzformel des § 7. (für P') tritt die des § 13., wenn die Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ durch eine solche mit mehrwerthigen Punkten ersetzt wird. Die Regel für Bestimmung der Reduction ϱ bleibt aber die nämliche auch für diesen Fall.

22. Handelt es sich in den Fällen der Anwendung meist um den Werth des reducirten Ausdrucks P, so lässt sich doch auch dem Ausdruck P' ein nicht unwichtiger geometrischer Sinn unterlegen. Jede Correspondenz behält nämlich offenbar ihre Bedeutung für alle durch eindeutige Transformation aus einander ableitbaren Curven, sowohl was die Zahlen $\varkappa$, λ, γ, als auch was die Gesammtzahl P' der *eigentlichen* Coincidenzen angeht. Denn die Eigenschaft zweier Punkte, auf demselben Curvenelement von f unendlich nahe benachbart zu liegen, ist eine durch eindeutige Transformation unzerstörbare, ob dieses Element nun ein *einfaches* Curvenelement von f ist, oder mit anderen Elementen zu einem vielfachen Punkt von f vereinigt, oder endlich in

einen Rückkehrpunkt von f umgefaltet ist. Man muss also schliessen, dass eine z. B. in einen Rückkehrpunkt A von f entfallende *eigentliche* Coincidenz bei einer eindeutigen Transformation von f, durch welche der Rückkehrpunkt zerstört wird (was immer möglich ist, indem man die Transformationscurven durch A gehn lässt), in eine eigentliche Coincidenz der gewöhnlichen Art auf der transformirten Curve übergeht. Dies war aus anderen Gründen zu erwarten.

23. Wie sich die wegen vorhandener Doppel- oder Rückkehrpunkte der Curve f an der Formel für P' anzubringende Reduction in einzelnen Fällen gestaltet, möge im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden. Die auch sonst bemerkenswerthen Beispiele d) und f) verdanke ich einer Mittheilung meines Collegen Sturm.

a) Die Correspondenz $(m-1, m-1)_1$ *) zwischen je 2 Schnittpunkten x und y einer Curve f (von der Ordnung m und dem Geschlecht p) und einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt B ausserhalb f geht, hat zu Coincidenzpunkten die $2m + 2p - 2$ Berührungspunkte der Tangenten des Geradenbüschels durch B. Ein Doppelpunkt A, welchen f besitzt, verändert diese Zahl nicht, weil, wenn der Punkt y in A rückt, von den ihm entsprechenden $\varkappa = m - 1$ (im Allgemeinen nicht in y fallenden) Punkten x nur einer wieder in den Doppelpunkt A, und zwar auf den anderen Zweig desselben fällt. Dagegen bringt jeder Rückkehrpunkt, aus den (§ 21.) angeführten Gründen, eine Reduction um 1 hervor. Die Zahl der nicht in Ausnahmepunkte von f entfallenden eigentlichen Coincidenzen ist also, wenn f β Rückkehrpunkte besitzt:

$$P = 2m + 2p - 2 - \beta.$$

b) Die Anzahl der von einem Doppelpunkt A aus an die Curve f construirbaren Tangenten ist $2m + 2p - 8$. Sie berühren in den Coincidenzpunkten einer Correspondenz $(m-3, m-3)_1$ zwischen den Schnittpunkten einer beliebig durch A gelegten Geraden mit f. Diese Zahl erfährt keine Reduction, wenn A in einen Rückkehrpunkt übergeht; denn von den ihm als Punkt y entsprechenden $\varkappa = m - 3$ Punkten x (den übrigen Schnittpunkten der Rückkehrtangente in A') fällt keiner in A zurück.

c) Die von Jonquières (Borchardt's Journal Bd. 66) und Cayley (Transact. R. Soc. Vol. 158) aufgestellten Formeln für die Anzahl der eine gegebene Curve f berührenden Curven, welche noch gewissen äusseren Bedingungen unterliegen, stimmen mit den (diese Annalen

---

*) Hier wie in den folgenden Beispielen möge der Kürze wegen für eine Correspondenz, die (§ 7.) durch die Klammer $(\varkappa, \lambda)$ charakterisirt wird, die Werthigkeit γ des Punktes $x = y$ als unterer Index beigefügt werden: $(\varkappa, \lambda)_\gamma$.

Bd. IV, S. 548, und Bd. VI, S. 46 ff.) von mir aufgestellten Formeln überein, obgleich an letzterer Stelle jene Bedingungen theilweise ersetzt sind durch die, dass die Curven noch durch die Doppelpunkte von f gehn sollen. Es geht daraus hervor, dass Doppelpunkte von f eine besondere Reduction ϱ an jenen Formeln für die Anzahl der Berührungscurven in keinem Falle veranlassen. Rückkehrpunkte bewirken nur dann eine Reduction, wenn die Schaar der Berührungscurven nicht durch sie hindurchgeht. — Man verificirt dies leicht mit Hülfe der oben angegebenen Regeln.

d) Sind 2 ebene Curven A und B eindeutig auf einander bezogen, so dass jedem Punkt von A eine Tangente von B entspricht und umgekehrt, so ist die Anzahl derjenigen Punkte von A, durch welche je die entsprechende Tangente durchgeht, gleich der Anzahl der Coincidenzen einer Correspondenz $(m, r)_0$ zwischen einem Punkt y von A und den m Schnittpunkten x von A mit der dem y entsprechenden Tangente von B. Diese Zahl ist aber gleich $m+r$, wenn m der Grad von A und r die Classe von B bedeutet. Weder Doppel- noch Rückkehrpunkte sind hierbei von Einfluss. — Hat man die nämliche Beziehung zwischen 2 Raumcurven A und B, *so wird die Classe der abwickelbaren Fläche, welche die durch entsprechende Elemente* (Punkt von A und Tangente von B) *gelegten Ebenen umhüllen, ebenfalls* $=m+r$ *sein,* wenn m und r ihre Bedeutung auch für die Raumcurven behalten. — Denn durch Projection derselben auf eine beliebige Ebene erhält man die vorige Beziehung.

e) Schneiden die Curven eines einfach unendlichen Curvenbüschels B (welches beliebig einfache oder Doppel- und Rückkehrpunkte von f zu Basispunkten besitzen mag) die Curve f in M beweglichen Punkten, so besteht zwischen je zweien dieser Punkte eine Correspondenz $\varphi=(M-1, M-1)_1$. Ist noch ein anderes Büschel B' gegeben, das in M' beweglichen Punkten schneidet und zu einer Correspondenz $\varphi'=(M'-1, M'-1)_1$ Veranlassung giebt, so ist die Anzahl der den Beiden gleichzeitig angehörenden Punktepaare (wegen des symmetrischen Verhaltens beider Correspondenzen, vgl. § 7.):

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') = (M-1)(M'-1) - p\,.$$

Man hätte diese Punkte aber auch im Sinne des § 15. als Coincidenzpunkte einer Correspondenz Φ auffassen können, welche besteht zwischen einem Punkt y von f und: 1) den $M-1$ Punkten x, welche vermöge φ dem y entsprechen; 2) den $(M-1)(M'-1)$ Punkten x', von denen vermöge φ' je $M'-1$ einem jener Punkte x entsprechen. — Man kann diese Auffassung zur Berechnung der Reduction benutzen, welche durch die d Doppel- und β Rückkehrpunkte von f, die nicht Basispunkte der Büschel B und B' sind, veranlasst wird. Lässt man

nämlich den Punkt y auf einen Zweig eines Doppelpunktes A von f rücken, so entspricht ihm ausser $M-2$ ausserhalb A gelegenen Punkten x ein Punkt x auf dem anderen Zweig, während einer der diesem entsprechenden $M'-1$ Punkte x' auf den Zweig zurückfällt, auf dem y liegt. Die Coincidenz x' mit y ist demnach eine eigentliche; zu ihr gehört die Coincidenz auf dem anderen Zweig (wegen des eigenthümlichen Verhaltens der gegebenen Correspondenz gruppiren sich die Coincidenzen je zu Paaren, welche aus Gründen der Symmetrie doppelt auftreten), und die Zahl der gesuchten Paare ist:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') - d - \beta = (M-1)(M'-1) - p - d - \beta,$$

wo noch β einfach in Abzug gebracht worden ist, weil Doppel- und Rückkehrpunkte im vorliegenden Falle sich nicht verschieden verhalten.

f) Gegeben sei wie in e) ein einfach unendliches Büschel, das in M beweglichen Punkten, worunter die Punkte x und y sich befinden mögen, die Curve f schneidet. Es soll die Anzahl derjenigen Paare von Schnittpunkten x, y bestimmt werden, welche in Bezug auf einen beliebig gegebenen Kegelschnitt polar gelegen sind. Ein solches Paar muss zugleich den beiden Correspondenzen: $\varphi = (M-1, M-1)_1$ und $\varphi' = (m, m)_0$ (die letztere zwischen einem Punkt y von f und den m Schnittpunkten x der Polaren zu y) genügen. Man erhält so:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') = m(M-1)$$

für die Anzahl der gesuchten Paare. Diese Zahl erfährt weder durch Doppel- noch durch Rückkehrpunkte eine Reduction, indem eigentliche Coincidenzen in den Ausnahmepunkten nicht vorhanden sind.

Darmstadt, im Februar 1874.

Ein Beweis des Additionstheorems für die hyperelliptischen Integrale.

Von Ad. Schumann in Berlin.

Der Abel'sche Satz, dass eine Summe von hyperelliptischen Integralen dritter Gattung mit dem Parameter t sich als eine bestimmte logarithmische Function dieses Parameters darstellen lasse, führt umgekehrt auf den Gedanken, aus der Natur der logarithmischen Function ihre Darstellung durch Integrale herzuleiten, in denen das Argument der Function als unabhängiger Parameter der Integrale erscheint. Eine derartige Darstellung liefert im Allgemeinen die Theorie complexer Variabelen, welche eine in einem bestimmten Gebiete einläufige und stetige Function durch ein über die Grenzen jenes Gebietes sich erstreckendes Integral ausdrücken lehrt, welches als Parameter das Argument der Function enthält. Indem ich diesen Ideengang verfolge, hat der Beweis, welchen ich für das Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale gebe, jene Theorie zur Grundlage und ist wesentlich aus einer charakteristischen Eigenschaft der logarithmischen Function geschöpft. Sobald die gesuchte Darstellung gewonnen und das Theorem für die dritte Gattung von hyperelliptischen Integralen zum Ausdruck gebracht ist, setzt eine Vergleichung der Coefficienten der beiden Reihen, in welche sich die Function und ihre Darstellung entwickeln lässt, das Theorem für die erste und zweite Gattung unmittelbar in Evidenz. Sucht man, von demselben Gesichtspunkt ausgehend, das Additionstheorem für die allgemeinsten Formen Abel'scher Integrale herzuleiten, so wird man im Wesentlichen auf die Beweisform geführt, welche Clebsch und Gordan in ihrem Werk „Theorie der Abel'schen Functionen" gegeben haben. Gleichwohl, hoffe ich, wird der Beweis, welchen ich vorlege, gerade weil er durch Beschränkung auf die hyperelliptischen Integrale sich so überaus einfach und durchsichtig gestaltet, den Lesern dieses Journals nach Inhalt und Form einiges Interesse bieten.

§ 1.

Es sei $\eta^2 = (z - a_1)(z - a_2) \cdots\cdots (z - a_{2\varrho+2})$ eine ganze rationale Function von geradem Grade; der Fall, in welchem η^2 eine ganze

rationale Function von ungeradem Grade ist, wird in der Folge auf jenen zurückgeführt werden. Ferner seien M und N ganze rationale Functionen von z dergestalt, dass die Function $M+N\eta$ für $z=\infty$ von der n^{ten} Ordnung unendlich wird; ausserdem gelte die Beschränkung, dass M und η^2 keine gemeinschaftliche Wurzel haben. Die Werthe von z, welche den beiden Gleichungen

$$\eta^2=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2\varrho+2})$$

und $M+N\eta=0$ genügen, sind Wurzeln der Gleichung $M^2-\eta^2N^2=0$. Sollte diese Gleichung gleiche Wurzeln haben, so denke man die Coefficienten in M und N so geändert, dass dieser Fall zunächst vermieden werde. Jede Wurzel z_μ der Gleichung wird entweder den Factor $M+N\eta$ oder $M-N\eta$ zu Null machen, so dass jeder Wurzel z_μ ein Werth η_μ adjungirt ist, je nachdem jener Factor oder dieser verschwindet. Inwieweit von den gemachten Voraussetzungen Abstand genommen werden darf, wird nach erfolgter Darlegung des Theorems klar liegen; vorläufig möge zur Vereinfachung der Darstellung daran festgehalten werden.

Nach diesen Vorbemerkungen beschränke man die Vieldeutigkeit der Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ in folgender Weise. Man nehme einen Punkt o an, von dem aus alle singulären Punkte, sowohl diejenigen, für welche die Function logarithmische, als auch diejenigen, für welche sie algebraische Unstetigkeiten zeigt, nach verschiedenen Richtungen liegen, und setze voraus, dass die singulären Punkte $a_1a_2\cdots\cdots a_{2\varrho+2}$ in der Ordnung mit Indices versehen seien, wie sie in Richtung der wachsenden Winkel einander folgen. Alsdann wähle man für ein Argument z im Bereich von $a_{2\varrho+2}$ einen bestimmten Werth $+\eta$ und denjenigen Logarithmus, welcher, ohne dass z aus dem Bereich dieses Punktes herausgetreten ist, für $a_{2\varrho+2}$ verschwindet; unter dem Bereich des Punktes $a_{2\varrho+2}$ sei aber eine Kreisfläche um $a_{2\varrho+2}$ verstanden, welche sich bis zum nächstgelegenen singulären Punkt ausdehnt. Bei dieser Annahme ist der Punkt $a_{2\varrho+2}$ für jedes Gebiet der z Fläche, welches ausser $a_{2\varrho+2}$ keinen singulären Punkt enthält, seiner Singularität für die Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ entkleidet; denn in hinlänglicher Nähe von $a_{2\varrho+2}$ lässt sich die Function durch die Reihe $2\left\{\frac{N}{M}+\frac{\eta^2}{3}\left(\frac{N}{M}\right)^3+\frac{\eta^4}{5}\left(\frac{N}{M}\right)^5+\cdots\text{ in inf.}\right\}$ darstellen, deren Werth bei einem Umlauf des Arguments um $a_{2\varrho+2}$ sich nicht ändert und für $z=a_{2\varrho+2}$ den eindeutigen endlichen Werth $2\,\frac{N(a_{2\varrho+2})}{M(a_{2\varrho+2})}$ annimmt. Jenes Gebiet, in welchem die Function nunmehr eindeutig definirt ist, lässt sich bis zu folgenden Grenzen ausdehnen. Man umgebe jeden

der singulären Punkte $a_1 a_2 \cdots\cdots a_{2\varrho+1}$, sowie jede der $2n$ Wurzeln $z_1 z_2 \cdots\cdots z_{2n}$ durch Linien, welche vom Punkte o geradlinig nach dem singulären Punkte ausgehen, diesen in einem kleinen Kreise umschliessen und alsdann geradlinig nach dem Punkte o zurücklaufen. Gestattet man der unabhängigen Variabeln nur solche Wege, welche jene Linien nicht schneiden, so wird bei jedem geschlossenen Wege die Function zu ihrem Anfangswerth zurückkehren; die Function wird also, da der Punkt $z = \infty$ keine Singularität aufweist, in dem ganzen Gebiete T der z-Ebene einläufig und stetig sein, welches ausserhalb jener Linien gelegen ist. Jede einzelne Linie, welche zum Zweck der Ausschliessung eines singulären Punktes verzeichnet ist, möge Schleife des singulären Punktes heissen.

Nun sei z_μ eine Wurzel von $M + N\eta$, und man lasse z auf dem kleinen Kreise, welcher z_μ umschliesst, in Richtung der wachsenden Winkel z_μ umlaufen. Da nach der Voraussetzung z_μ eine einfache Wurzel der Gleichung $M^2 - N^2\eta^2 = 0$ ist, und für z_μ die Functionen M und η nicht gleichzeitig verschwinden, so ist $M + N\eta$ um so mehr proportional mit $(z - z_\mu)$, je näher z an den Punkt z_μ herangeht, während z_μ für $M - N\eta$ keine Wurzel ist. Es wird demnach $\lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ um $2\pi i$ zunehmen und die oben betrachtete Function um $\frac{2\pi i}{\eta}$ wachsen. Wäre z_μ hingegen eine Wurzel von $M - N\eta$ gewesen, so würde die Function um $\frac{2\pi i}{\eta}$ abgenommen haben. So oft daher die Variabele die Schleife einer logarithmischen Unstetigkeit umläuft, nimmt die Function um $\pm\left(\frac{2\pi i}{\eta}\right)$ zu, je nachdem $M + N\eta$ oder $M - N\eta$ für das Argument z_μ zu Null wird.

Wenn man daher die Variabele auf zwei verschiedenen Wegen von dem Punkte $a_{2\varrho+2}$ aus nach dem Beginn des Schleifenkreises um a_1 gelangen lässt, auf einem, welcher geradlinig zu o und von da aus auf den Grenzen des T Gebietes in positiver Winkelrichtung entlang führt, und auf einem anderen, welcher von $a_{2\varrho+2}$ an geradlinig nach o, von da aus aber unmittelbar geradlinig zum Anfangspunkt des Schleifenkreises um a_1 sich fortsetzt, so werden sich die Werthe, welche die Function am Ende beider Wege annimmt, um $\frac{2\pi i}{\eta} q_1$ unterscheiden, wenn q_1 die Differenz zwischen der Anzahl der innerhalb des Winkelblatts $(a_{2\varrho+2}\, o\, a_1)$ gelegenen Wurzeln von $M + N\eta$ und $M - N\eta$ bezeichnet. Würde man daher den Functionswerth am Ende des ersten Weges durch $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta} + \frac{2\pi i}{\eta} p_1$ darstellen, wo der Logarithmus für $z = \lim a_1$ verschwinde, so würde der Functionswerth am Ende

des zweiten Weges sich in der Form $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_1-q_1)$ ausdrücken lassen. Die ersten Terme in diesen Functionswerthen ändern sich bei einem Umlauf um a_1 nicht, die zweiten dagegen wechseln ihr Zeichen. Setzt man daher voraus, dass allgemein eine Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$, deren Logarithmus für $z=\lim a_{\varkappa-1}$ verschwindet, auf einem Wege längs der Grenze des T-Gebietes am Beginn des Schleifenkreises von $a_\varkappa$ den Werth $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}p_\varkappa$ annehme, worin der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$ zu Null wird, so muss die ursprünglich definirte Function, wenn die Variabele von $a_{2\varrho+2}$ aus geradlinig nach o und von da aus auf der Grenze des T-Gebietes in positiver Winkelrichtung nach $a_\varkappa$ läuft, einen Werth annehmen, der sich in der Form $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_\varkappa-p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)$ darstellen lässt, worin der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$ verschwindet. Wenn demnach die Variabele die Grenze des T-Gebietes umschritten und von o aus geradlinig nach $a_{2\varrho+2}$ zurückgekehrt ist, so muss, da die Function ihren ursprünglichen Werth wieder annimmt,

$$\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}=\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_{2\varrho+2}-p_{2\varrho+1}+p_{2\varrho}-\cdots-p_1)$$

sein. Die Logarithmen verschwinden beide für $z=\lim a_{2\varrho+2}$; es ist daher $p_{2\varrho+2}-p_{2\varrho+1}+p_{2\varrho}-\cdots-p_1=0$, oder in anderer Form

$$\sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa}\, p_{2\varkappa+1}=\sum_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa}\, p_{2\varkappa}.$$

Lässt man dagegen die Variabele von $a_{2\varrho+2}$ geradlinig nach o und von da unmittelbar geradlinig zu dem Anfangspunkt des Schleifenkreises von a_1 gehen, dann aber, ohne a_1 zu umschreiten, nach o auf demselben Wege zurücklaufen und von da wieder ohne Rücksicht auf die logarithmischen Schleifen, sogleich auf der Schleife von a_2 bis zum Beginn ihres Kreises den Weg fortsetzen, so wird die Function, wenn die Variabele in analoger Weise von a_2 zu a_3, von a_3 zu a_4 u. s. f. bis zu $a_\varkappa$, ohne je eine Singularität der Function zu umschreiten, ihren Lauf nimmt, bei Beginn des Schleifenkreises von $a_\varkappa$ die Form haben $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}\left\{(p_\varkappa-q_\varkappa)+(p_{\varkappa-1}-q_{\varkappa-1})+\cdots(p_1-q_1)\right\}$. Hierin verschwindet der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$, während $q_\varkappa$ die Differenz zwischen der Anzahl der in dem Winkelblatt $(a_{\varkappa-1}oa_\varkappa)$ gelegenen Wurzeln von $M+N\eta$ und $M-N\eta$ bezeichnet. Ist die Variabele auf dem so charakterisirten Wege zu dem Ausgangspunkt zurückgekehrt, so muss die Function, da das Argument nie einen singulären Punkt umschritten hat, den Anfangswerth wieder erhalten. Da aber der Endwerth in der Form

$$\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}\left\{\sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\,p_\varkappa-\sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\,q_\varkappa\right\}$$

sich darstellt und der erste Term mit dem Ausgangswerth der Function übereinstimmt, denn in beiden verschwinden die Logarithmen für $z = \lim a_{2\varrho+2}$, so muss der zweite Term Null sein. Es ist daher $\sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\,p_\varkappa = \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\,q_\varkappa$. Beide Relationen werden für spätere Transformationen herangezogen werden.

§ 2.

Ist t irgend ein Punkt im Gebiete T, so bildet ein kleiner Kreis um t mit der Begrenzung von T zusammen eine neue Begrenzung für eine Fläche, innerhalb welcher die Function $\frac{1}{(z-t)\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ einläufig und stetig ist. Eine Integration über diese Begrenzung hat den Werth Null. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn z die Grenzen des T-Gebietes in positiver Winkelrichtung umläuft, der Grenzkreis um t gleichfalls in positiver Winkelrichtung zu umschreiten ist. Die Ausführung dieser Integration führt zu einer Darstellung der Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$, welche gleichzeitig das Additionstheorem für die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung in sich schliesst.

In der That, die Integration längs des kleinen Kreises um t in positiver Winkelrichtung liefert den Werth $\frac{2\pi i}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$, wobei $\frac{1}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$ denjenigen Werth bedeutet, welchen $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ annimmt, wenn z von $a_{2\varrho+2}$ aus in dem Gebiete T nach t gelangt, während andererseits die Integration über die Begrenzung des T-Gebietes zu hyperelliptischen Integralen Veranlassung giebt, in denen t als unabhängiger Parameter auftritt. Diese Integration zerfällt in eine Anzahl solcher, welche sich über die Schleifen der logarithmischen Unstetigkeiten z_μ erstrecken, und in eine Reihe solcher, welche sich über die Schleifen der algebraischen Unstetigkeiten $a_1\, a_2 \cdots\cdot a_{2\varrho+1}$ ausdehnen.

Ist z_μ eine Wurzel von $M+N\eta$, so wird die Function

$$\frac{1}{(z-t)\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$$

bei einem Umlauf um z_μ um $\frac{2\pi i}{(z-t)\eta}$ zunehmen; daher werden sich bei der Integration von o bis z_μ und von z_μ zurück nach o die Bestandtheile, welche die logarithmische Function enthalten, gegenseitig auf-

40*

heben, und da das Integral um den unendlich kleinen Kreis, welcher z_μ umgiebt, sich auf Null reducirt, so bleibt als Bestand für die Integration $2\pi i\int\limits_{z_\mu}^{0}\frac{dz}{(z-t)\eta}$. Wäre z_μ eine Wurzel von $M-N\eta$ gewesen, so wäre als Ergebniss der Integration $-2\pi i\int\limits_{z_\mu}^{0}\frac{dz}{(z-t)\eta}$ hervorgegangen. Es sind daher die Integrationsresultate über die Schleifen, welche $z_1 z_2 \cdots z_{2n}$ umfassen, in der Form zusammenzufassen $2\pi i\sum\limits_{1}^{2n}{}^{\mu}\int\limits_{z_\mu\eta_\mu}^{0}\frac{dz}{(z-t)\eta}$, wo η_μ denjenigen Werth anzeigt, welcher dem z_μ adjungirt ist.

Die Integration über eine Schleife, welche einen singulären Punkt $a_\varkappa$ umschliesst, zerfällt in ein geradliniges Integral von o bis $a_\varkappa$, in ein zweites, welches über den Schleifenkreis auszuführen ist, und endlich in ein drittes, welches sich von $a_\varkappa$ geradlinig nach o erstreckt. Die Function hat auf dem Wege von o bis $a_\varkappa$ den Werth

$$\frac{1}{(z-t)\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{(z-t)\eta}(p_\varkappa-p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1),$$

sie geht nach einem Umlauf auf dem Schleifenkreise in

$$\frac{1}{(z-t)\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}-\frac{2\pi i}{(z-t)\eta}(p_\varkappa-p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)$$

über, es zerstören sich daher bei der Integration diejenigen Terme, welche die logarithmischen Functionen enthalten, und da das Integral um den Punkt $a_\varkappa$ verschwindet, so ist das Resultat der Integration $4\pi i(p_\varkappa-p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)\int\limits_{0}^{a_\varkappa}\frac{dz}{(z-t)\eta}$. Bezeichnet man das Integral $\int\limits_{0}^{a_\varkappa}\frac{dz}{(z-t)(+\eta)}$ mit $A_\varkappa^{(t)}$, so lassen sich die Ergebnisse der Integration über die Schleifen, welche $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ umschliessen, in der Form darstellen $4\pi i\sum\limits_{1}^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}A_\varkappa^{(t)}(p_\varkappa-p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)$.

Aus den bisherigen Entwickelungen ist mithin folgende Darstellung der Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ gewonnen:

$$(1.)\quad \frac{1}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}=-\sum_{1}^{2n}{}^{\mu}\int\limits_{z_\mu\eta_\mu}^{0}\frac{dz}{(z-t)\eta}-\sum_{1}^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}2A_\varkappa^{(t)}(p_\varkappa-p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1).$$

Diese Darstellung ist gültig für jeden Punkt im Gebiete T. Zu-

gleich schliesst sie in sich das Additionstheorem für die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung, dem im folgenden Paragraphen noch eine andere Form gegeben werden mag.

§ 3.

Die Integrale $\int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta}$, welche in Formel (I.) auftreten, sind geradlinig von z_μ bis o zu erstrecken mit demjenigen η_μ, welches dem z_μ adjungirt ist. Statt dessen lässt sich die Integration von z_μ nach a_1 und von a_1 geradlinig nach o wählen, vorausgesetzt, dass jener ohne eine Ueberschreitung eines Punktes t, oder eines singulären Punktes $a_\varkappa$ in diesen übergeführt werden kann; der Weg von z_μ nach a_1 ist aber stets so zu nehmen möglich, dass diese Voraussetzung erfüllt ist. Es ist daher $\int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta} = \int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{a_1} \frac{dz}{(z-t)\eta} \mp A_1^{(t)}$, je nachdem z_μ eine Wurzel von $M+N\eta$ oder $M-N\eta$ ist. Die Summation in Formel (I.) erstreckt sich über alle Wurzeln sowohl von $M+N\eta$ als von $M-N\eta$; es wird also $-A_1^{(t)}$ so oft bei der Summation auftreten, als der Unterschied zwischen der Anzahl jener Wurzeln von der Anzahl dieser beträgt, das ist $\sum\limits_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\, q_\varkappa$-mal. Demnach ist

$$-\sum_1^{2n}{}^{\mu} \int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta} = \sum_1^{2n}{}^{\mu} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta} + A_1^{(t)} \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} q_\varkappa .$$

Würde man die z-Ebene in Rücksicht auf η als zweiblättrige Riemann'sche Fläche fassen, deren Verzweigungsschnitte geradlinig von den singulären Punkten ins Unendliche auslaufende und in ihrer Richtung durch o bestimmte Strahlen sind, so müsste der Integrationsweg von a_1 bis z_μ stets in demjenigen Blatte verlaufen, welches η_μ anzeigt; im Uebrigen wäre er in Rücksicht auf t der Beschränkung unterworfen, dass er nie den Strahl schneidet, welcher von t aus sich ins Unendliche erstreckt und dessen Richtung durch die von o nach t angegeben sei..

Nunmehr mögen in dem Ausdruck $\sum\limits_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}\, 2\, A_\varkappa^{(t)}\,(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ an Stelle der $A_1^{(t)}, A_2^{(t)} \cdots A_{2\varrho+1}^{(t)}$ die geradlinigen Integrale von der Form $\int\limits_{a_\varkappa}^{a_{\varkappa+1}} \frac{dz}{(z-t)(+\eta)} = A_{\varkappa,\varkappa+1}^{(t)}$ eingeführt werden. Unter der Voraus-

setzung dass t nicht in einem der Dreiecke gelegen ist, welche durch zwei auf einander folgende Punkte $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ und den Punkt o bestimmt sind, gelten folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
-A^{(t)}_{\varkappa-1} + A^{(t)}_{\varkappa} &= A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa}\\
-A^{(t)}_{\varkappa-2} + A^{(t)}_{\varkappa-1} &= A^{(t)}_{\varkappa-2,\varkappa-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-A^{(t)}_{2} + A^{(t)}_{3} &= A^{(t)}_{2,3}\\
-A^{(t)}_{1} + A^{(t)}_{2} &= A^{(t)}_{1,2}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt $A^{(t)}_{\varkappa} = A^{(t)}_{1} + A^{(t)}_{1,2} + A^{(t)}_{2,3} + \cdots A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa}$. Giebt man dem Index $\varkappa$ in dieser Gleichung die Zahlen $1, 2, 3, \cdots 2\varrho+1$ und addirt die dadurch entstehenden $2\varrho+1$ Gleichungen, nachdem jede mit dem zugehörigen Zahlenfactor $(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ multiplicirt ist, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}\, 2A^{(t)}_{\varkappa}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) = 2A^{(t)}_1 & \sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)\\
+ \cdots 2A^{(t)}_{\lambda-1,\lambda} & \sum_{\lambda}^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)\\
+ 2A^{(t)}_{\lambda,\lambda+1} & \sum_{\lambda+1}^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)\\
+ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Der Zahlenfactor $\sum\limits_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ lässt folgende Umformungen zu. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) &= \sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2\varrho}{}^{\varkappa} p_\varkappa + \sum_1^{2\varrho-1}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2\varrho-2}{}^{\varkappa} p_\varkappa\\
&+ \cdots\cdots \sum_1^{3}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2}{}^{\varkappa} p_\varkappa + p_1 = \sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1}.
\end{aligned}$$

Nach § 1. war aber $\sum\limits_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} = \sum\limits_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa}$; daraus folgt

$$2\sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} = \sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} + \sum_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa} = \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} p_\varkappa.$$

Da nun die zweite Relation in § 1. zeigte, dass $\sum\limits_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} p_\varkappa = \sum\limits_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} q_\varkappa$, so

nimmt der Ausdruck $2A_1^{(t)} \sum_1^{2\varrho+1} \varkappa\,(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ die Form

an $A_1^{(t)} \sum_1^{2\varrho+2} \varkappa\, q_\varkappa$. Bezeichnet man daher den Coefficienten von $2 \cdot A_{\lambda-1,\lambda}^{(t)}$ mit $m_{\lambda-1}$, und benutzt die in diesem Paragraphen gegebenen Umformungen zur Transformation von Formel (I.), so heben sich die $A_1^{(t)}$ heraus, und es ist

$$\text{(II.)}\quad \frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$$

$$= \sum_1^{2n} \mu \int_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta} - 2 \cdot A_{1,2}^{(t)} m_1 - 2 \cdot A_{2,3}^{(t)} m_2 - \cdots 2 A_{2\varrho-1,2\varrho}^{(t)} m_{2\varrho-1} - 2 A_{2\varrho,2\varrho+1}^{(t)} m_{2\varrho}.$$

Gesetzt, es hätte t in dem Dreieck $(a_{\varkappa-1}\, o\, a_\varkappa)$ gelegen, so wäre in obigem Gleichungssystem an Stelle von $-A_{\varkappa-1}^{(t)} + A_\varkappa^{(t)} = A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)}$ getreten die Relation $-A_{\varkappa-1}^{(t)} + A_\varkappa^{(t)} = A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)} - \frac{2\pi i}{\eta(t)}$, es würde also in obiger Formel $A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)}$ durch $A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)} - \frac{2\pi i}{\eta(t)}$ zu ersetzen sein. Würde man für die Integrationswege die früheren Beschränkungen aufheben, so würde für ein Integral $\int_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta}$ in die Formel

$$\int_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} + \frac{2\pi i}{\eta(t)} \varkappa + 2 A_{1,2}^{(t)} n_1 + 2 A_{2,3}^{(t)} n_2 + \cdots\cdots 2 A_{2\varrho,2\varrho+1}^{(t)} n_{2\varrho}$$

eintreten, wo die $\varkappa, n_1, n_2, \cdots\cdots n_{2\varrho}$ Zahlen bedeuten, welche in bekannter Weise durch den gewählten Integrationsweg bestimmt sind. Das Additionstheorem ist mithin für die Integrale dritter Gattung bewiesen. Eine wiederholte Differenziation nach dem Parameter t überträgt es auf Integrale von der Form $\int \frac{dz}{(z-t)^m \eta}$.

§ 4.

Um das Additionstheorem für die Integrale erster Gattung zu entwickeln, umschliesse man alle singulären Punkte, sowohl die $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ als auch die $z_1 z_2 \cdots z_{2n}$ durch einen Kreis um den Nullpunkt und setze voraus, dass die Integrationswege innerhalb dieses Kreises in der Weise verlaufen, wie Formel (II.) es erfordert. Indem man t ausserhalb dieses Kreises annimmt, ist mod. t stets grösser als mod. z; es lässt sich daher $(z-t)^{-1}$ und somit jeder Term der rechten Seite von Formel (II.)

nach absteigenden Potenzen von t entwickeln. Für $\int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta}$ gilt demnach die Darstellung:

$$\int\limits_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{dz}{(z-t)\eta} = -t^{-1}\int\limits_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{dz}{\eta} - t^{-2}\int\limits_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{z\,dz}{\eta} - \cdots\cdots t^{-\nu}\int\limits_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{z^{\nu-1}dz}{\eta} - \cdots \text{in inf.},$$

und, wenn man $\int\limits_{a_{\varkappa-1}}^{a_\varkappa}\frac{z^\nu\,dz}{\eta}$ mit $B^{(\nu)}_{\varkappa-1,\varkappa}$ bezeichnet, für $A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa}$ folgende:

$$A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa} = -t^{-1}B^{(0)}_{\varkappa-1,\varkappa} - t^{-2}B^{(1)}_{\varkappa-1,\varkappa} - \cdots\cdots t^{-\nu}B^{(\nu-1)}_{\varkappa-1,\varkappa} - \cdots\cdots \text{in inf.}$$

In der Entwickelung der rechten Seite von Formel (II.) nach absteigenden Potenzen von t ist also der Coefficient von $t^{-\nu}$:

$$-\sum_1^{2n}{}_\mu\int\limits_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{z^{\nu-1}}{\eta}dz + 2B^{(\nu-1)}_{1,2}m_1 + 2B^{(\nu-1)}_{2,3}m_2 + \cdots 2B^{(\nu-1)}_{2\varrho-1,2\varrho}m_{2\varrho-1} + 2B^{(\nu-1)}_{2\varrho,2\varrho+1}m_{2\varrho}.$$

Da nun die Function $\frac{1}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$ auf der linken Seite in Formel (II.) für $t=\infty$ von der $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Ordnung Null wird, so müssen alle Coefficienten von t auf der rechten Seite bis zum Coefficienten von $t^{-\varrho}$ einschliesslich verschwinden, und es ist deshalb jener oben niedergeschriebene Coefficient so lange Null, als $\nu \leqq \varrho$ ist. Es gilt also

$$\text{(III.)}\quad \sum_1^{2n}{}_\mu\int\limits_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{z^\nu dz}{\eta} = 2B^{(\nu)}_{1,2}m_1 + 2B^{(\nu)}_{2,3}m_2 + \cdots 2B^{(\nu)}_{2\varrho-1,2\varrho}m_{2\varrho-1} + 2B^{(\nu)}_{2\varrho,2\varrho+1}m_{2\varrho},$$

wenn dem ν eine der Zahlen $0, 1, 2, \cdots (\varrho - 1)$ beigelegt wird. Hebt man nunmehr die Beschränkung für die Integrationswege auf und lässt $m_1 m_2 \cdots m_{2\varrho}$ irgend welche ganze Zahlen bedeuten, so ist in Formel (III.) das Additionstheorem für die ϱ hyperelliptischen Integrale erster Gattung in allgemeiner Form ausgesprochen.

§ 5.

Es bleibt noch übrig, das Additionstheorem für die Integrale zweiter Gattung zum Ausdruck zu bringen. Zu dem Ende entwickele man die Function $\frac{t^{\varrho+1}}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$ nach absteigenden Potenzen von t. Diese Entwickelung ist gültig, so lange t ausserhalb jenes in § 4. bezeichneten Kreises gelegen ist. Sie auszuführen, ersetze man t durch u^{-1}. Durch diese Substitution mag $t^{-(\varrho+1)}\eta(t)$ in $\eta(u)$, $t^{-n}M(t)$ in

$\mathsf{M}(u)$ und $t^{-(n-\varrho-1)}N(t)$ in $\mathsf{N}(u)$ übergehen. Alsdann ist

$$\frac{1}{\eta(u)} \lg \frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}$$

in der Umgebung von $u=0$ nach aufsteigenden Potenzen von u entwickelbar. Der Coefficient von u^ν ist gleich

$$\frac{1}{\nu!} \lim_{u=0} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \, \frac{1}{\eta(u)} \lg \frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\eta(u)} \right\},$$

und dieser ist zugleich der Coefficient von $t^{-\nu}$ in der Entwickelung von $\frac{t^{\varrho+1}}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\,\eta(t)}{M(t)-N(t)\,\eta(t)}$, also auch der Coefficient von $t^{-(\nu+\varrho+1)}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\,\eta(t)}{M(t)-N(t)\,\eta(t)}$ nach absteigenden Potenzen von t. Da letztere Reihe identisch gleich mit der in § 4. gegebenen ist, so stimmen die Coefficienten von $t^{-(\nu+\varrho+1)}$ in beiden überein. Es ist daher

$$\text{(IV.)}\quad \sum_{1}^{2n} {}_{\mu} \int_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z^{\varrho+\nu}}{\eta}\,dz - 2B_{1,2}^{(\varrho+\nu)} m_1 - 2B_{2,3}^{(\varrho+\nu)} m_2 - \cdots 2B_{2\varrho-1,2\varrho}^{(\varrho+\nu)} m_{2\varrho-1} - 2B_{2\varrho,2\varrho+1}^{(\varrho+\nu)} m_{2\varrho}$$
$$= -\frac{1}{\nu!} \lim_{u=0} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \, \frac{1}{\eta(u)} \lg \frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\eta(u)} \right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält ausser dem Term

$$-\frac{1}{\nu!} \lg \frac{\mathsf{M}(0)+\mathsf{N}(0)}{\mathsf{M}(0)-\mathsf{N}(0)} \lim_{u=0} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \left(\frac{1}{\eta(u)}\right)$$

rationale Functionen der Coefficienten von M und N, also rationale Functionen der Coefficienten, welche in M und N enthalten sind. Solcher unabhängiger Coefficienten in M und N giebt es $2n-\varrho$; diese lassen sich durch willkührliche Annahme von $2n-\varrho$ Werthepaaren $z_\mu \eta_\mu$ aus den $2n-\varrho$ Gleichungen von der Form $M(z_\mu)+\eta_\mu N(z_\mu)=0$ bestimmen, sind also algebraische Functionen der z_μ. In Formel (IV.) liegt also das Theorem ausgedrückt, dass eine Anzahl von $2n-\varrho$ Integralen zweiter Gattung mit der unteren Grenze a_1 und willkührlich gewählten oberen Grenzen sich auf ϱ Integrale derselben Gattung zurückführen lassen, zu denen noch eine algebraische Function dieser oberen Grenzen und ein bestimmter Logarithmus von einer algebraischen Function dieser Grenzen hinzutritt. Jene ϱ Integrale haben zu oberen Grenzen die Wurzeln der Gleichung $\frac{M^2-\eta^2 N^2}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{2n-\varrho})}=0$.

Die Integrationswege von a_1 bis $(z_\mu \eta_\mu)$ in Formel (IV.) sind keiner weiteren Beschränkung unterworfen, sobald man die $m_1 m_2 \cdots m_{2\varrho}$ irgend welche ganze positive oder negative Zahlen bedeuten lässt.

§ 6.

Die Formeln (I.), (II.), (III.), (IV.) hatten zunächst alle zur Voraussetzung, dass η^2 eine ganze rationale Function von geradem Grade sei; doch bewahren sie auch ihre Gültigkeit, wenn η^2 von ungeradem Grade ist. In der That tritt bei ungeradem Grade von η^2 der Punkt $z=\infty$ an die Stelle von $a_{2\varrho+2}$, welcher bei der Bestimmung von $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ in § 1. seiner Singularität vollständig entkleidet war. Indem man also einem bestimmten Argument z ausserhalb jenes in § 4. bezeichneten Kreises ein bestimmtes $+\eta$ zuordnet und denjenigen Logarithmus wählt, welcher für $z=\infty$ verschwindet, ist die Function in demselben Gebiet wie in § 1. einläufig und stetig; und es gelten daher alle daraus abgeleiteten Schlüsse. Es mag noch bemerkt werden, dass, indem man die Bezeichnungen des § 5. vollkommen beibehält, bei ungeradem Grade von η^2 die Function $\mathfrak{y}^2(u)$ den Factor u enthält. In diesem Fall ist $\lg\frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\mathfrak{y}(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\mathfrak{y}(u)}$ in der Umgebung von $u=0$ nach Potenzen der Function $\frac{\mathsf{N}(u)\mathfrak{y}(u)}{\mathsf{M}(u)}$ zu entwickeln; es gilt demnach für $\frac{1}{\mathfrak{y}(u)}\lg\frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\mathfrak{y}(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\mathfrak{y}(u)}$ die Darstellung:

$$2\left\{\frac{\mathsf{N}(u)}{\mathsf{M}(u)}+\frac{\mathfrak{y}^2(u)\,\mathsf{N}^3(u)}{3\,\mathsf{M}^3(u)}+\frac{\mathfrak{y}^4(u)\,\mathsf{N}^5(u)}{5\,\mathsf{M}^5(u)}+\cdots\frac{\mathfrak{y}^{2\varkappa}(u)\,\mathsf{N}^{2\varkappa+1}(u)}{(2\varkappa+1)\,\mathsf{M}^{2\varkappa+1}(u)}+\cdots\text{ in inf.}\right\}.$$

Das Glied $\frac{\mathfrak{y}^{2\varkappa}(u)\,\mathsf{N}^{2\varkappa+1}(u)}{(2\varkappa+1)\mathsf{M}^{2\varkappa+1}(u)}$ ist eine rationale Function von u, welche für $u=0$ von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung zu Null wird. Bei der Bildung der rechten Seite von Gleichung (IV.) werden also nur die Terme zu berücksichtigen sein bis $\varkappa=\nu$; denn alle Terme, für welche $\varkappa>\nu$, verschwinden nach ν-maliger Differenziation für $u=0$. Die übrigen Glieder ergeben rationale Functionen der Coefficienten von M und N. Wenn demnach η^2 von ungeradem Grade ist, so tritt an Stelle der logarithmischen Function in Formel (IV.) gleichfalls eine algebraische Function der oberen Grenzen.

Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung*).

Von W. Frahm in Tübingen.

In Salmon's „Analytic geometry of three dimensions" (second ed. p. 100 and 177) wird eine gewisse kanonische Form für das simultane System dreier Flächen zweiter Ordnung angegeben, um Folgerungen über die Combinanten aus ihr zu ziehen. Da aber die Möglichkeit derselben dort nicht nachgewiesen wird, so konnte man diese um so mehr in Zweifel ziehen, als für die mit den Flächennetzen eng verknüpften Curven vierter Ordnung ähnliche kanonische Formen von den Herren Clebsch und Lüroth als unzulässig nachgewiesen sind. Wirklich ergiebt sich aus den Resultaten des Letzteren, dass jener Zweifel begründet war. Sind nämlich $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ die Gleichungen dreier Flächen zweiter Ordnung, $a_1 \cdots a_5$, $b_1 \cdots b_5$, $c_1 \cdots c_5$, ferner $z_1 \cdots z_5$ Pentaëdercoordinaten, zwischen denen die Relation

$$(1) \qquad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$$

besteht, so lautet Salmon's kanonische Form

$$(2) \qquad \varphi = \sum_1^5 a_i z_i^2 ; \quad \psi = \sum_1^5 b_i z_i^2 ; \quad \chi = \sum_1^5 c_i z_i^2 .$$

---

*) Wenn man symbolisch schreibt $\varphi = a_x^2$, $\psi = b_x^2$, $\chi = c_x^2$, so ergiebt sich aus Herrn Gordan's wichtigem Combinantensatze, dass alle Combinanten des Netzes simultane Invarianten der zwei Formen

$$(abuv)\,(acuv)\,(bcuv)$$

und

$$(abcu)\, a_{x^2}\, b_{x^2}\, c_{x^2}$$

sind; man findet dies in evidenter Weise durch Einsicht in Herrn Sturm's schöne Arbeit bestätigt (Borchardt's Journal Bd. 70). Die ganze algebraische Theorie aber ist mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft, obwohl die nicht veröffentlichten Resultate des Herrn Gundelfinger erlauben, eine Reihe von Sätzen aus den ebenen Kegelschnittnetzen zu übertragen.

Für $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ als unbestimmte Parameter ergiebt sich hieraus die Gleichung eines Flächennetzes

(3) $$\lambda\varphi + \mu\psi + \nu\chi = 0 .$$

Den Ort der Kegelspitzen des Netzes (eine Curve sechster Ordnung vom Geschlecht $p = 3$) findet man, indem man die letzte Gleichung nach $z_1 \cdots z_4$ differentiirt in der Form

(4) $$p_1 z_1 = p_2 z_2 = p_3 z_3 = p_4 z_4 = p_5 z_5 ,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$p_i = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu .$$

Durch Einsetzen der hieraus bestimmten Verhältnisse der Grössen $z_1 \cdots z_5$ findet man

(5) $$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} = 0 ,$$

und, indem man λ, μ, ν als Dreieckscoordinaten in einer Ebene ansieht, stellt dies die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, der Hesse'schen Abbildung der Kegelspitzencurve dar, welcher das vollständige Fünfseit der Geraden $p_1 \cdots p_5$ eingeschrieben ist. Nun kann aber im Allgemeinen einer Curve vierter Ordnung kein Fünfseit eingeschrieben werden, es ist vielmehr für Curven, bei denen dies möglich ist, ein System von Berührungscurven dritter Ordnung ausgezeichnet; andererseits kann nach Herrn Hesse jede Curve vierter Ordnung (auf 36 verschiedene Arten) als Abbildung einer Kegelspitzencurve angesehen werden, woraus denn einleuchtet, dass jene kanonische Form nur in speciellen Fällen zulässig ist. Ist aber umgekehrt die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in der Form (5) gegeben, so stellt sich diese sofort als Abbildung der Kegelspitzencurve eines Netzes (3) dar, dessen Gleichung man als eine Summe von 5 Quadraten dargestellt erhält. Aber diese Form ist dann immer auf unendlich viele Arten möglich, denn man beweist den Satz:

> Liegen die 10 Ecken eines vollständigen Pentaëders auf der Curve der Kegelspitzen, so können derselben unendlich viele Pentaeder eingeschrieben werden, deren Kanten also von sämmtlichen dreifachen Sehnen der Curve gebildet werden.

Um diese Pentaëder zu erhalten, construire man die drei dreifachen Sehnen durch einen beliebigen Punkt der Curve und lege durch je zwei derselben eine Ebene, welche ausser den 5 schon in ihr liegenden die Curve noch in einem weiteren Punkte schneidet, so dass man im Ganzen deren $1 + 3 \cdot 2 + 3 = 10$ erhält, welche unter Voraussetzung der im Satze ausgesprochenen Bedingung ein Pentaëder bilden.

Der Satz ist leicht zu beweisen. Denn aus dem Pentaëder $z_1 \cdots z_5$, welches im Raume dem Fünfseit $p_1 \cdots p_5$ entspricht, kann man unendlich viele ableiten; man beachte nur, dass alle Berührungscurven dritter Ordnung, welche in den Ecken eines Vierseits die Fünfseite berühren, demselben System (in dem von Hesse, Crelle's Journ. 49, festgestellten Sinne) angehören, und erkennt, dass die den 6 Ecken eines Vierseits im Raume entsprechenden Punkte immer in einer Ebene liegen müssen, wenn dies einmal eintrat. Es liegen aber die 6 den Ecken des Vierseits $p_1 \cdots p_4$ entsprechenden Punkte in der Ebene z_5, womit die Behauptung des Satzes erhärtet ist.

Aus dem Umstande, dass die Kenntniss der 8 Schnittpunkte von drei Flächen des Netzes hinreicht, um alle Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung zu finden, ergiebt sich noch:

> Nach Auffindung eines Fünfseits erfordert die vollständige Lösung des Problems der Doppeltangenten für die Lüroth'schen Curven nur noch die Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung 8ten Grades.

Ein weiterer Satz über dieses merkwürdige Flächennetz möge noch bewiesen werden:

> Mit Hülfe eines jeden Pentaëders können irgend drei der Flächen des Netzes auf unendlich viele Arten als Polaren eines Flächenpaares dritter Ordnung angesehen werden; die zugehörigen Pole liegen in drei geraden Linien.

In der That kann man die durch die Gleichungen (2) dargestellten Flächen immer ansehen als Polaren einer Fläche dritter Ordnung,

$$0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i^3,$$

denn die Gleichungen der ersten Polaren dreier Punkte $z' z'' z'''$ in Bezug auf dieselbe sind

$$0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i' z_i^2; \quad 0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i'' z_i^2; \quad 0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i''' z_i^2.$$

Sollen diese mit den Flächen φ, ψ, χ zusammenfallen, so müssen die Relationen erfüllt sein,

$$z_i' = \frac{a_i}{\lambda_i}, \quad z_i'' = \frac{b_i}{\lambda_i}, \quad z_i''' = \frac{c_i}{\lambda_i},$$

und man erhält durch Substitution in die Identität $0 = \sum_1^5 z_i$:

$$0 = \sum_1^5 \frac{a_i}{\lambda_i}, \quad 0 = \sum_1^5 \frac{b_i}{\lambda_i}, \quad 0 = \sum_1^5 \frac{c_i}{\lambda_i}.$$

Sind also $\frac{1}{\lambda_i'}$, $\frac{1}{\lambda_i''}$ zwei Werthsysteme, welche diesen Gleichungen genügen, θ ein Parameter, so erhält man $\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i''} + \frac{\theta}{\lambda_i'}$ und

$$z_i' = \frac{(\lambda_i' + \theta \lambda_i'')}{\lambda_i' \lambda_i''}, \quad z_i'' = \frac{b_i (\lambda_i' + \theta \lambda_i'')}{\lambda_i' \lambda_i''}, \quad z_i''' = \frac{c_i (\lambda_i' + \theta \lambda_i'')}{\lambda_i' \lambda_i''},$$

womit der Satz erwiesen ist.

Endlich ergiebt sich:

> Drei Flächen können entweder (im Allgemeinen) gar nicht oder auf zweifach unendlich viele Arten als Polaren einer Fläche dritter Ordnung angesehen werden.

Denn alsdann liegt die Kegelspitzencurve auf der zugehörigen Kernfläche und enthält die 10 Ecken des Pentaëders der Fläche dritter Ordnung, derselben können aber unendlich viele Pentaëder eingeschrieben werden.

Tübingen, 13. März 1874.

Verbesserungen.

S. 74 Z. 10 v. o. lies $a_i x_i d\lambda$ statt $a_i d\lambda$.
S. 86 Z. 11 v. u. lies $4(a_4-a_2)(a_3-a_1)$ statt $2(a_4-a_2)(a_3-a_1)$.
S. 87 Z. 1 v. o. lies $2(Q,Q)\sqrt{\Delta}$ statt $(QQ)\sqrt{\Delta}$.
S. 87 Z. 2 v. o. lies „das doppelte Moment" statt „das Moment".
S. 285 Z. 5 v. u. lies „Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist" statt „Curve ist".
S. 310 Z. 9 v. o. lies ∞^{24} statt ∞^{23}.
S. 310 Z. 13 v. o. lies ∞^{23} statt ∞^{24}.
S. 325 Z. 9 v. o. lies $\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ statt $\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.
S. 326 Z. 2 v. u. lies qQ statt pQ.
S. 355 Z. 11 v. u. lies $2(x^2+y^2+z^2)$ statt $x^2+y^2+z^2$.
S. 358 Z. 15, 16, 17 v. o. lies q^{21} statt q^{11}.
S. 359 Z. 1, 3, 8 v. u. lies q^7 statt q^8.
S. 362 Z. 9 v. o. lies q^7 statt q^8.
S. 363 ist auf den linken Seiten der beiden Formeln (15) überall q^7 statt q^3 zu setzen.
S. 381 Z. 4 v. u. lies PQR statt PPR.
S. 384 Z. 9 v. o. lies 2^{n-1} statt 2.
S. 385 Z. 5 v. u. lies $3h$ statt h.

Nachträgliche Verbesserung zu Band VI.

S. 598 Z. 13 v. u. und S. 601 Z. 2 v. o. lies $g(N)$ statt $G(N)$.

Preisaufgaben

der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig.

Aus der Mathematik und Naturwissenschaft.

1. Für das Jahr 1874.

Das Problem der elektrischen Vertheilung auf einem Conductor von gegebener Gestalt ist durch die bisher in Anwendung gebrachten Methoden nur in verhältnissmässig wenigen Fällen zur definitiven Lösung gelangt oder einer solchen zugänglich geworden. Um die genannten Methoden ihres speciellen Charakters zu entkleiden und wo möglich auf ein allgemeineres Niveau zu erheben, scheint es zunächst wünschenswerth, wesentlich neue Fälle in den Kreis der Untersuchungen hereinzuziehen. Demgemäss stellt die Gesellschaft folgende Preisaufgabe:

Auf einem Rotationskörper, dessen Meridian durch die Lemniscate (Cassini'sche Curve)

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=b^4-a^4$$

dargestellt ist, soll die Vertheilung der Elektricität unter dem Einflusse gegebener äusserer Kräfte ermittelt werden.

Die Beantwortung des Specialfalles $a=b$ würde durch die Methode der reciproken Radien (Methode der sphärischen Spiegelung) auf den Fall eines Hyperboloids reducirbar, und für die Erlangung des Preises *unzureichend* sein. Preis 60 Ducaten.

2. Für das Jahr 1875.

Die Frage nach der Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes ist trotz mannigfacher Bemühungen bis jetzt nicht entschieden worden. Die Gesellschaft stellt daher die Aufgabe:

Es ist durch neue Untersuchungen die Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes endgültig festzustellen.

Preis 60 Ducaten.

3. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des sciences), von Hansen (in den Berichten der Kön. Sächs. Gesellsch. der Wiss. vom 15. April 1863) und von Wilhelm

Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Kometen S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Komet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine *vollständige* Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Kometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Kometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt deshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Kometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

Die Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1874 Prof. Dr. G. Curtius) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.